

Grigore Gheba

Lucreția Gheba

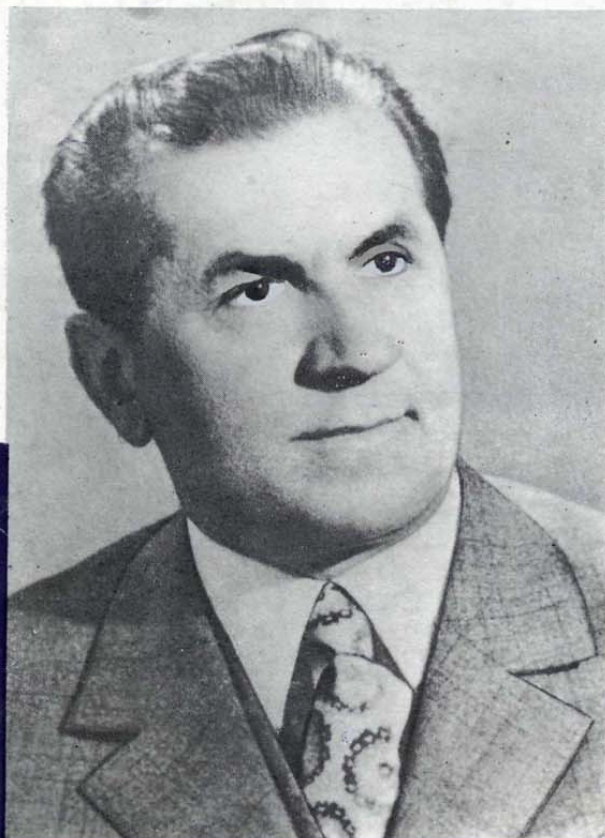
Carmina Gheba

PENTRU
CLASELE

V-IX

Exercitii și probleme de matematică





*Dragi elevi
Vă doresc mult succes în
studiul matematicii.*

Prof. Gheba



EDITURA ICAR-BUCUREȘTI

B-dul Bucureștii Noi nr. 68, sc. F, et. 3,
ap. 10, sector 1, cod 78494
Telefon: 67.12.88, 60.15.75

ISBN 973-606-152-3

Lei 350

Grigore Gheba

Lucreția Gheba

Carmina Gheba

EXERCIIȚII ȘI PROBLEME DE MATEMATICĂ
pentru clasele V – IX

Ediție revăzută și adăugită

Editura I C A R • București — 1992



Referent : prof. Cătălin – Petru Nicolescu

ISBN – 973 – 606 – 152 – 3

Redactor : prof. Elisabeta Mesaroş
Tehnoredactor : Otto Paraschiv Necşoiu
Grafica : pictor Nadejda – Luminia Nicolescu
grafician Dumitru Şmalenic
Culegere text M E G A – S.A. / Colectiv C.I.P.I.
Tehnoredactare computerizată : Eugen Constantinescu

**© Toate drepturile asupra acestei ediţii sînt rezervate Editurii ICAR. Nici un capitol
şi nici o parte din această carte nu pot fi tipărite sau multiplicare folosind diferite
mijloace fără permisiunea Editurii ICAR.**

PREFAȚĂ

In această ediție, am adus multe îmbunătățiri la fiecare capitol din edițiile vechi și am completat lucrarea cu capitole noi, care să vină în sprijinul elevilor în abordarea unor teme mai dificile în interpretarea și rezolvarea lor.

Structura lucrării nu coincide întru totul cu structura manualelor actuale, dar ea conține tocte cunoștințele prevăzute în programa școlară, cât și unele teme cu un grad mai deosebit de dificultate pentru elevii cu preocupări mai deosebite la matematică.

La marea majoritate a noilor probleme adăugate, enunțul urmărește să-l pună pe rezolvitor ca, în afară de cunoașterea temeinică a elementelor teoretice, să dovedească inventivitate și să încerce un mai mare efort de creație.

Am pus un mare accent, atât în enunțuri cât și în indicații, pe stabilirea condițiilor de existență pentru ca elevul să se obișnuiască să precizeze mulțimea valorilor cu care are dreptul să opereze. Aceasta, evident, îi dă posibilitatea să evite unele concluzii eronate la care ar putea ajunge dacă n-ar lucra riguros.

Pentru a scuti elevii, în studiul lor individual, de alte ajutoare din afara școlii, am considerat necesar să adaug acestei ediții noi capitole. Acestea conțin multe și variate teme de algebră și geometrie rezolvate, însoțite de indicații metodice, astfel încât elevii să sesizeze calea de urmat în rezolvarea unor teme cu un grad mai mare de dificultate.

In noua formă, considerăm că lucrarea contribuie în și mai mare măsură la sprijinirea îmbunătățirii procesului de învățare a matematicii.

Autori

I. CLASA a V-a

I.1 Mulțimi – BREVIAR

A. Simboluri

Dăm mai jos câteva din simbolurile matematice pe care le vom utiliza în rezolvarea unor exerciții și probleme.

Elementele unei mulțimi se scriu între acolade $\{ \}$.

Exemple: a) $\{1, 2, 7, 10\}$; $\{a, b, c\}$;

b) $\{\text{albinele dintr-un roi}\}$;

c) $\{\text{oile dintr-o turmă}\}$;

d) $\{\text{porumbeii dintr-un stol}\}$;

e) $\{\text{copiii dintr-o familie}\}$;

f) $\{\text{elevii dintr-o clasă}\}$;

g) $\{\text{numerele naturale}\}$.

Se observă, din exemplele de mai sus, că mulțimile pot fi notate (prezentate, descrise) în două moduri:

a) prin enumerarea elementelor (exemplul a);

b) printr-o proprietate comună a elementelor [exemple: b), c)...g)].

\in = aparține; \notin = nu aparține

Exemple: considerăm mulțimile $A = \{a; b; c\}$; $B = \{1; 2; 3\}$.

Se scrie $a \in A$; $b \in A$; $2 \notin A$; $3 \in B$; $c \notin B$, după cum elementele se află sau nu în mulțimile respective.

La notarea unei mulțimi printr-o proprietate comună folosim scrierea

$$A = \{x \in N \mid x < 4\}$$

care se citește astfel: A este mulțimea elementelor x care aparțin numerelor naturale mai mici decât numărul natural 4.

\rightarrow semnul de implicație

Exemplu: dacă $x = y \rightarrow y = x$, se citește: dacă x este egal cu y rezultă că y este egal cu x .

\subset ; \supset pentru incluziune

Dacă $A = \{a; b; c; d\}$ și $B = \{c; d\}$ atunci $B \subset A$ sau $A \supset B$ se citește B este inclus în A sau A include pe B sau B este o submulțime a mulțimii A (fig. I.1). $A \not\subset B$ (A nu este inclus în B).

\cap semnul pentru intersecția
de mulțimi

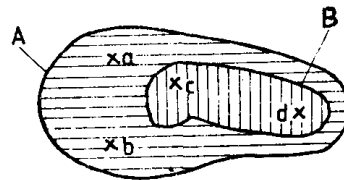


Fig.I.1

Exemplu: dacă $A = \{a; b; c; 2; 3\}$, $B = \{a; b; 5; 8\}$ atunci $A \cap B = \{a; b\}$ se citește A intersectat cu B și reprezintă mulțimea elementelor comune celor două mulțimi, în cazul nostru $\{a; b\}$.

\emptyset semnul pentru mulțime vidă (nu conține nici un element)

Exemplu: mulțimile $A = \{2; 7; 8; 9\}$ și $B = \{4; 5; 60\}$ nu au nici un element comun. Se poate scrie $A \cap B = \emptyset$.

\cup pentru reuniune de mulțimi

Exemplu: $A = \{1; 2; 3; a; b\}$; $B = \{2; 3; c; d\}$
 $A \cup B = \{1; 2; 3; a; b; c; d\}$ (elementele reuniunii celor două mulțimi).

\sim semnul de echivalență

între elementele a două mulțimi: dacă fiecărui element dintr-o mulțime A îi corespunde un element și numai unul dintr-o mulțime B și reciproc se spune că între elementele celor două mulțimi există o corespondență biunivocă și atunci cele două mulțimi sînt echivalente și se notează $A \sim B$.

Exemplu: $A = \{a; b; c\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ (figura I.2)

Observație. Două mulțimi A și B cu un număr finit de elemente trebuie să aibă același număr de elemente ca ele să fie echivalente.

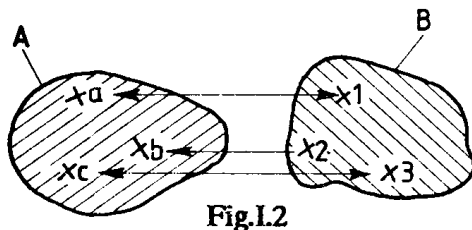


Fig.I.2

Exemplu: la începutul anului școlar elevii din clasa întâi sînt conduși într-o clasă în care se află un număr de măsuțe egal cu numărul elevilor. Fiecare elev se așează la o măsuță; nu mai rămîne nici un elev fără măsuță și nici vreo măsuță liberă.

a) Mai întîi remarcăm două mulțimi. $A = \{\text{mulțimea elevilor de clasa întâi intrați în clasă}\}$; $B = \{\text{mulțimea măsuțelor}\}$.

b) Între elementele acestor mulțimi (elevi și măsuțe) se stabilește o legătură și anume fiecărui elev îi corespunde o măsuță și fiecărei măsuțe îi corespunde un elev. Mulțimile în acest caz sînt echivalente și se notează $A \sim B$.

Fiind date mulțimile A și B , mulțimea elementelor care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B se numește diferența dintre mulțimile A și B și se notează:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ și } x \notin B \}$$

Exemple:

a) $A = \{2; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$; $A - B = \{2; 3\} = A$ căci $A \cap B = \emptyset$.

b) $C = \{4; 2; 6; 8\}$; $D = \{6; 4; 8; 10; 12\}$. $C - D = \{2\}$ iar $D - C = \{10; 12\}$.

Observație. $C - D \neq D - C \Rightarrow$ diferența a două mulțimi nu este comutativă. $C - D$ și $D - C$ nu au elemente comune $\Rightarrow (C - D) \cap (D - C) = \emptyset$ sau cele două mulțimi sînt disjuncte.

Dacă $B \subset A$, atunci diferența $A - B$ se mai numește complementara mulțimii

B față de A și se notează cu semnul $C_A B$.

Cîteva exemple vor pune în evidență notația de mai sus.

a) ; $A = \{\Delta; \square; 3; 2\}$; $B = \{3; 2\}$.

Se observă că

$A - B = \{\Delta; \square\} = C_A B$ (fig. I.3).

b) Fie mulțimile:

$A = \{2; 5; 4\}$; $B = \{2; 5; 4; 6\}$.

Avem $A - B = \emptyset$; $B - A = \{6\}$ sau $C_B A = \{6\}$.

c) $A = \{a; b; c; d\}$; $B = \{a; d\}$

$A - B = \{b; c\}$ sau $C_A B = \{b; c\}$, $B - A = \emptyset$ (fig. I.4).

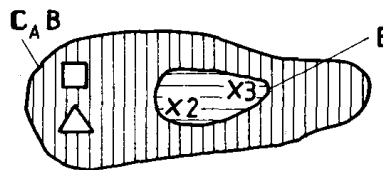


Fig.I.3

Card A sau \bar{A} (cardinalul mulțimii A).

Cardinalul unei mulțimi finite arată cîte elemente are acea mulțime.

Exemplu: $A = \{a; b; c; d; m\}$; cardinalul mulțimii A este 5.

Card $\emptyset = 0$ (zero); Card $\{0\} = 1$; Card $\{0; 1\} = 2$.

Cardinalul unei mulțimi este un număr natural.

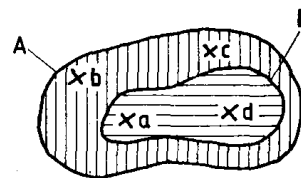


Fig.I.4

B. Propoziții

O propoziție poate fi *adevărată* sau *falsă*.

Exemplu: numărul 4 este mai mic decît numărul 5; $(4 < 5)$ este o propoziție adevărată.

Numărul 8 este mai mare decît numărul 12; $(8 > 12)$ este o propoziție falsă.

Spunem că valoarea de adevăr a unei propoziții este *adevărul*, dacă propoziția este adevărată și că valoarea de adevăr a unei propoziții este *falsul*, dacă ea este falsă.

Prin negația unei propoziții se schimbă valoarea ei de adevăr: propoziția adevărată devine falsă, iar propoziția falsă devine adevărată.

În matematică propozițiile se studiază numai din punctul de vedere al valorii de adevăr.

Propozițiile le vom nota cu literele: $p; q; r; s; p_1; p_2$ etc.

Exemplu: fie mulțimea $A = \{m; n; c; d\}$ și propozițiile

$$p : m \in A; p_1 : n \in A; p_2 : d \notin A.$$

Propozițiile p și p_1 sînt adevărate, valoarea lor de adevăr este adevărul, propoziția p_2 are ca valoare de adevăr falsul.

Exerciții

1) Se dă egalitatea $\{a; 3; 4\} = \{5; 3; 4\}$.

a) Să se găsească a în așa fel ca propoziția să fie adevărată.

b) Să se determine valorile lui a ca propoziția să fie falsă.

R. a) $a=5$, b) orice număr diferit de 5.

2) Fie mulțimea $A = \{7; 8; 5; 9; 12; 17\}$ și propoziția $p : x \in A, 3/x$
propoziția p poate fi adevărată sau falsă. Valoarea ei de adevăr depinde de elementul x ce aparține lui A .

Dacă x este unul din numerele 9 sau 12 atunci propoziția este adevărată, în caz contrar ea este falsă. Trebuie să precizăm ce număr este $x \in A$ în condițiile puse de problemă (ca să fie divizibil prin 3)

C. Funcții

În lumea înconjurătoare sînt diferite feluri de mărimi. Unele mărimi au legătură între ele, sînt dependente; de exemplu salariul unui muncitor depinde de numărul de zile lucrate, de calitatea muncii depuse precum și de alți factori; aria unei arene circulare depinde de mărimea-razei cercului. Studiindu-se aceste legături, s-au stabilit unele *legi* care au condus uneori la *formule*. De exemplu: aria cercului se află prin înmulțirea numărului π cu pătratul razei.

Să considerăm mulțimea $M = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ în care fiecare element reprezintă, în cm, mărimea laturii unui pătrat. Să aflăm ariile acestor pătrate; ele vor forma mulțimea

$$P = \{9; 16; 25; 36; 49\} \text{ (în cm}^2\text{)}.$$

Avem o *corespondență* între mulțimile M și P , stabilită prin formula: $\text{Aria} = L^2$. Se spune că, din punct de vedere matematic, am definit o *funcție*: M este mulțimea de definiție (numită domeniu de existență), P este mulțimea de valori (sau codomeniul) iar corespondența între cele două mulțimi se face prin formula

$$\text{Aria} = L^2$$

Un alt exemplu de funcție: să considerăm numerele întregi cuprinse între 8 și 13; acestea sînt 9; 10; 11; 12. Să se afle mulțimea formată din întregitul acestor numere. În cazul acesta, domeniul de existență este mulțimea $A = \{9; 10; 11; 12\}$, codomeniul este mulțimea $B = \{27; 30; 33; 36\}$, iar corespondența între cele două mulțimi s-a făcut printr-o operație de înmulțire.

La definirea unei funcții sînt necesare *două mulțimi și o lege de corespondență care să stabilească trecerea de la domeniul de existență la domeniul de valori*.

Funcțiile se notează cu literele f, g, h sau cu alte simboluri matematice: \log , \sin , \arccos , ...

În general, fie două mulțimi X, Y ; dacă facem ca oricărui element x din X să-i corespundă un element y din Y , și numai unul, spunem că am definit o funcție pe X cu valori în Y . Se mai spune: aplicație a lui X cu valori în Y . Dînd lui x diferite valori numerice, după voie, fără să ne preocupăm de ce valori ia y , putem spune că x variază independent de y sau că x este *variabila independentă* iar y este *variabila dependentă*.

Expresia matematică a funcției este $y=f(x)$ care arată corespondența între cele două mulțimi; mai putem exprima o funcție astfel: $f: X \rightarrow Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$, adică o funcție f definită pe X cu valori în Y .

*
* *

Noțiunea de funcție este una din cele mai importante noțiuni din matematică și în epoca contemporană a calculatoarelor electronice cele mai multe aplicații ale tehnicii moderne folosesc această noțiune. Într-adevăr, orice studiu cantitativ al unor fenomene din natură sau din producție urmărește să stabilească corespondența între elementele a două mulțimi.

În cele ce urmează vom mai da câteva exemple de funcții și vom face unele observații.

–Lungimea unui cerc depinde de raza cercului și se știe că ea se calculează prin formula $L=2\pi R$.

Dacă luăm pentru R valorile 2; 3; 4; (în metri) vom afla lungimile de 4π ; 6π ; 8π (în metri). În cazul de față $X=\{2; 3; 4\}$; $Y=\{4\pi; 6\pi; 8\pi\}$ și legea de corespondență $L=2\pi R$. Deoarece la valori din ce în ce mai mari date lui R lungimea cercului crește, se spune că funcția este crescătoare. Variația unei funcții se poate scrie într-un tablou, numit tabloul de variație al funcției: pentru exemplul precedent avem tabloul:

R	2	3	4
L	4π	6π	8π

–Să considerăm funcția $f(x)=x^2$, în care $x \in R$ și să atribuim lui x valorile crescătoare 2; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{3}{4}$; 3; $3\frac{1}{4}$. Intocmind tabloul de variație avem:

x	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{4}$
$f(x)$	4	$\frac{81}{16}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{121}{16}$	9	$\frac{169}{16}$

Și în acest caz, pentru intervalul studiat, funcția este *crescătoare* (fig. I.5,a).

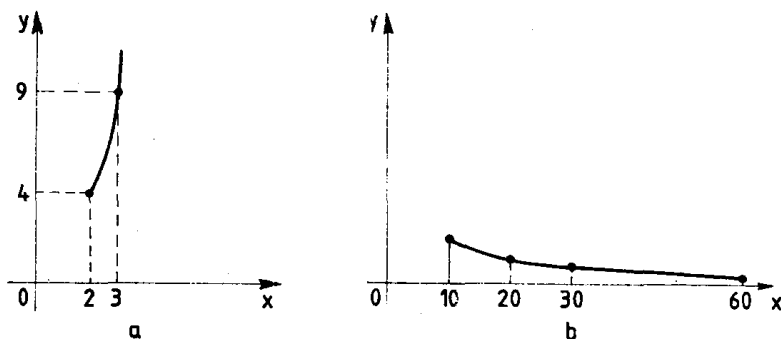


Fig.I.5

Putem considera fiecare pereche de valori ca fiind coordonatele unui punct din plan. Figurăm punctele și unindu-le printr-o linie continuă, se obține *graficul funcției*.

Studiul unei funcții prin tablou și apoi ilustrată prin grafic ajută la interpretarea unor fenomene din fizică, astronomie, cum se va constata mai târziu.

–Un alt exemplu:

Se știe că în cazul mișcării uniforme spațiul se exprimă prin formula $s=vt$;

de aici se poate deduce: $v=\frac{s}{t}$ sau $t=\frac{s}{v}$.

Să studiem cum variază timpul într-o asemenea mișcare, dacă viteza variază, spațiul rămânând constant (același).

De exemplu: distanța București–Ploiești (60 km) este parcursă de un autobuz, care are o viteză orară de 60 km în timp de o oră, un camion care are $v=30$ km/h parcurge aceeași distanță în două ore, un altul care are $v=20$ km/h parcurge același drum în 3 ore, un biciclist cu $v=10$ km/h parcurge aceeași distanță în 6 ore.

Putem alcătui următorul tablou în care

$X=\{60; 30; 20; 10\}$ în km, $Y=\{1; 2; 3; 6\}$ în ore

v	10	20	30	60
t	6	3	2	1

Funcția este *descrescătoare*. Graficul, în care pe o axă notăm unitatea (km) și pe cealaltă unitatea (ora) reprezintă o *linie curbă descendentă* (fig. I.5,b).

•••

În cele spuse privitoare la funcții, am folosit numai exemple de *funcții numerice*, adică funcții în care X și Y sînt mulțimi de numere reale și legea de corespondență se poate exprima printr-o formulă. În clasele superioare se vor studia și alt fel de funcții.

Prezentăm câteva diagrame, pentru înțelegerea noțiunii de funcție la nivelul claselor V–VIII.

Fiind date 2 mulțimi E și F (fig I.6), să se figureze diagramele funcțiilor posibile, definite pe E și cu valori în F .

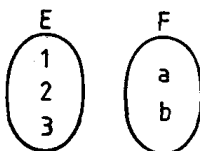


Fig.I.6

Diagramele celor 8 funcții posibile sînt prezentate în figura I.7.

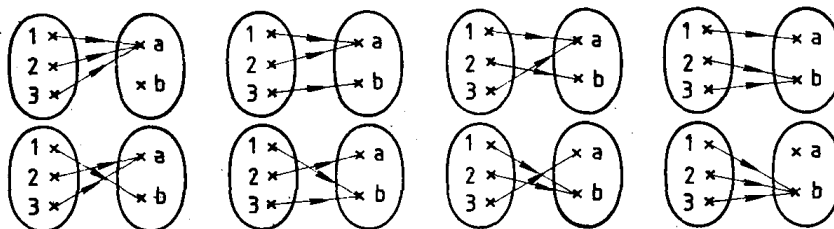


Fig.I.7

Diagramele pot fi reprezentate și în alte moduri. Dăm câteva exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & a \end{pmatrix} \dots\dots$$

I.2. EXERCITII ȘI PROBLEME CU MULȚIMI

1. Scrieți 3 mulțimi.

2. Scrieți două exemple de mulțimi prin enumerarea elementelor fiecărei mulțimi.

3. Notați următoarele mulțimi:

a) Mulțimea literelor din care este compus cuvântul "mama".

b) Mulțimea numerelor naturale mai mici ca 7.

c) Mulțimea numerelor naturale mai mari ca 8 și mai mici ca 14.

d) Mulțimea literelor cuvintelor: "tata", "capcană".

Menționați care din aceste mulțimi este descrisă prin enumerare și care din ele printr-o proprietate comună. Scrieți în două moduri mulțimile de mai sus.

4. Fie mulțimile: $A = \{x \in N \mid 4 < x < 9\}$;

$$B = \{x \in N \mid 20 < x < 24\}.$$

a) Să se determine aceste mulțimi.

b) Să se scrie câte două elemente care aparțin mulțimilor date și câte două care nu aparțin.

$$\text{R. a) } A = \{5; 6; 7; 8\} \quad B = \{21; 22; 23\}$$

$$\text{b) } \{5; 6\} \subset A; \{21; 22\} \subset B.$$

5. Scrieți mulțimile literelor din care sînt alcătuite cuvintele: "car", "rac", "păr", "pas".

a) Care din aceste mulțimi sînt egale și care nu? Justificați răspunsul.

$$\text{R. } A = \{c; a; r\}; B = \{r; a; c\}; C = \{p; \bar{a}; r\}; D = \{p; a; s\};$$

$$A = B (\text{au aceleași elemente}), C \neq D (\text{n-au aceleași elemente}).$$

6. a) Fie mulțimile: $A = \{4; 5; x\}$, $B = \{4; 5; 8\}$, să se determine x din mulțimea A astfel ca $A = B$.

b) Fie $M = \{7; x; 8; b\}$; $N = \{b; 8; 7; 9\}$, să se determine x în cazul cînd $M = N$.

$$\text{R. } x = 8; x = 9.$$

7. Care din următoarele mulțimi sînt egale și care nu? $A = \{1; 2; 3; a\}$; $B = \{2; 3; m; n\}$; $C = \{3; a; 1; 2\}$.

$$\text{R. } A \neq B; A = C; B \neq C.$$

8. Se dau mulțimile A , B , C , reprezentate ca în fig.I.8, a, b, c. Să se scrie aceste mulțimi. Care din ele sînt egale și care nu sînt ?

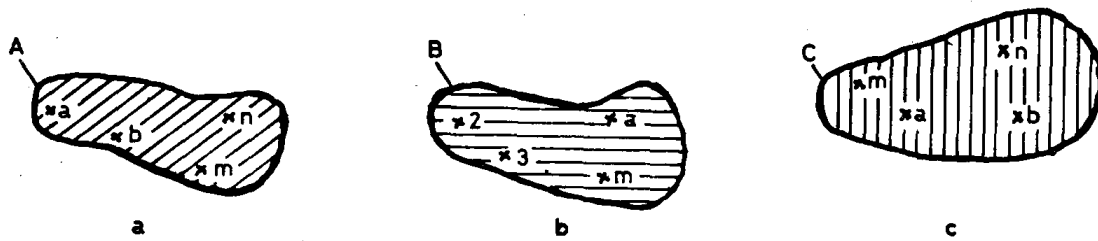


Fig.I.8

9. a) Să se pună în evidență, prin grafic, multimile ale căror elemente sînt literele cuvintelor "rame" și "mare". b) Să se compare aceste mulțimi.

R. b) Mulțimile sînt egale.

10. Să se pună în evidență graficul mulțimilor:

$A = \{x | x \text{ literă a cuvîntului "literă"}\}$, $B = \{x | x \text{ literă a cuvîntului "barieră"}\}$.

Scrieți mulțimea M a elementelor comune ale celor două mulțimi.

R. $M = \{a; e; i; r\}$.

11. Se dau mulțimile A și B reprezentate în fig.I.9.

a) Să se scrie aceste mulțimi.

b) Să se scrie mulțimea C a elementelor comune.

R. a) $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{2; 4; a; b\}$;

b) $C = A \cap B = \{2; 4\}$.

12. Determinați $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 4 \text{ și divizibil cu } 5\}$.

R. $A = \emptyset$.

13. Se dau mulțimile A și B ca în figura I.10, să se pună în evidență relațiile: \subset ; \supset ; \cap a mulțimilor A și B .

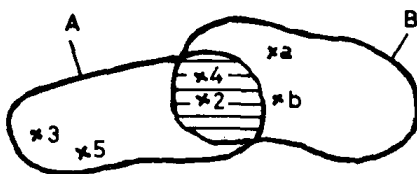


Fig.I.9

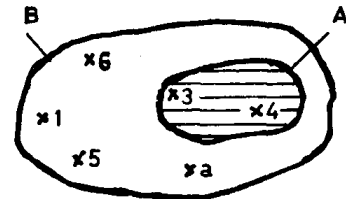


Fig.I.10

14. Se dau mulțimile: $A = \{2; 3; 5; a\}$; $B = \{5; a; 2\}$, să se scrie că B este o submulțime a mulțimii A ; B este inclus în A ; A include pe B .

15. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} | 6 < x < 12\}$, să se formeze mulțimea submulțimilor mulțimii A .

16. Se dă mulțimea: $A = \{0; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$, să se scrie mulțimea $B = \{x \in A | x \text{ divizibil cu } 3\}$.

R. $B = \{0; 3; 6; 12\}$.

17. Să se determine mulțimea E știind că: $\{2, 3\} \subset E$, $\{4, 5\} \subset E$ și $E \subset \{2; 3; 4; 5\}$.

R. $E = \{2; 3; 4; 5\}$.

32. Fie mulțimile reprezentate ca în figura I.14. a) Scrieți o proprietate pe care o îndeplinește mulțimea B . b) Scrieți o proprietate pe care o îndeplinesc elementele mulțimii $C_B A$. c) Determinați $A \cap B$.

R. a) $B \subset A$; b) $C_B A = B - A = \emptyset$; c) $A \cap B = B = \{3; 4; m\}$.

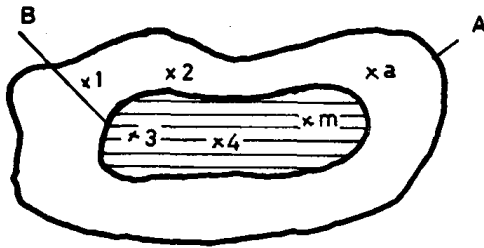


Fig.I.14

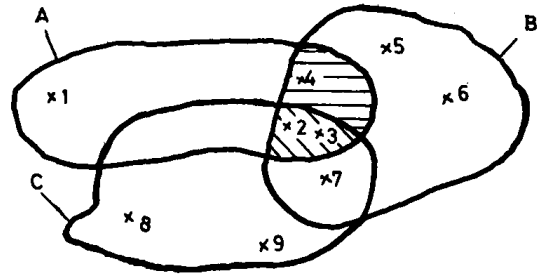


Fig.I.15

33. Fie mulțimile A , B și C reprezentate în figura I.15. Să se scrie mulțimile: $A \cap B$; $B \cap C$; $(A \cap B) \cup C$; $(A \cup B) - (B \cap C)$; $(A \cap B) - (C \cap A)$; $A \cap (B - A)$.

R. $A \cap B = \{2; 3; 4\}$; $B \cap C = \{2; 3; 7\}$; $A \cap (B - A) = \{\emptyset\}$;
 $(A \cap B) \cup C = \{2; 3; 4\} \cup \{2; 3; 7; 8; 9\} = \{2; 3; 4; 7; 8; 9\}$;
 $(A \cap B) - (B \cap C) = \{2; 3; 4\} - \{2; 3; 7\} = \{4\}$;
 $(A \cup B) - (C \cap A) = \{1; 4; 5; 6; 7\}$.

34. Fie mulțimile $A = \{1; 2; 3; a; b\}$; $B = \{1; 2; 3; m; c\}$.

- Să se scrie $A \cup B$ și $A \cap B$.
- Să se reprezinte grafic $A \cup B$ și $A \cap B$.
- Mulțimile A și B sînt egale? Dați exemple de mulțimi egale.

R. a) $\{1; 2; 3; a; b; c; m\}$; $\{1; 2; 3\}$;
 c) $A \neq B$ (nu au aceleași elemente).

35. Se consideră a, b, c, x, y, z cifre și operațiile:

$$\begin{array}{r} a\ 5\ 4\ 3\ + \\ 3\ b\ 5\ 6 \\ 1\ 1\ c\ 1 \\ \hline 7\ 1\ 1\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x\ 3\ 4\ 5\ + \\ 1\ y\ 6\ 2 \\ 5\ 7\ z\ 1 \\ \hline 9\ 5\ 3\ 8 \end{array}$$

Cifrele a, b, c , determinate le considerăm elementele mulțimii A , iar cifrele x, y, z ca elemente ale mulțimii B .

- Să se scrie aceste mulțimi.
- Să se determine mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B$. Să se pună în evidență relațiile de incluziune între aceste mulțimi.

R. a) $A = \{2; 4; 1\}$; $B = \{2; 4; 3\}$;
 b) $\{1; 2; 3; 4\}$; $\{2; 4\}$, $A \subset B$.

36. Se consideră operațiile:

$$\begin{array}{r} 5x2z - \\ 12y3 \\ \hline 4462 \end{array} \quad \begin{array}{r} a24b - \\ 1c25 \\ \hline 1816 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8m2 - \\ 36n \\ \hline 488 \end{array}$$

x, z, y, a, b, c, m, n reprezintă cifre și sînt considerate elementele mulțimilor D, M și P . Ele au fost șterse și menționate cu literele respective după ce s-au efectuat scăderile respective.

a) Să se determine: $(D \cup M) \cap P$ și $(M \cup P) \cap D$.

b) $D \cup M \cup P$ și $(D \cap M) \cup P$.

R. $D = \{7; 6; 5\}; M = \{3; 1; 4\}; P = \{5; 4\};$

a) $(D \cup M) \cap P = \{4; 5\}; (M \cup P) \cap D = \{5\};$

b) $D \cup M \cup P = \{1; 3; 4; 5; 6; 7\}; (D \cap M) \cup P = \{P\}.$

37. a) Să se afle prin altă operație în afară de împărțire care din împărțirile următoare se fac exact. Justificați răspunsul:

$$1440:36; 2836:315; 15120:168; 792:144.$$

b) Factorii primi ai fiecărui împărțitor din împărțirile menționate mai sus sînt considerați elemente ale mulțimilor A, B, C, D .

Să se determine $A \cup B \cup C \cup D; (A \cup B) \cap (C \cup D); (A \cup B \cap C) \cap D$.

R. b) $\{2; 3; 5; 7\}; \{2; 3; 7\}; \{2; 3\}.$

38. a) Fără a efectua împărțirea să se spună ce rest va rămîne la împărțirea numărului 27346 la 5, la 9, la 10, la 25.

b) Aceeași întrebare pentru numărul 591427.

c) Resturile împărțirilor și împărțitorii menționați la a) sînt considerate elemente ale mulțimilor A și B , iar la punctul b) C și D . Să se determine $(A \cup B) \cap (C \cup D); (A \cup D \cap C) \cup B; (A \cup B \cup C \cup D) \cap (A \cup D)$.

R. c) $A = \{1; 4; 6; 21\}; B = \{5; 9; 10; 25\}; C = \{2; 1; 7\}; D = B.$

39. Fie mulțimea $A = \{v; e; v_1; c; u\}$ în care elementele reprezintă vîrstele maxime pe care le poate avea o veveriță (v) ce trăiește cu 3 ani mai puțin decît iepurele (e), o vulpe (v_1) care trăiește de 2 ori mai mult decît iepurele, un cerb (c) care trăiește cu 10 ani mai mult decît vulpea și ursul (u) care trăiește cît cerbul și vulpea împreună; toate pot trăi un număr de x ani, mai mare decît 110 și mai mic decît 120. Să se determine elementele mulțimii A .

R. $A = \{7; 10; 20; 30; 50\}.$

40. Se dau mulțimile ca în schema din fig.I.16. Să se pună în evidență relațiile de: $\cup; \cap; \subset$ ale mulțimilor A, B, C, D .

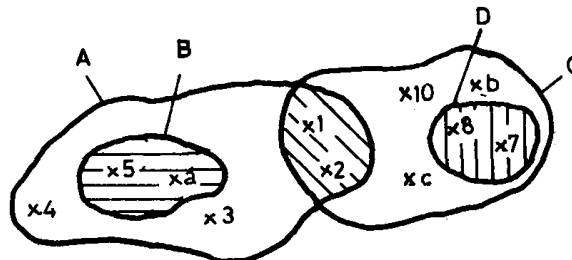


Fig.I.16

41. La un concurs de ciclism s-au prezentat la stadion o mulțime de cicliști în trei etape. Prima oară au sosit cu 5 cicliști mai mulți decît a treia parte din numărul de cicliști ce au venit a doua oară. A treia oară au sosit cu 15

cicliști mai puțini decât cei prezenți prima oară. La ora programată toți cicliștii au pornit în cursă fiecare cu bicicleta lui. La locul startului s-au înapoiat numai 30 de cicliști căci 15 au abandonat cursa pe traseu. Notăm mulțimea totală a cicliștilor cu C , a cicliștilor sosiți la stadion înția oară cu C_1 , a doua oară cu C_2 , și a treia oară cu C_3 . De asemenea B ; B_1 ; B_2 ; B_3 mulțimile bicicletelor respective.

a) Determinați mulțimile C ; C_1 ; C_2 ; C_3 .

b) Stabiliți relațiile de corespondență biunivocă între aceste mulțimi.

42. Se dă mulțimea: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 < x < 84\}$. Să se determine submulțimea $B = \{x \mid x \text{ să fie divizibil prin } 7\}$.

R. $B = \{63; 70; 77\}$.

43. Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ ale cărei elemente adunate la 8 356 să dea un număr divizibil cu 2 și 5. Justificați răspunsul.

R. $A = \{14\}$.

44. Să se determine mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 20 < x < 30\}$ ale cărei elemente scăzute din numărul 85 912 să dea un număr divizibil cu 2 și 5. Justificați răspunsul.

R. $B = \{22\}$.

45. Se dă mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 340 < x < 380\}$. a) Ce număr din A este divizibil cu 2, 5 și 6 ? b) Acest număr reprezintă în metri perimetrul unui teren sportiv, pe care un biciclist l-a parcurs de mai multe ori consecutiv, pînă a parcurs 10km. La terminarea cursei, s-a oprit biciclistul la punctul de plecare sau nu?

R. 360; Nu.

46. Un vînător a afirmat că mulțimea picioarelor de iepuri vînăți de el într-un sezon este numărul ale cărui cifre sînt elementele unei mulțimi A obținută prin reuniunea mulțimilor: $B = \{1; 2; 3\}$ și $C = \{1; 2; 5; 3\}$. Care este ordinea elementelor mulțimii $B \cup C$ (elementele în ordinea scrisă fiind considerate numere $\in \mathbb{N}$) în situația că vînătorul a mințit și în situația că ar fi spus adevărul?

47. Se dau mulțimile: $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{3; 4; 5; 6\}$. a) Să se determine $A \cup B$. b) Să se reprezinte schema prin desen a celor două mulțimi. c) Să se determine $A \cap B$.

R. a) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; c) $\{3; 4\}$.

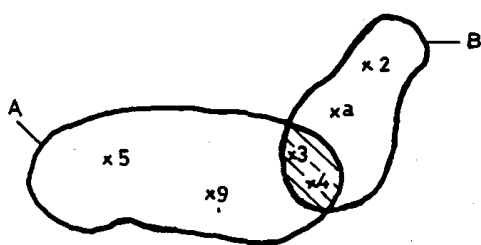


Fig.I.17

48. Fie mulțimile A și B reprezentate ca în figura I.17.

a) Să se scrie elementele care aparțin mulțimii A și mulțimii B .

b) Să se scrie mulțimea $A \cup B$.

49. Se dau mulțimile: $A = \{\square; \circ; \Delta; 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 < x < 16\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20; x \text{ se împarte exact la } 5\}$.

a) Scrieți câte 2 elemente care aparțin

fiecăreia din mulțimile date și câte unul care nu aparține.

b) Să se determine: $B \cup C$; $A \cup C$; $(A \cup B) \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$.

c) Să se reprezinte printr-un desen $B \cup C$ și $B \cap C$.

50. Se dă mulțimea $M = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului mama}\}$.

a) Să se scrie și să se reprezinte prin desen elementele mulțimii.

b) Se dau mulțimile: $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$. Să se scrie $A \cup B$ și $A \cap B$.

c) Să se dea un exemplu de mulțime cu un singur element.

51. Se dau mulțimile A, B, C ca în desenele de mai jos (fig. I.18).

Să se determine: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap C$.

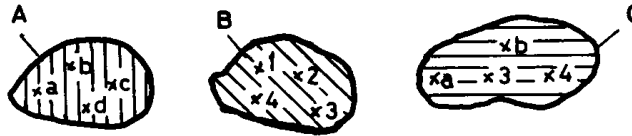


Fig. I.18

52. Să se scrie mulțimile enumerând elementele;

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 50 < x < 65\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 12 \text{ și se împarte exact la } 2\}.$$

53. Se dau mulțimile: $A = \{2,03 \text{ dm}; 0,256 \text{ dam}; 524 \text{ cm}\}$, $B = \{524 \text{ cm}; 0,21 \text{ hm}; 2,03 \text{ dm}\}$. Să se calculeze suma, exprimată în metri a elementelor din $A \cup B$ și $A \cap B$.

54. Suma a patru numere este de 520. Al doilea număr este de două ori mai mare față de primul plus 40. Al treilea număr este jumătate din al doilea număr, iar al patrulea număr este jumătate din al treilea. Să se exprime sub formă de mulțime cele patru numere.

R. $\{100; 240; 120; 60\}$.

55. În trei saci sînt 525 de nuci. În primul sac sînt de două ori și jumătate mai puține nuci ca în al doilea sac, iar în sacul al treilea sînt jumătate din nucile din primul sac împreună cu al doilea. Cîte nuci sînt în fiecare sac ?

R. $\{100; 250; 175\}$.

56. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \mid x \text{ literă a cuvîntului "anina"}\}.$$

$$A_1 = \{x \mid x \text{ literă a cuvîntului "aninare"}\}.$$

$$A_2 = \{x \mid x \text{ literă a cuvîntului "registru"}\}.$$

Să se scrie mulțimile A ; A_1 ; A_2 .

$$R. A = \{a; n; i\} \quad A_1 = \{a; n; i; r; e\}$$

$$A_2 = \{r; e; g; i; s; t; u\}.$$

57. Se dau mulțimile: $A = \{a; 2; 3; 4\}$ $B = \{b; 5\}$.

Să se arate că $A \cup B = B \cup A$ (comutativitate).



Fig. L19

58. Fie mulțimile reprezentate în figura L19.

Să se arate că
 $(A \cup C) \cup B = (A \cup B) \cup C$.

59. Să se găsească mulțimile X cu proprietatea că $\{3; 4\} \cup X = \{3; 4; 5\}$.

R. $X = \{5\}$; sau $\{3; 5\}$ sau $\{4; 5\}$ sau $\{3; 4; 5\}$.

60. Se dă mulțimea $A = \{1\ 354_6; 344_5\}$; $B = \{1\ 754_8; 325_6\}$.

Să se scrie în baza 10, $A \cup B$.

R. $A \cup B = \{358; 99; 1\ 004; 125\}$.

61. Se dau mulțimile: $A = \{1\ 821_{10}; 687_{10}\}$, $B = \{786_{10}; 1\ 859_{10}\}$.

Să se scrie $A \cup B$ astfel: $1\ 821_{10}$ să se treacă în baza 7; 687_{10} să se treacă în baza 8; 786_{10} să se treacă în baza 5 și $1\ 859_{10}$ să se treacă în baza 6.

R. $\{5\ 211_7; 1\ 257_8; 11\ 121_5; 12\ 335_6\}$.

62. Se dau mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ se împarte exact la } 6 \text{ și } x < 40\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ se împarte exact la } 8 \text{ și } 10 < x < 60\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ se împarte exact la } 10 \text{ și } 11 < x < 15\}$.

Să se calculeze: $A \cup B$; $(A \cup B) \cup C$; $B \cup C$; $A \cup (B \cup C)$.

63. Se dau mulțimile: $A = \{a; b; c\}$, $B = \{a; 3; d\}$. Să se determine $A \cap B$; să se facă schema.

64. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x < 11\}$. Se cere $A \cap B$.

65. Să se determine x astfel ca: $\{3; 2\} = \{1; 2; 3\} \cap \{3; x\}$.

66. Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 9\}$ în așa fel încât
 $\{x; 1; 2; 3\} \cap \{4; 2; 3\} = \{2; 3\}$.

R. $\{5; 6; 7; 8\}$.

67. Suma a două numere este 410; cîtu împărțirii numărului mai mare la cel mic este 7, iar restul 10. Să se exprime, sub formă de mulțime, aceste numere.

R. $\{50; 360\}$.

68. Să se determine mulțimea M , știind că

$$\begin{cases} M \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\} \\ M \cap \{1; 2; 3\} = \{1; 2\} \end{cases}$$

R. $M = \{1; 2; 4\}$.

69. Să se găsească mulțimea X știind că $X \subset \{1; 2; 3\}$ și $\{1; 2; 3\} \cap X = \{1; 2\}$.

R. $X = \{1; 2\}$.

70. Se dau mulțimile: $A \cap B = \{2; 3\}$, $A \cap C = \{4; 5\}$. Să se calculeze mulțimea $A \cap (B \cup C)$.

R. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2; 3\} \cup \{4; 5\} = \{2; 3; 4; 5\}$.

71. Se dă mulțimea $A \cup (B \cap C) = \{2; 3; 4\}$; să se calculeze mulțimea $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

R. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{2; 3; 4\}$.

72. Fie mulțimile $A \cup B = \{a; m; n\}$; $A \cup C = \{m; b; c\}$.

Să se determine mulțimea $A \cup (B \cap C)$.

$$R. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a; m; n\} \cap \{m; b; c\} = \{m\}.$$

73. Se dau mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 3; 5\}$.

Să se determine: $A - B$ și $B - A$.

$$R. A - B = \{1; 4\}, B - A = \{5\}.$$

74. Fie mulțimile $A = \{a; 3; 2; b\}$, $B = \{3; 2; 4; b\}$.

Să se scrie: $C = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$; $A - B$ și $B - A$.

$$R. C = \{a\}; A - B = \{a\}; B - A = \{4\}.$$

75. Se dau mulțimile $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Să se afle: a) $\{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$; b) $\{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

$$R. a) \emptyset; b) \{1\}.$$

13. CELE PATRU OPERAȚII CU NUMERE NATURALE ȘI ZECIMALE

1. Unul dintre tunelurile dintre Franța și Italia are 13 636 m, cel dintre Bologna și Florența are cu 4 872 m mai mult, iar cel dintre Elveția și Italia cu 1 315 m, mai mult decât al doilea. Câți metri are acest ultim tunel ?

$$R. 19\ 823\ m.$$

2. O întreprindere agricolă de stat a primit îngrășăminte chimice în trei rânduri: prima dată 30 800 kg, a doua oară cu 6 060 kg mai mult, iar a treia oară cu 125 kg mai mult decât în primele două transporturi. Câte kilograme de îngrășăminte s-au primit a treia oară ?

$$R. 67\ 725\ kg.$$

3. Suprafața pustiurilor Australiei este de 400 000 km², a Asiei cu 1 000 000 km² mai mare decât a Australiei și a Americii la un loc, iar a Africii cu 1 400 000 km² mai mare decât a Americii și Asiei la un loc. Câți kilometri pătrați are suprafața totală a pustiurilor de pe suprafața pământului ?

$$R. 11\ 000\ 000\ km^2.$$

4. Suprafața bazinului fluviului Nipru este de 503 000 km², a Dunării cu 314 000 km² mai mare, iar a Volgăi cu 563 000 km² mai mare decât a Dunării. Care este suprafața bazinului fluviului Volga ?

$$R. 1\ 380\ 000\ km^2.$$

5. Marele nostru poet Mihai Eminescu s-a născut la 15 ianuarie 1850 și a trăit 39 de ani și 5 luni. Când a murit Mihai Eminescu ?

$$R. 15\ iulie\ 1889.$$

6. Poetul italian Dante s-a născut în luna mai 1265 și a trăit 56 de ani și 5 luni. Când a murit Dante ?

$$R. octombrie\ 1321.$$

7. Veverița poate trăi 7 ani, iepurele cu 3 ani mai mult decât veverița, vulpea încă o dată cât iepurele, cerbul cu 10 ani mai mult decât vulpea, iar ursul cât vulpea și cerbul la un loc. Cât poate trăi un urs ?

R. 50 ani.

8. Un grup de excursioniști au mers într-o zi 12 km și 22 m, a doua zi 15 km, 3 hm și 15 m, iar a treia zi 20 km, 4 dam și 10 m. Care este lungimea drumului parcurs în toate cele trei zile?

R. 47 km, 3 hm, 8 dam.

9. Un mobil a parcurs pe un cerc următoarele arce: mai întâi $36^{\circ}12'36''$, apoi $125^{\circ}10'45''$ și în cele din urmă $198^{\circ}36'39''$. Ce drum a parcurs în total acest mobil ?

R. 360° .

10. Un scafandru a stat sub apă la prima cursă 3 h, 15 m, 25 s, la a doua cursă 49 m, 30 s și la a treia cursă 2 h, 48 m, 46 s. Cât timp a stat în apă scafandru în cele trei curse?

R. 6 h, 53 m și 41 s.

11. Lungimea Argeșului este de 275 km, Siretul este cu 195 km mai lung iar Oltul are cu 55 hm mai mult decât Siretul. Să se afle lungimea Oltului.

R. 525 km.

12. În anul 1508 meșterul Macarie a tipărit la Tîrgoviște prima carte românească. Câți ani au trecut de la apariția primei cărți românești pînă în anul 1976 ?

R. 468 ani.

13. Distanța de la București la Cîmpina este de 92 km, iar de la București la Ploiești sînt cu 33 km mai puțin. Câți kilometri sînt de la Ploiești la București ?

R. 59 km.

14. Vîrfurile Negoiu are 2 535 m, Ceahlăul cu 624 m mai puțin și Rarăul cu 258 m mai puțin decât Ceahlăul? Care este înălțimea Rarăului ?

R. 1 653 m.

15. Distanța de la Soare la Pămînt este de 150 000 000 km, iar distanța de la Pămînt la Lună este de 380 000 km. Cu câți kilometri este mai mică distanța de la Pămînt la Lună decât cea de la Pămînt la Soare ?

R. 149 620 000 km.

16. Cum s-a reușit să se măsoare 4 l de vin cu ajutorul a trei vase, unul de 3 l, altul de 5 l și un vas mai mare ?

R. Se umple vasul cu 5 l. Din el se trec 3 l în vasul de 3 l și din acesta în vasul cel mare.

După această operațiune, vasul cel mic este gol, cel de 5 l mai are 2 l și vasul cel mare are 3 l. Apoi din vasul de 5 l se trec cei 2 l în vasul de 3 l ; se umple din nou vasul de 5 l, din aceștia 1 l se trece în vasul de 3 l ca să se umple și, rămîn 4 l, în vasul de 5 l.

17. Aria suprafeței bazinului fluviului Congo este de $3\,822\,000\text{ km}^2$, a Nilului cu $922\,000\text{ km}^2$ mai mică, iar a fluviului Niger cu $808\,000\text{ km}^2$ mai mică decât a Nilului. Care este aria suprafeței bazinului Niger ?

R. $2\,092\,000\text{ km}^2$.

18. Să se găsească un număr de două cifre a căror sumă este egală cu 13. Dacă se permută cifrele, numărul se micșorează cu 45.

R. 94.

19. Înălțimea muntelui vulcanic Kliucev este de 4 850 m, Erebus are cu 827 m mai puțin, iar Etna are cu 760 m mai puțin decât Erebus. Câți metri are muntele vulcanic Etna ?

R. 3 263 m.

20. La 10 martie 1837 s-a născut marele povestitor Ion Creangă și a murit la 31 martie 1889. Câți ani, luni și zile a trăit Ion Creangă ?

21. La 2 aprilie 1805 s-a născut marele povestitor danez Anderssen. Cât timp a trecut de la nașterea lui Anderssen până azi?

22. Suma celor două laturi mai lungi ale unei grădini în formă de dreptunghi este de 382 m. Lățimea este cu 86 m mai mică decât lungimea. Să se afle lățimea acestei grădini ?

23. La 15 noiembrie 1976 s-au împlinit 98 de ani de la nașterea marelui nostru biolog Emil Racoviță, iar după 4 zile s-au împlinit 28 ani de la moartea lui. Să se afle anul nașterii și al morții lui Racoviță. Câți ani a trăit Racoviță ?

R. 1878; 1948; 70 ani.

24. Vrabia se poate ridica în zbor până la înălțimea de 5 000 m, vulturul atinge o înălțime cu 2 000 m mai mică decât a vrăbiei, iar cioara cu 200 m mai puțin decât vulturul. Până la ce înălțime poate zbura cioara ?

R. 2 800 m.

25. După ultimele cercetări, în subsolul pustiei Sahara se găsesc: 1 000 000 000 t de cărbuni, cu 500 000 000 t mai puțin cupru decât cărbune, cu 100 000 000 t mai puțin petrol decât cupru și cu 150 milioane tone mai puțin fier decât petrol. Câte tone de cupru, fier și petrol se găsesc în subsolul Saharei ?

R. 500 000 000 t; 400 000 000 t; 250 000 000 t.

26. Un tată a avut 28 ani la nașterea fiului său.

a) Câți ani va avea fiul când tatăl va avea 50 ani ?

b) Câți ani va avea tatăl când fiul va avea 48 ani ?

R. a) 22 ani; b) 76 ani.

27. Eugenia, Dinu și Sandu au strâns nuci. Câte nuci a strâns fiecare dintre ei dacă adunând nucile Eugeniei și ale lui Dinu, obținem 30, pe ale lui Dinu cu ale lui Sandu 38, iar ale Eugeniei cu ale lui Sandu 32 ?

R. 12; 18; 20 nuci.

28. Viorel îi zice Mariei: dă-mi 6 alune de la tine, ca să am și eu câte ai tu. Maria răspunde: dă-mi tu 6 alune, ca să am de două ori câte ai tu. Câte alune are fiecare din cei doi copii ?

R. 12 alune; 18 alune.

29. 50 sticle de vin alb și 156 sticle de vin roșu costă 4 608 lei. O sticlă de vin alb costă cât două sticle de vin roșu. Cât costă o sticlă de vin alb și cât costă o sticlă de vin roșu?

R. 18; 36.

30. Roata unei trăsură are lungimea cercului egală cu 240 m și face pe un drum 26 800 învîrtituri. Care este lungimea drumului parcurs ?

R. 64 320 m.

31. a) Suma a două numere este 319, cîtul lor 23, restul împărțirii 7. Să se găsească cele două numere. b) Să se găsească două numere a căror sumă este egală cu 6 612 și cîtul împărțirii 75.

R. a) 306; 13; b) 87; 6 525.

32. Leul poate mînca o oaie în 2 ore, lupul în 3 ore, cîinele în 6 ore. În cît timp ar mînca o oaie împreună ?

R: în 6 ore 6 oi sau o oaie într-o oră.

33. Restul unei împărțiri este 97, cîtul 665. Împărțitorul întrece cu 91 suma dintre rest și cît. Să se găsească deîmpărțitul.

R. 567 342; 853.

34. Trei muncitori au primit pentru o lucrare 3 310 lei. Primul muncitor a lucrat 10 zile, cîte 11 ore pe zi, al doilea 12 zile cîte 10 ore pe zi și al treilea 10 zile cîte 9 ore pe zi. Primul muncitor fiind mai calificat, primește cu 10% mai mult pe oră decît fiecare dintre ceilalți doi. Cît a încasat fiecare muncitor ?

R. 1 210; 1 200; 900 lei.

35. Elefantul poate trăi 200 ani ursul a patra parte din cît poate trăi elefantul, iepurele a cincea parte din cît poate trăi ursul, iar vulpea de două ori mai mult decît iepurele. Cît poate trăi vulpea ?

R. 20 ani.

36. De pe un teren în formă de dreptunghi, cu dimensiunile 160 m și 75 cm s-au strîns 21 t de nutreț verde. Cîte chintale de nutreț verde s-au produs la un hectar ?

R. 175 q.

37. Un dreptunghi are dimensiunile de 18 m și 8 m. Un alt dreptunghi, care are aria egală cu primul, are lungimea de 4 ori mai mare decît lățimea. Care sînt dimensiunile celui de-al doilea dreptunghi ?

R. 6 m; 24 m.

38. O vie de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 1 000 m și 300 m, se stropășește cu sulfat de cupru pentru a stîrpi dăunătorii. Ce cantitate de sulfat de cupru este necesară, dacă la 1 ha se folosesc 175 kg ?

R. 5 250 kg.

39. Un teren în formă de dreptunghi are lungimea de 200 m, iar lățimea cu 104 m mai mică decît lungimea. 5 țărani prășesc acest teren în 3 zile. Să se afle cîți țărani vor prăși în 5 zile un teren de 3 ori mai mare ?

R. 9 țărani.

40. Într-o familie compusă din părinți și 4 copii, părinții consumă zilnic cîte 300 g de pîine și copii cîte 350 g de pîine. Ce rezervă de grîu trebuie să-si facă această familie pentru 325 de zile, dacă din 100 kg de grîu ies 130 kg de pîine?

R. 500 kg.

41. Un teren mlăștinos avea forma de dreptunghi cu lungimea de 650 m și lățimea cu 250 m mai mică decît lungimea. Cîți hectolitri de apă de var s-au folosit pentru îmbunătățirea lui, dacă pentru un hectar s-au consumat 55 hl ?

R. 1 430 hl.

42. La curățirea Dunării în fața portului Giurgiu au lucrat draga nr. 1 timp de 20 ore și draga nr. 2 cu 4 ore mai puțin scoțînd amîndouă 21 816 m³ de pămînt. Cîți metri cubi de pămînt a scos fiecare dragă, dacă au scos aceeași cantitate pe oră ?

R. 12 120 m³; 9 696 m³.

43. Un elev care a participat la o tragere la țintă a încercat 63 de lovituri. Pentru fiecare lovitură care atinge ținta a câștigat 4 puncte și pentru fiecare lovitură nereușită a pierdut 5 puncte. În total, el a obținut 144 puncte. De câte ori a nimerit ținta?

R. 53 lovituri.

44. Trei elevi au participat la o întrecere sportivă și au tras la țintă de câte 36 ori fiecare. Pentru fiecare atingere a țintei s-au obținut 5 puncte și pentru fiecare lovitură nereușită s-au pierdut 4 puncte. Rezultatul final a fost următorul: primul elev 108 puncte câștigate; al doilea elev 0 puncte câștigate; al treilea elev 0 puncte pierdute. Câte lovituri reușite a avut fiecare elev ?

R. 28; 16; 15 lovituri.

45. Un biciclist și-a propus să parcurgă 304 km cu viteza de 8 km la oră. După ce a mers o parte din drum s-a oprit 5 ore să se odihnească și, pornind din nou cu viteza dublată, a reușit să ajungă la destinație în același timp pe care și l-a propus la început. La ce distanță de punctul de sosire s-a oprit să se odihnească ?

R. 80 km.

46. O livadă dreptunghiulară este îngrădită cu un gard lung de 210 m; lățimea livezii este de două ori mai mică decât lungimea. Această livadă trebuie împărțită în două părți astfel încât una să fie cu 450 m.p. mai mare decât cealaltă. Care va fi aria fiecărei parcele ?

R. 1 450 m.p.; 1 000 m.p.

47. O livadă dreptunghiulară este împrejmuită cu un gard de 214 m. Lățimea este cu 7 m mai mare decât a treia parte din lungime. Această livadă se împarte în trei părți: două egale și una mai mare decât celelalte două la un loc cu 600 m.p. Care este aria fiecărei parcele ?

R. 450 m.p.; 450 m.p.; 1 500 m.p.

48. Un vas este plin cu apă, dacă se scoate a patra parte din apă, el cântărește 2 050 g iar dacă se scoate o jumătate din cantitatea de apă, vasul cu apă cântărește 1 450 g. Care este masa apei și a vasului ?

R. 2 400 g.; 250 g.

49. Țăranii iobagi din Transilvania, nemaiputând îndura greutatea birurilor și a suferințelor, au căutat să-și facă singuri dreptate prin două răscoale: dacă adunăm anii în care au avut loc cele două răscoale, obținem 2 951. A doua răscoală a avut loc peste 77 de ani de la prima. Aflați în ce ani au avut loc cele două răscoale ?

R. 1437; 1514.

50. Un acoperiș format din două dreptunghiuri cu dimensiunile de 8 m și 4 m trebuie acoperit cu țiglă. Pe un metru pătrat sînt necesare 15 țigle. O țiglă cântărește 2 hg. Țiglele sînt transportate de la fabrică cu o căruță care goală cântărește 310 kg, iar plină cântărește 790 kg. Cîte drumuri va face căruța ?

R. 4 drumuri.

51. În două bidoane se află lapte: în primul de două ori mai mult decât în al doilea. Cînd din primul s-au scos 30 l iar din al doilea 20 l, în primul a rămas lapte de 3 ori mai mult decât în al doilea. Cît lapte era în fiecare bidon la început ?

R. 60 l; 30 l.

52. La fabrica de zahăr din Giurgiu au adus sfeclă de zahăr trei asociații de țărani: prima a adus 860 chintale, a doua de două ori mai mult și a treia jumătate din ceea ce au adus primele două. Câte tone de sfeclă s-au adus în total ?

R. 387 tone.

53. Pentru 26 m de șifon și 19 m de stambă s-au plătit 2 130 lei. Altă dată, prețurile fiind aceleași s-au plătit tot 2 130 de lei pentru 20 m șifon și 29 m de stambă. Cât costă 1 m de șifon și cât costă 1 m de stambă ?

R. 60 lei; 30 lei.

54. Suma vîrstelor lui Leonardo da Vinci, Galilei și Newton este de 229 ani. Dacă Leonardo da Vinci ar mai fi trăit 14 ani, vîrsta sa ar fi fost jumătate din suma vîrstelor lui Galilei și Newton, dar el a murit la un an după ce a atins de 11 ori diferența dintre vîrstele lui Newton și Galilei. Cît a trăit fiecare dintre ei ?

R. 67 ani; 78 ani; 84 ani.

55. O platformă de beton armat are 36 m.c. La fiecare m.c. de beton armat, s-au folosit 6 saci de cîte 50 kg de ciment și 110 kg de oțel. Cît costă materialul platformei, dacă 1 kg de ciment costă 1 leu, iar 1 kg de fier 18 lei ?

R. 82 080 lei.

56. a) Diferența a două numere este 100. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic obținem cîtul 6 și restul 5. Care sînt cele două numere ? b) Diferența dintre două numere este 202. Împărțind pe cel mai mare la cel mai mic obținem cîtul 12 și restul 15. Care sînt cele două numere ? c) Să se găsească 2 numere, știind că diferența lor este 3 și dacă mărim fiecare număr cu 5 produsul se mărește cu 270.

R. a) 19; 119; b) 17; 32; c) 23; 26.

57. Un vapor de 23 000 t pleacă la vînațoare de balene. Echipamentul și materialele necesare ocupa 4 800 m.c., iar echipajul a șasea parte din echipament și materiale. Ce volum poate ocupa vînatul, dacă 1 t are capacitatea de 283 m.c. ?

R. 909 m.c.

58. Pe un cîmp pătrat cu latura de 360 m s-a pus îngrășămînt natural. Aceeași cantitate de îngrășămînt s-a folosit pentru un loc dreptunghiular cu lungimea de 540 m. Care e lățimea locului, dacă s-a pus aceeași cantitate de îngrășămînt la hectar ?

R. 240 m.

59. Patru muncitori au primit pentru lucrarea efectuată suma de 1 945 lei. Ce sumă se cuvine fiecăruia, dacă primul a lucrat 10 zile, al doilea 8 zile, al treilea 15 zile, al patrulea 12 zile și dacă pe zi trebuie să primească al doilea cu 5 lei mai mult ca primul, al treilea cu 7 lei mai puțin ca al doilea iar al patrulea cu 5 lei mai puțin decît al doilea ?

R. 430 lei; 384 lei; 615 lei; 516 lei.

60. Pentru a cosi un teren dreptunghiular lung de 250 m și lat de 1,2 hm, 5 muncitori au lucrat 3 zile cîte 10 ore pe zi. În cîte zile va cosi această echipă un teren în formă de pătrat a cărui latură este egală cu 0,8 din lungimea terenului dreptunghiular și ținînd cont că, de data aceasta, muncitorii lucrează numai 8 ore pe zi ?

R. 5 zile.

61. Platforma unui autocamion are formă de dreptunghi cu dimensiunile de 2,10 m și

3,25 m. In camion se așază piese cubice cu latura de 65 cm pînă la înălțimea de 2,6 m. a) Cîte piese sînt în acest camion ? b) Ce masă are încărcătura, dacă fiecare piesă cîntărește 75 kg ?

R. a) 60 piese; b) 4,5 tone.

62. Două roți sînt legate printr-o curea de transmisie. Circumferința unei roți este de 0,98 m, iar a celeilalte de 1,75m. Să se determine cîte învîrtituri pe minut va face a doua roată, dacă prima face 75 învîrtituri pe minut ?

R. 42 învîrtituri.

63. Două roți sînt legate printr-o curea de transmisie. Circumferința unei roți este de 0,65 m. Să se determine lungimea circumferinței roții a doua, dacă prima face 154 de învîrtituri, iar a doua 110 învîrtituri pe minut ?

R. 31 m.

64. Pentru a încălzi o cameră cu dimensiunile de 6,5 m, 5,20 m și 3,18 m, s-au consumat într-o iarnă 4,25 steri de lemne. Cîți steri de lemne sînt necesari pentru a încălzi 2 camere cu dimensiunile de 7,20 m, 6,75 m și 3,18 m. ?

R. 4,25 steri.

65. O roată face, pe o distanță, 50 învîrtituri, iar altă roată 40 învîrtituri. Să se afle această distanță, știind că lungimea circumferinței uneia din roți este cu 4,4 dm mai mare decît a celeilalte ?

R. 880 dm.

I.4. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun a mai multor numere

66. a) Să se afle mulțimea divizorilor comuni ai numerelor: 210 și 240; 120 și 135; 54, 90 și 126. b) Numerele 3 625; 4 523; 7 440 împărțite la același număr dau resturile 25, 23 și 240. Să se afle numărul la care au fost împărțite.

R. 900; 60; 72.

67. Vrem să construim o ladă în formă de cub în care să putem așeza cutii cu dimensiunile de 36 cm, 24 cm și 18 cm. Cît de mare trebuie să fie latura cubului pentru a așeza un număr întreg de cutii ?

R. 72 cm.

68. Un biciclist a parcurs un drum în trei zile: în prima zi 72 km; în a doua zi 108 km și în a treia zi 120 km. Cîte ore a mers în total, dacă ar fi avut aceeași viteză egală cu cea maximă în toate cele trei zile ?

R. 2,5 ore.

69. In fiecare dimineață de vară, la ora 5, din orașul Constanța pleacă pe litoral patru autobuze ale căror curse dus și întors împreună cu opririle durează: pentru primul, trei sferturi de oră; pentru al doilea, o jumătate de oră; pentru al treilea, 36 de minute și, pentru al patrulea, o oră. La ce oră pleacă din nou toate o dată din Constanța? Cîte curse a făcut fiecare autobuz pînă, la această oră?

R. 8; 4; 6; 5; 3.

70. Dacă dintr-un număr de 3 cifre scădem 7, rezultatul este divizibil cu 7; dacă scădem din același număr 8, rezultatul este divizibil cu 8 și dacă scădem 9 rezultatul este divizibil cu 9. Care este numărul ?

R. 504.

71. Întrebată câte mere are într-un coș, o femeie a răspuns: nu știu câte am, dar pot să vă spun că dacă le număr câte 2, câte 3, câte 4, câte 5, câte 6, îmi rămâne câte un măr în coș, dar dacă le număr câte 7 nu-mi rămâne nici un măr. Câte mere avea în coș ?

Verificați prin exemple numerice proprietățile din problemele 72 – 76.

72. Două numere impare consecutive sînt totdeauna prime între ele.

73. Dacă două numere sînt prime între ele, atunci suma și diferența lor sînt prime cu produsul lor.

74. Produsul a trei numere consecutive este totdeauna divizibil cu 6. Explicație.

75. Produsul a patru numere consecutive este totdeauna divizibil cu 24.

76. Orice număr par mai mare decît 2 poate fi scris sub formă de sumă a două numere prime.

77. a) Să se afle numerele naturale x, y astfel ca $3x5y$ să fie divizibil cu 5 și 9.

b) $7x3y$ să fie divizibil cu 3 și 5.

c) $3x7y5$ să fie divizibil cu 3 și 25.

78. Împărțind numerele $a = 427$ și $b = 519$ prin același număr d se obțin resturile 7 și 3. Să se determine numărul d .

R. 3.

L5. OPERAȚII CU FRAȚII ORDINARE ȘI ZECIMALE

Rezolvarea unui exercițiu de aritmetică se poate face în ansamblu sau pe părți.

Forma de rezolvare în ansamblu este mai elegantă: ea însă cere din partea rezolvitorului o bună tehnică de calcul, multă atenție și o privire de ansamblu perfect formată asupra întregului exercițiu în timpul rezolvării lui.

Să se calculeze expresia:

$$R. E = 1 \frac{9}{20} - \frac{\left(0,645:0,3 - 1 \frac{107}{180}\right) \cdot \left(4:6,25 - 1:5 + \frac{1}{7} \cdot 1 \frac{24}{25}\right)}{1 - 2 \frac{1}{5}:7}$$

$$R. 1 \frac{9}{20} - \frac{\left(2 \frac{3}{20} - 1 \frac{107}{180}\right) \cdot \left(1 \frac{4}{25} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \cdot 1 \frac{24}{25}\right)}{1 - \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{7}} = 1 \frac{9}{20} - \frac{\left(1 \frac{207}{180} - 1 \frac{107}{180}\right) \cdot \left(\frac{16}{25} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{25}\right)}{1 - \frac{11}{35}} = 1 \frac{9}{20} - \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{18}{25}}{\frac{24}{35}} = \frac{13}{15}$$

Să se efectueze operațiile :

$$2. \left[\left(3\frac{2}{3} + 1\frac{7}{10} \right) : 8\frac{1}{20} - \left(2\frac{7}{23} - 1\frac{45}{46} \right) \cdot \frac{23}{45} \right] + \frac{1}{2} + 1. \quad \mathbf{R. 2}$$

$$3. \left[\left(\frac{2}{3} \right)^4 + \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \right] \cdot \frac{9}{2 \cdot 437} : \frac{1}{24^2}. \quad \mathbf{R. 1.}$$

$$4. \left[\left(1\frac{1}{5} \right)^2 - \left(\frac{7}{10} \right)^2 + \left(1\frac{1}{5} - \frac{7}{10} \right)^2 \right] \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^3}{5 \cdot 2^3 \cdot 3^2}. \quad \mathbf{R. 15.}$$

$$5. \left(2\frac{1}{2} \right)^3 - \left(1\frac{1}{4} \right)^3 + \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} \right)^3 - 0,625. \quad \mathbf{R. 15.}$$

$$6. 3\frac{1}{2} + \left\{ \frac{1}{3} - \left[7\frac{16}{142} - \left(12\frac{80}{213} - 5\frac{135}{426} \right) \right] \right\} \cdot 12\frac{9}{17}. \quad \mathbf{R. 7.}$$

$$7. \left\{ \left[\left(2\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{4}{7} \right] \cdot \left[\left(40 - 38\frac{4}{5} \right) \cdot \frac{1}{5} \right] \right\} \cdot \left[\left(2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} \right) : \left(1\frac{1}{2} : 6\frac{1}{4} \right) \right] - \frac{7}{18} \quad \mathbf{R. 1.}$$

$$8. 70\frac{3}{4} : \left\{ 30\frac{1}{2} - \left[\frac{\left(8\frac{5}{8} - 6\frac{1}{4} \right) : 1\frac{1}{5}}{2\frac{2}{5} : \frac{4}{5} - 2\frac{2}{3}} + \frac{67\frac{1}{2} : 2\frac{1}{7}}{4\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}} \right] \right\}. \quad \mathbf{R. 12}$$

$$9. \frac{1}{\left(1 : \frac{2}{3} - 1 : 2\frac{3}{5} \right) : 2\frac{3}{13}} + \frac{(0,2)^3 - \frac{1}{125} + (0,1)^2}{(0,3)^3 + 0,973} \cdot 10^2. \quad \mathbf{R. 3.}$$

$$10. \frac{\left(2\frac{1}{2} - 1 \right) : 6 + \left(3\frac{3}{4} - 1 \right) : 11 + \left(2\frac{7}{9} - 1 \right) : 7\frac{1}{9}}{\frac{1}{2\frac{2}{3}} + \frac{1}{1\frac{1}{7}} - \frac{1}{\frac{8}{9}}}. \quad \mathbf{R. 6.}$$

$$11. \frac{2\frac{3}{5} - 1\frac{3}{10}}{2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4}} + \frac{1}{3\frac{3}{7} + \frac{1}{7}} + \frac{2\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{13}}{3\frac{51}{85} + 2\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{11} + \frac{24}{85}} - 2. \quad \mathbf{R. 0.}$$

$$12. \frac{49}{50} + \left[\left(3\frac{2}{5} - \frac{10 - \frac{1}{4}}{3} \right) : 1\frac{3}{5} - \frac{1\frac{1}{7} + \frac{1}{2}}{11\frac{65}{77} + \frac{2}{33}} \right] : 1\frac{2}{3} : 15\frac{1}{2} . \quad \text{R. 1.}$$

$$13. \frac{\left(37\frac{2}{5} - 18\frac{6}{7} \right) \cdot 11\frac{2}{3} - \left(2\frac{3}{20} - \frac{11}{30} \right) \cdot \frac{6}{7}}{13\frac{4}{9} - 11\frac{11}{18} - \left(1\frac{3}{100} - \frac{17}{20} \right) : 6\frac{3}{10}} : 21\frac{1}{2} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^4 \cdot 15}{5^6 \cdot 3^3} . \quad \text{R. 3/5.}$$

$$14. \frac{1}{15} + \frac{\left(8 - 3\frac{1}{4} \right) : 6\frac{1}{3} + 9\frac{1}{4}}{\left(12\frac{2}{9} + \frac{5}{6} + 7\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{27}{185}} + \frac{\left(20 - 31\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{7} \right) : 2\frac{1}{5}}{\left(6 + 1 : \frac{3}{10} \right) \cdot \frac{15}{28}} . \quad \text{R. 4.}$$

$$15. \frac{4}{5} + \frac{30 \cdot 4\frac{1}{4} - 11\frac{1}{5} : 9\frac{1}{3}}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} \cdot 14\frac{2}{7}} : \frac{1 : 6 + 12 : 5}{2\frac{1}{2} \cdot 15 - 4\frac{13}{15} \cdot 7\frac{3}{5}} . \quad \text{R. 1.}$$

$$16. 1\frac{1}{8} : \left[\frac{2\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot 1\frac{5}{6}}{\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{3} + \frac{13}{36}} - \frac{1}{2\frac{1}{2}} \right] : \frac{1}{1\frac{1}{2}} . \quad \text{R. } \frac{5}{4} .$$

$$17. \frac{\frac{5}{21} \cdot \frac{3}{5} + \frac{15}{28} : \frac{5}{84}}{10 + 5 : \frac{1}{2}} + \frac{2 : \frac{1}{2} + 3 : \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} : 2 + \frac{1}{3} : 3} : 36 - 1\frac{16}{35} . \quad \text{R. 0.}$$

$$18. \frac{\left(\frac{31}{63} + 5\frac{1}{84} \right) - \left(3\frac{5}{21} + 2\frac{31}{252} \right) \cdot 24 : 1\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{8}}{\left(1\frac{15}{26} + \frac{1}{39} - \frac{7}{156} \right) \cdot 1\frac{4}{9}} - \frac{4}{9} . \quad \text{R. 4.}$$

$$19. 3,3(3) + \frac{(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^4) : (3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^5) - \frac{3}{4} + 2, (3) + \frac{22}{33}}{(489 \cdot 7 + 311 \cdot 7 - 777 \cdot 7 - 23 \cdot 7) + 2} . \quad \text{R. } 6\frac{1}{3} .$$

Să se efectueze operațiile:

$$20. \left[\frac{13 : 3\frac{3}{4} - \left(10\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{14} - \frac{29}{30}}{0,001 : \frac{1}{20} + 0,08} + 2,625 + \frac{3}{8} \right] : \frac{2^3 \cdot 2^4}{0,5} . \quad \text{R. 13.}$$

$$21. \frac{2\frac{3}{4} \cdot \frac{\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{15} + \frac{2}{9}\right) \cdot 10\frac{1}{2} - 1\frac{1}{11} \left(2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}\right) 7}{1: \left[2\left(0,002: \frac{1}{50}\right) + \frac{1}{10}\right]} + \frac{9}{4}}{.} \quad \text{R. 5.}$$

$$22. \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{15}{16} \cdot \frac{14}{39} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{13}{21}} \cdot \left(2\frac{1}{8} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 2\frac{15}{17} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot 196\right) + 2,1(3) - \frac{2}{15} \quad \text{R. 7.}$$

$$23. \frac{1\frac{3}{5} \cdot \frac{\left(1: \frac{1}{40}\right) : (1:0,05) : (1:0,04) + 0,02}{(0,01+0,09+0,01): \frac{1}{50}} \cdot \frac{5}{8}}{.} \quad \text{R. 1.}$$

$$24. \frac{\left[5\frac{1}{84} + \frac{31}{63} - \left(2\frac{31}{252} + 3\frac{5}{21}\right)\right] \left[24\left(1\frac{1}{2} : 4\frac{3}{8}\right)\right]}{\left(1\frac{15}{26} + \frac{1}{39} - \frac{7}{156}\right) \cdot \left(20\frac{1}{4} : 26\right)} \quad \text{R. 5.}$$

$$25. \frac{\left(\frac{2}{15} + 1\frac{7}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - \left(2:2\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{9}{32}}{0,014+0,086} : 2,5 \quad \text{R. 1.}$$

$$26. \frac{\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{45} + \frac{2}{9}\right) \cdot 10\frac{1}{3} - \frac{12}{11} \left(2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{28} - 1} \quad \text{R. 14.}$$

$$27. \frac{(1,09-0,29) \cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18,9-16\frac{13}{20}\right) \frac{8}{9}} + \frac{(11,81+8,19) \cdot 0,02}{9:11,25} \quad \text{R. 1.}$$

$$28. \frac{\left(4,07: \frac{1}{20} - 23,01 \cdot 0,06\right) : 4 + 0,0703 \cdot \frac{1}{2}}{\left(7,3745:3,01 - 1\frac{1}{4}\right) \cdot 1,02 + 0,78} \quad \text{R. 10.}$$

$$29. \frac{\left(4\frac{11}{30} + \frac{17}{60} + \frac{7}{80} + 3\frac{5}{8}\right) \cdot \frac{50}{223} \cdot \left(4\frac{3}{5} - 2\frac{7}{8}\right) \cdot \frac{23}{25}}{(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3)(5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^2) : (2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^6) + \frac{2}{5}} \quad \text{R. 1.}$$

$$30. \frac{0,(04):0,(40)}{7+3\left\{2\frac{5}{9}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right\}\cdot\frac{3}{13}} - \frac{120-20:4+5-114-6}{2\ 364^2\cdot 3\ 042\left\{\frac{29}{34}\right\}^3} . \quad \text{R. } \frac{1}{90} .$$

$$31. \frac{\left(\frac{2}{9}+\frac{14}{45}+\frac{7}{15}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{28}-1} + 2,62(3)-1\frac{187}{300} . \quad \text{R. } 15 .$$

$$32. \frac{\left(8,25-\frac{3}{8}\right)\cdot 3,5+3,125-3\ 0,1(6)}{(5-4,4):0,1-4-1,375\cdot\frac{2,5}{3\frac{1}{8}}+\frac{23}{32}} . \quad \text{R. } 4\frac{7}{8} .$$

Să se verifice egalitățile :

$$33. \left(4\frac{1}{10}-3\frac{4}{15}\right)\cdot 1\frac{1}{5} = \frac{4\frac{1}{10}}{1\frac{1}{5}} - \frac{3\frac{4}{15}}{1\frac{1}{5}} .$$

$$34. \frac{\left(2\frac{1}{2}\right)^3 - \left(1\frac{1}{3}\right)^3}{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}} = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3} + \left(1\frac{1}{3}\right)^2 .$$

$$35. \left(3\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left[\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) .$$

Să se găsească x din egalitățile următoare:

$$36. 12\frac{1}{3}:\left\{\left[2\frac{3}{4}\left(3\frac{1}{3}-1\frac{7}{8}x\right)\right]\cdot\frac{8}{11}+1\frac{2}{3}\right\}=5 . \quad \text{R. } x = \frac{4}{9} .$$

$$37. \left[10\frac{17}{40}-\left(12\frac{1}{2}-x\right)+6\frac{47}{60}\right]:22\frac{11}{36}-\frac{15}{22} . \quad \text{R. } x = 10\frac{1}{2} .$$

$$38. \left\{\left[4\frac{3}{5}-\frac{6\frac{1}{14}}{13\frac{1}{3}\left(5\frac{1}{3}-x\right)-3\frac{4}{7}}\right]\cdot\frac{9}{14}+1\frac{1}{3}\right\}:4\frac{1}{4}=\frac{2}{3} . \quad \text{R. } x = 3\frac{1}{3} .$$

$$39. 1,1(3)x - \frac{(2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^8) : (3^4 \cdot 2^4 \cdot 5^9)}{\frac{3}{10}} = x + 1 . \quad \mathbf{R. x=15.}$$

$$40. \left[\frac{x+1}{0,75} + \frac{8(x+2)}{3} \right] \cdot \frac{3}{4} = x + 7 \quad \mathbf{R. x=1.}$$

$$41. \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^3}}{2\sqrt{6}} x = \frac{3}{5} . \quad \mathbf{R. x=5.}$$

$$42. \frac{\frac{3}{4}}{x} + \frac{4}{\frac{2}{3}} = \frac{25}{4} . \quad \mathbf{R. x=3.}$$

$$43. \frac{\frac{x-5}{2}}{\frac{x+8}{2}} + \frac{x-8}{2} = 2,1 . \quad \mathbf{R. x=12.}$$

$$44. \frac{5 : \left(3 - \frac{1}{x} \right)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} - \frac{1}{3} . \quad \mathbf{R. x=2.}$$

$$45. 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3}-x} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} - \frac{4}{9} \right) = \frac{2}{5} . \quad \mathbf{R. x = \frac{1}{3} .}$$

$$46. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 1 \right) + 2 \right] - 1 \right\} + 1 = 1 . \quad \mathbf{R. x=2.}$$

L6. ECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

Să se rezolve ecuațiile:

$$1. 2(x+3) - 3(x+4) = 4(x+5) - 6. \quad \mathbf{R. x=-4.}$$

$$2. (x+5)^2 + (x+6) - (x-6) = (x+5)^2 + x. \quad \mathbf{R. x=12.}$$

$$3. \quad \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5} + 6 = \frac{x+7}{2} . \quad \mathbf{R. x=81.}$$

$$4. \quad \frac{x+1}{3} - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{5x-4}{4} - \frac{1}{2} . \quad \mathbf{R. x=2.}$$

$$5. \quad \frac{x-1}{6} - \frac{x+2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{x+5}{8} - 2 . \quad \mathbf{R. x=5.}$$

$$6. \quad \frac{x + \frac{1}{2}}{2} - \frac{2x - \frac{x+3}{4}}{5} = 4 . \quad \mathbf{R. x=24.}$$

$$7. \quad \frac{2x - \frac{x-1}{5}}{3} - \frac{\frac{x+1}{3} - 2x}{5} = 2\frac{1}{3} . \quad \mathbf{R. x= 2\frac{1}{2} .}$$

$$8. \quad -x - 0,(6) - \frac{1}{3} = 2 . \quad \mathbf{R. x=3.}$$

$$9. \quad -1,1(6)x - \frac{5}{6}x = 10 . \quad \mathbf{R. x=-5.}$$

$$10. \quad -0,03x - 8 - \frac{7x}{100} = 0 . \quad \mathbf{R. x=-80.}$$

$$11. \quad -3,01 - \frac{99}{100} - 0,004x = 0,096x . \quad \mathbf{R. x=-40.}$$

$$12. \quad -\left[1,1(3):6\frac{4}{5}\right]x - \frac{5x}{6} = 10 . \quad \mathbf{R. x=-10.}$$

$$13. \quad -(0,00002:0,0006)x - \frac{2x}{30} = 3 . \quad \mathbf{R. x=-30.}$$

$$14. \quad -\frac{0,(9)x}{\frac{1}{6}} - \frac{1,2(2)}{\frac{11}{9}}x = 63 . \quad \mathbf{R. x=-9.}$$

$$15. \quad -2x - \frac{0,(33)}{4}x - \frac{2}{3}x = 51 . \quad \mathbf{R. x=-17.}$$

$$16. \quad \frac{4}{11} \left\{ 3 \left[\frac{1}{3}(x-1) - 5 \right] \right\} - \frac{x}{11} = 0 . \quad \mathbf{R. Nedeterminat.}$$

$$\mathbf{R. x=32.}$$

$$17. \quad \left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) : \frac{x+1}{2} \right] : \left[0,2(2) + \frac{7}{9} \right] = \frac{1}{2} . \quad \mathbf{R. Nedeterminat.}$$

$$18. \left[\frac{1}{0,1(6)}x - 5x \right] \left[2,01 - \frac{2}{1,(9)} \right] = \frac{1}{100}. \quad \text{R. } x=1.$$

$$19. x \left[0,5(1) + \frac{4}{9} \right]^{199} = \frac{\frac{x-1}{111}}{0,(900)}. \quad \text{R. Nedeterminat.}$$

$$20. [(-3)^2 + (-2)^3]x = \frac{x-4}{5}. \quad \text{R. } x=-1.$$

17. INECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

$$1. \frac{(-2)}{-3} + \frac{(-2)(+3)}{-1} + \frac{(-3)}{-2} + 1 + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-3} < \frac{2x}{3} - 4x \quad \text{R. } x < -2,5.$$

$$2. \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{4} \right) - \left(\frac{1}{-5} \right) \left(\frac{-3}{2} \right) + \left(\frac{-2}{-5} \right) \left(\frac{4}{-3} \right) \right] - (-2+5)x < 1. \quad \text{R. } x > -\frac{24}{83}.$$

$$3. \frac{(3)+(-7)+(-5)+(10)+(-4)+(+4)}{(-5)+(-7)-(+4)+(+10)+(-2)} + \frac{x}{8} < 5x. \quad \text{R. } x > -\frac{1}{39}.$$

$$4. \frac{7+(-2)-(-3)-4+(+5)-(-1)}{(-3)(-2)(-1)} + \frac{x}{4} > -\frac{3x}{8}. \quad \text{R. } x > \frac{8}{3}.$$

$$5. \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{4} \right) : \left[\frac{5}{6} \left(-\frac{2}{3} \right) \left(\frac{-3}{5} \right) (-3) \right] - \frac{3}{8} < -\frac{5x}{8}. \quad \text{R. } x < \frac{6}{5}.$$

$$6. \frac{(-5):(+5) + (+3) : (+\frac{3}{5})}{\frac{3}{5} : \left(\frac{-2}{5} \right)} + 2,(90) - 1 \frac{1}{11} < \frac{x}{3}. \quad \text{R. } x > -\frac{28}{11}.$$

$$7. 1,1(36)x + \frac{5x}{22} > \frac{2x}{11} + 2. \quad \text{R. } x > 1\frac{9}{13}.$$

$$8. \frac{[(-3)^2 + (-2)^3]x}{(-1)^{100} + (-2)^2} < \frac{1}{5} + x. \quad \text{R. } x > -\frac{1}{4}.$$

$$9. \frac{200(0,005)x - 0,01x}{0,99} < 1,(99). \quad \text{R. } x < \frac{1}{100}.$$

$$10. \left\{ \left[(-2)^2 \cdot (-2)^3 \right] : 2^5 \right\} x - \frac{x-1}{2} < \frac{x}{4} \quad \text{R. } x < -\frac{2}{13}.$$

$$11. x(0,001)^2 \cdot 10^6 \cdot 0,1(12) \cdot \frac{33}{37} < 2^6 \cdot 2^5 \cdot 2^9. \quad \text{R. } x < 4.$$

$$12. \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x + 2 \right) + 2 \right] + 2 \right\} - 1 < 0. \quad \text{R. } x < 3.$$

I. 8. PROBLEME A CĂROR REZOLVARE CONDUCE LA ECUAȚII DE GRADUL ÎNȚII CU O NECUNOSCUTĂ

1. Două persoane au împreună 38 lei. Prima are cu 6 lei mai mult decât a doua. Câți lei are fiecare ?

R. 22; 16.

2. Cineva are 81 lei în două buzunare. În primul are de două ori mai puțin decât în al doilea. Câți lei are în fiecare buzunar ?

R. 27; 54.

3. În trei coșuri se află 47 mere. În primele două numărul merelor este același, iar în al treilea coș, sînt cu două mere mai mult decât în fiecare din celelalte. Cîte mere sînt în fiecare coș ?

R. 15; 15; 17.

4. Pe trei rafturi se află 63 cărți: pe primul raft, de trei ori mai multe decât pe al doilea și pe al doilea de două ori mai multe decât pe al treilea. Cîte cărți sînt pe fiecare raft ?

R. 42; 14; 7.

5. Un ceas, un lămpișor și un deșteptător costă împreună 720 lei. Deșteptătorul este de două ori mai scump decât lămpișorul, iar ceasul este de trei ori mai scump decât deșteptătorul. Cît costă fiecare obiect ?

R. 80; 160; 430.

6. Să se împartă 21 în două părți, așa fel încît raportul lor să fie $\frac{3}{4}$.

R. 9; 12.

7. Conducătorul unei brigăzi spune celor 88 brigadieri din echipa sa: "împărțiți-vă în două grupe, așa fel ca o cincime din numărul brigadierilor din grupa întâia să fie egală cu o șesime a numărului din grupa a doua". După cîteva minute un elev din echipă spune: 40 în grupa întâia, 48 în grupa doua. Cum a calculat ?

R. $x = \frac{88-x}{6}$; $x=40$.

8. Să se afle două numere, cunoscînd suma lor 85 și diferența lor 15.

R. 50; 35.

9. Diferența a două numere este 8, raportul lor este 3:2. Care sînt numerele ?

R. 24; 16.

10. Să se împartă numărul 46 în două părți, așa fel ca o treime a părții întâia să întrecă cu doi o șeptime a părții a doua.

R. 18; 28.

11. Suma a două numere este 64. Împărțind numărul cel mare la cel mic, obținem câtul 3 și restul 4. Să se găsească cele două numere.

R. 49; 15.

12. Diferența a două numere este 35. Împărțind numărul cel mare la cel mic, obținem câtul 4 și restul 2. Să se găsească cele două numere.

R. 46; 11.

13. Avem două rezervoare, dintre care unul conține de două ori mai multă apă decât celălalt. Dacă turnăm din primul rezervor în al doilea 16 hl, ambele rezervoare conțin aceeași cantitate de apă. Câtă apă a fost în fiecare rezervor ?

R. 64; 32.

14. Intr-o cutie, sînt 68 kg marfă, iar în alta 92 kg. Câtă marfă trebuie scoasă din a doua cutie și pusă în prima, pentru ca ambele cutii să conțină aceeași cantitate de marfă?

R. 12 kg.

15. Se amestecă două calități de vopsea. Prima calitate costă 10 lei kilogramul, iar a doua, 7 lei kilogramul. Cîte kilograme trebuie luate din fiecare fel, pentru a obține 30 kg de amestec, care să coste 8 lei kilogramul ?

R. 10; 20.

16. În clasele I-a A și I-a B ale unei școli, au fost înscriși la începutul anului 90 elevi, clasa I-a A, avînd un număr mai mic de elevi. După un trimestru, doi elevi din clasa I-a A au fost mutați în clasa I-a B. Acum numărul elevilor din clasa I-a A este 80% din numărul elevilor din clasa I-a B. Cîți elevi au fost în fiecare clasă la începutul anului școlar ?

R. 44; 46.

17. Din două metale cu densitățile 7,2 și 8,4 s-au fabricat 19 kg de aliaj cu densitatea 7,6. Cît s-a luat din fiecare metal?

R. 12,7 kg; 6,3 kg.

18. Tata e cu 39 ani mai în vîrstă decît fiul; peste 7 ani, tata va fi de patru ori mai în vîrstă decît fiul. Cîți ani are acum fiecare din ei ?

R. 6 ani; 45 ani.

19. Un muncitor cumpără de la cooperativă 38 kg marfă și anume: făină cu 10 lei kg și mălai cu 3,50 lei kg, plătind pentru făină cu 110 lei mai mult decît pentru mălai. Ce cantitate a cumpărat din fiecare fel ?

R. 18 kg; 20 kg.

20. Pentru 40 kg mere s-a plătit cu 20 lei mai mult decît pentru 3 kg nuci: 22 kg mere costă cu 24 lei mai puțin decît 2 kg nuci. Cît costă 1 kg de nuci și cît costă 1 kg de mere ?

R. 100 lei; 8 lei.

21. Un număr e format din două cifre. Dacă scădem din el 18 obținem numărul răsturnat. Să se afle numărul, știind că suma cifrelor sale este 12.

R. 75.

22. Intr-un număr de două cifre, cifra zecilor este de două ori mai mare decât cifra unităților. Răsturnatul acestui număr este cu 36 mai mic decât cel cerut. Să se afle acel număr.

R. 84.

23. O traversă de fier trebuie tăiată în două părți, ale căror lungimi să fie în raportul 5:3 iar prima parte trebuie să fie cu 5 dm mai lungă decât $\frac{5}{9}$ din toată traversa. Să se afle lungimile celor două părți.

R. 45; 27.

24. Dintr-un rezervor s-a scos la început jumătate din apa care se afla în el, plus $\frac{1}{2}$ hl; pe urmă, jumătate din acest rest plus $\frac{1}{2}$ hl; în sfârșit, încă o jumătate din rest plus $\frac{1}{2}$ hl. După aceste operații, rezervorul mai conține 6 hl apă. Câtă apă a fost la început în rezervor ?

R. 55 hl.

I.9. EXERCIIII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Un lot agricol a fost semănat astfel: pe $\frac{1}{3}$ din lot plus 10 ha s-au semănat cartofi; pe $\frac{4}{5}$ din rest, floarea soarelui și pe $\frac{1}{8}$, cât a mai rămas din lot, varză. a) Să se afle aria fiecăreia din cele trei parcele. b) Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.d.c. al celor trei numere ce reprezintă aria celor trei parcele. c) Să se scrie mulțimea M în mai multe moduri.

Indicație. Primele două părți împreună fac $\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15}\right)$ din lot + 2 ha = $\frac{13}{15}$ din lot + 2. Toată aceasta reprezintă: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ din lot. Deci, cele 2 ha vor valora: $\frac{7}{8} - \frac{13}{15}$ din lot, adică $\frac{1}{120}$ din lot. În consecință, lotul are 240 ha.

R. a) 90 ha; 120 ha; 30 ha; b) $M = \{3; 2; 5\}$;
c) $M = \{2; 3; 5\}$; $M = \{5; 2; 3\}$; $M = \{2; 5; 3\}$.

2. Dintr-o cantitate de cărbune s-au consumat în prima lună $\frac{5}{16}$ și încă 3 t, în a doua lună $\frac{7}{24}$ și încă 2 t, iar în a treia s-a consumat restul, care cîntărea cu $2\frac{2}{3}$ t mai mult decât 0,3 din întreaga cantitate. Care a fost întreaga cantitate ?

Indicație. $3 + 2 + 2\frac{2}{3} = \frac{23}{3}$ t; $\frac{5}{16} + \frac{7}{16} + \frac{3}{10} = \frac{217}{240}$ din cantitatea inițială $\frac{240}{240} - \frac{217}{240} = \frac{23}{240}$ repr. $\frac{23}{3}$ t.

R. 80 t.

3. O persoană cheltuiește odată cu 4 lei mai puțin decât $\frac{3}{5}$ din ceea ce are, altă dată $\frac{1}{4}$ din rest plus 3 lei, iar apoi $\frac{2}{5}$ din noul rest plus 1,20 lei. I-au mai rămas 24 de lei. a) Ce sumă a avut și cât a cheltuit de fiecare dată ? b) Sumele cheltuite în cele trei rînduri fiind considerate elementele mulțimii S să se scrie această mulțime.

Indicație. Aplicăm metoda mersului invers: ultimul rest este de 24 de lei. La 24 lei adăugăm 1,20 lei,

obținem 25,20 lei, ceea ce reprezintă $\frac{3}{5}$ din ce a rămas a treia oară; deci restul al treilea este: $24 + 1,20 = 25,20$.

$$\text{R. a) } \begin{cases} \text{Suma inițială } 140 \text{ lei;} \\ \text{Sume cheltuite: } 80 \text{ lei, } 18 \text{ lei, } 18 \text{ lei;} \\ \text{b) } S = \{80; 18\}. \end{cases}$$

4. Pentru instalarea luminii electrice în două camere s-a cumpărat sîrmă. Pentru prima cameră s-a întrebuințat cu $2\frac{1}{2}$ m mai puțin decît jumătate din toată sîrma, iar pentru camera a doua, 0,9 din cantitatea folosită pentru prima cameră. Cîți metri de sîrmă s-au cumpărat dacă au mai rămas $6\frac{1}{4}$ m ?

Indicație. Dacă s-ar fi folosit și pentru camera a doua aceeași cantitate de sîrmă ca pentru prima, ar fi rămas: $2\left(2\frac{1}{2}\right) = 5$ m de sîrmă. Pentru a doua cameră s-a folosit însă cu $6,25 - 5 = 1,25$ m de sîrmă mai puțin. 1,25 m reprezintă $\frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ din sîrma consumată la prima cameră. La prima cameră s-a consumat $1,25 : \frac{1}{10} = 12,5$ m.

R. 30 m.

5. O mamă cu 2 copii au împreună 60 de ani. a) Să se afle vîrsta fiecăruia dintre copii, știind că cel mai mare are de 3 ori vîrsta celui mai mic, și că mama are dublul sumei vîrstelor copiilor. b) Considerăm elemente ale mulțimii M , numerele care reprezintă vîrstele copilului mic, copilului mare și mamei. Să se determine această mulțime.

Indicație. Știind că mama are vîrsta de două ori mai mare decît suma vîrstelor copiilor, înseamnă că din cei 60 de ani, mama are $\frac{2}{3}$; copiii împreună, $\frac{1}{3}$; deci mama are 40 de ani și copiii împreună 20 de ani. Din acești 20 de ani, copilul mai mare, va avea $\frac{3}{4}$ iar cel mai mic $\frac{1}{4}$.

$$\text{R. } \begin{cases} \text{a) } 15 \text{ ani; } 5 \text{ ani} \\ \text{b) } M = \{5; 15; 40\}. \end{cases}$$

6. Ce oră este dacă mai rămîn din zi $\frac{5}{3}$ din ceea ce a trecut? (Ziua se consideră de 24 de ore și începe la 12 noaptea.)

Indicație. Considerînd ceea ce a trecut din zi ca un întreg, deci $\frac{3}{3}$, și ceea ce mai este (din datele problemei) $\frac{5}{3}$, avem ziua întreagă formată din $\frac{8}{3}$ din ceea ce a trecut. Deci $\frac{8}{3}$ reprezintă 24 de ore.

R. ora 9.

7. Trei brigăzi au arat împreună 396 ha de pămînt. Prima brigadă are de arat $\frac{1}{2}$ din cît are a treia, iar a doua are de arat $\frac{1}{3}$ din cît are a treia brigadă. Cîte hectare de pămînt are de arat fiecare brigadă?

Indicație. Întrebuințăm metoda falsei ipoteze. Admitem că cea de a treia brigadă are de arat 54 ha; atunci prima va avea 27 ha, iar a doua 18 ha. În total $27 + 18 + 54 = 99$. Raportul $\frac{396}{99} = 4$ ne arată că am presupus pentru a treia brigadă că are de arat o întindere de 4 ori mai mică decît în realitate. Întinderile reale vor fi (27×4) ha, (18×4) ha, (54×4) ha.

R. a) 108 ha; 72 ha; 216 ha.

8. Ioan zice lui George: dă-mi o pară și voi avea îndoit cât vei avea tu. George răspunde: dă-mi tu o pară și voi avea și eu cât tine. Cîte pere avea fiecare ?

Indicație. Dacă I . dă o pară lui G ., ei vor avea un număr egal de pere, deci I are cu două pere mai mult decît G . Dacă G . dă o pară lui I ., diferența dintre numărul perelor pe care le au ei devine 4; G . rămîne cu 4 pere. În concluzie G . avea $4+1=5$ pere, iar I . avea $5+2=7$ pere.

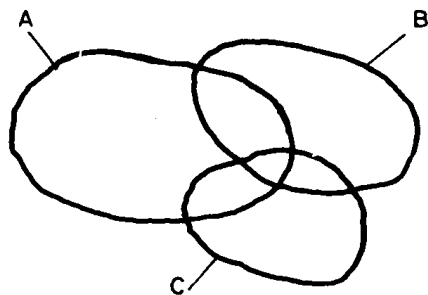


Fig.I.20

9. Fie mulțimile A , B și C din figura I.20, ale căror elemente nu le-am mai pus în evidență. Să se pună în evidență cu diferite culori următoarele mulțimi $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap C$; $A \cap (B \cap C)$; $A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cup C$; $A \cap (B \cup C)$.

10. O dactilografă a efectuat $\frac{4}{5}$ din lucrarea ce avea de făcut în $\frac{2}{3}$ ore. După cît timp își va termina lucrarea dacă va lucra tot timpul în același ritm.

R. 10 minute.

11. Dacă la numărul muncitorilor dintr-o uzină se adaugă încă pe atît și încă $\frac{2}{9}$ din acest număr, apoi se repartizează $\frac{2}{5}$ din ei la altă uzină, mai rămîn în uzină 1 200 de oameni. Cîți oameni au fost la început în uzină ?

R. 900 de oameni.

12. Se dau mulțimile: $A = \{a; b; 3; 9\}$, $B = \{a; b; 5\}$, $C = \{7; 8; a; 5\}$. Să se calculeze:

a) $A \cup B$; b) $(A \cup B) \cap C$; c) $(A \cap C)$; d) $B \cap C$; e) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$; f) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

13. Dintr-un butoi s-a scos la început $\frac{2}{5}$ apoi $\frac{1}{3}$ din cantitatea de apă ce a fost în el, rămînînd în butoi 8 găleți. Cîtă apă a fost în butoi ?

R. 30 de găleți.

14. Notăm lungimea unui dreptunghi cu AB . După ce s-a parcurs $\frac{3}{10}$ din AB au mai rămas 8 dm pînă la $\frac{AB}{2}$. Lățimea dreptunghiului BC este 0,75 din AB . a) Să se afle cîți metri pătrați reprezintă $\frac{3}{8}$ din aria dreptunghiului $ABCD$?

R. $4,5 \text{ m}^2$.

15. Să se determine x astfel ca $\{3; 2\} = \{1; 2; 3\} \cap \{2; x\}$.

R. $x=3$.

16. Un biciclist a parcurs distanța AB cu viteza medie de $14\frac{1}{3}$ km pe oră astfel: numărul de km parcurși în prima zi notat cu x este divizibil cu 2 și 3 și este $102 < x < 114$; a doua zi a parcurs $\frac{11}{12}$ din AB și a treia zi de $1\frac{1}{6}$ ori mai mult decît în a doua zi. În cîte ore a parcurs biciclistul distanța AB ?

R. $22\frac{1}{2}$ ore.

17. Fie dreptunghiul $ABCD$. $\frac{1}{3}$ din AB (lungimea dreptunghiului) este cât $\frac{1}{3}AD$ (din lăţimea lui) şi $AB-AD=30$ m. Pe $\frac{3}{5}$ din aria dreptunghiului s-a amenajat un teren de sport. Cât la sută reprezintă terenul de sport din aria întregului teren ?

R. 60%.

18. Să se determine mulţimea E ştiind că îndeplineşte simultan condiţiile: $E \cup \{1; 2; 5\} = \{1; 2; 5; 4\}$, $E \cap \{1; 2; 5\} = \{1; 2\}$.

R. $E = \{1; 2; 4\}$.

19. Doi biciclişti au plecat în acelaşi timp, din acelaşi punct spre o localitate ce se afla la o distanţă de 60 km. Un biciclist merge cu viteza de 14 km pe oră, iar celălalt cu viteza de $12\frac{1}{2}$ km pe oră. Cu a câta parte din drum va rămîne în urmă cel de-al doilea biciclist faţă de primul, după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecare ?

R. $\frac{1}{16}$.

20. Două robinete unul cu apă caldă şi unul cu apă rece curgînd împreună pot umple o baie în 8 minute. Numai robinetul cu apă caldă poate umple baia în 18 minute. În cîte minute poate fi umplută baia pînă la acelaşi nivel de robinetul cu apă rece ?

R. $14\frac{2}{3}$ minute.

21. Suma a două numere este 1. Să se găsească aceste numere, ştiind că $\frac{1}{2}$ din primul reprezintă $\frac{1}{3}$ din al doilea.

R. $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$.

22. Să se găsească mulţimea X ştiind că: $X \subset \{1; 2; 3\}$ şi $\{1; 2; 3\} \cap X = \{1; 2\}$.

R. $X = \{1; 2\}$.

23. Într-un coş sînt cu 35 de mere mai mult decît în al doilea coş şi $\frac{1}{3}$ din merele din primul coş reprezintă $\frac{3}{4}$ din numărul de mere din coşul al doilea. Cîte mere sînt în fiecare coş ?

R. 63 şi 28 mere.

24. Diferenţa între lungimea AB şi lăţimea AD a unui dreptunghi este de 40 de metri. Dacă din AB se scad $\frac{4}{5}$ din ea iar din AD $\frac{2}{3}$ din ea, obţinem lungimi egale.
a) Să se afle AB şi AD . b) Cîţi ari reprezintă $\frac{3}{5}$ din aria dreptunghiului ?

R. a) 100 m; 60m; b) 36 ari.

25. Se dau mulţimile: $A = \{4; 5; 6; 7\}$ $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Să se scrie mulţimile:

a) $\{x | x \in A \text{ şi } x \notin B\}$. b) $\{x | x \notin A \text{ şi } x \in B\}$.

R. $A-B = \{4\}$ $B-A = \{3\}$.

26. Un trapez $ABCD$ cu baza mare AB , baza mică CD și înălțimea DE . Se știe că $AB=3CD$ și $2DE=DC$; $BC+AD=\frac{AB+DC}{2}$. Perimetrul trapezului este 60 cm. Să se afle aria trapezului.

R. 100 cm^2 .

27. Într-un paralelogram $ABCD$ cu baza $AB=20 \text{ cm}$, înălțimea x a paralelogramului este numărul $\{x \in \mathbb{N} \mid 15 < x < 42 \text{ și } x \text{ să fie divizibil prin } 2 \text{ și } 7\}$. Să se arate că reprezintă $0,1(6)$ din aria paralelogramului.

R. $93\frac{1}{3} \text{ cm}^2$.

28. Un trapez isoscel $ABCD$ (AB baza mare și DC baza mică) are perimetrul de 90 cm. Știind că $AB=4 DC$ și $AD=\frac{AB}{2}$, să se afle aria trapezului cunoscând că înălțimea este de 13,4 cm.

R. 335 cm^2 .

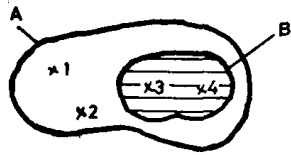


Fig. I.21

29. Se dau mulțimile $A=\{1; 2; 3; 4\}$, $B=\{3; 4\}$. Să se calculeze $C_A B$ (fig. I.21).

R. $C_A B = A - B = \{1; 2\}$.

30. Dacă se mărește lungimea unui dreptunghi cu 0,5 cm, atunci aria lui crește cu $2\frac{1}{2} \text{ cm}^2$, dacă se mărește lățimea cu 0,25 cm, aria lui se va mări cu $1,25 \text{ cm}^2$. Să se arate că acest dreptunghi este un pătrat.

31. Se dau mulțimile $E=\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, $A=\{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$, $B=\{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$. Să se scrie mulțimile: a) $C_E A$; b) $C_E B$; c) $C_A B$.

R. a) $\{6; 7; 8; 9\}$; b) $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; c) $\{4; 5\}$.

32. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu lungimea AB și lățimea BC . Se cunoaște că $\frac{3}{8}$ din $AB = \frac{3}{4}$ din BC și $AB - BC = 40 \text{ cm}$. Să se calculeze cât la sută reprezintă AB din BC .

R. 200%.

33. Un copil are pasul de 70 cm, un altul are pasul de 50 cm. Ei pornesc în același timp, din același loc. Care este cea mai mică distanță după care urmele pașilor se găsesc una în dreptul celeilalte?

R. 3,5 m.

34. Se dau mulțimile: $A=\{2; 3; a; 5\}$, $B=\{a; 5\}$. Să se calculeze: $A - B$ și $B - A$.

R. $\{2; 3\}$; \emptyset .

35. Un muncitor execută o lucrare în 5 ore, alt muncitor și-o îndeplinește în 8 ore. a) Peste câte ore, de la data înregistrării muncii lor, ei vor îndeplini un număr întreg de

norme ? b) Cîte norme întregi va îndeplini fiecare ?

R. a) 40 ore; b) 8; 5.

36. Se dau mulțimile: $A = \{2;3;4;5\}$, $B = \{2;3;4\}$. Să se determine $C_A B$.

R. $\{5\}$.

37. Să se găsească un număr prim de trei cifre, știind că produsul cifrelor lui este 252. Justificați răspunsul.

Indicație. Prin descompunerea lui 252 în factori primi rezultă că numărul căutat poate avea cifrele 4; 7; 9 sau 6; 6; 7. Din numerele ce se pot forma, numai două sînt convenabile.

R. 479 și 947.

38. Într-un magazin au fost aduse niște obiecte în 10 lăzi astfel: în a doua ladă cu un obiect mai mult decît în prima, în a treia cu un obiect mai mult decît în a doua ș.a.m.d. O persoană cumpără lada cu cel mai mare număr fără soț (impar) de obiecte. Din lăzile rămase, altă persoană cumpără toate lăzile care conțin un număr par (cu soț) de obiecte. În magazin au rămas 24 obiecte. Cîte obiecte erau în total în magazin și cîte în fiecare ladă ?

R. Prima ladă conține 2 obiecte, în total 65 obiecte.

39. Dintre numerele de forma $71x84y$ divizibile cu 18, care este cel mai mare și care este cel mai mic ?

Indicație. Ca un număr să se dividă cu 18, trebuie să fie divizibil cu 2 și cu 9.

R. 718 848; 711 846.

40. Să se găsească două numere naturale astfel ca de șase ori primul înmulțit cu de 4 ori al doilea să se obțină 1 680 și de trei ori primul să fie mai mare cu 1 ca al doilea.

Indicație. Produsul numerelor căutate este cîtul dintre 1 680 și $6 \cdot 4$. Se caută două numere în aceste condiții; din soluțiile posibile, convine perechea 5;14.

R. 5; 14.

41. Într-un săculeț sînt 10 bile albe, 12 bile negre și 16 bile roșii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să-l scoatem fără a ne uita în săculeț, pentru a fi siguri că am scos trei bile de aceeași culoare ? De ce ?

R. 7 bile.

42. Să se efectueze:

$$2^2 \cdot 2^2 + [(600:300)^2] \cdot [120:(30,2:15,1):2 - (10,01 - 9,01)] + 2^7:2^6.$$

R. 134.

43. Să se determine un număr de cinci cifre știind că produsul dintre numărul format din primele două cifre și numărul format din ultimile cifre este 1 111.

R. 11 101.

44. Elevii unei clase au participat la o întrecere sportivă în două zile astfel: în prima zi 15 elevi, în a doua zi de două ori mai mulți ca în prima zi. Să se afle numărul elevilor din clasă, dacă 12 din ei au venit în fiecare zi iar 3 elevi în nici o zi.

R. 36 elevi.

53. Două trenuri cu viteze medii diferite au pornit în același timp din stația A spre stația B care se află la depărtarea de 341,25 km de A . După $3\frac{1}{2}$ ore distanța dintre cele două trenuri era de 35 km iar după $5\frac{1}{4}$ ore de la plecare primul tren ajunge în stația B . Să se afle viteza medie a fiecărui tren.

R. 65 km/h; 55 km/h.

54. Să se afle în care sistem de numerație avem: $\overline{65} \times \overline{31} = 3\overline{005}$. Să se treacă apoi în baza 10 și să se verifice.

R. Baza este 7.

55. Fie mulțimile $A = \{4; 3; 2; 9\}$, $B = \{4; 8; 9; 11\}$, $C = \{1; 7; 3\}$. Să se arate că $(A-B)-C \neq A-(B-C)$ adică diferența nu este asociativă

Indicație. $(A-B)-C = \{3; 2\} - \{1; 7; 3\} = \{2\}$ și $A-(B-C) = \{4; 3; 2; 9\} - \{4; 8; 9; 11\} = \{3; 2\}$.

56. Andrei este cel mai mic din cinci frați și Barbu cel mai mare. Emil este mai mic decât Călin, Dumitru este mai mare decât Călin. Fiecare dintre frați este cu același număr de ani mai mic decât următorul. (Se consideră ani împliniți exprimați prin numere întregi.) 1) Să se scrie în ordinea crescătoare a vârstei cei cinci frați. 2) Dacă mijlociul are șapte ani care este suma vârstelor? 3) Care este maximul vârstei pe care ar putea-o avea cel mare?

R. 2) 35 ani; 3) 13 ani.

II. C l a s a a-VI-a

ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

II.1. FRACȚII ORDINARE

1. Un ceasornic rămîne în urmă cu $\frac{3}{4}$ s într-o oră. El a fost potrivit azi la ora 13 și 30 minute. Cu cît va rămîne în urmă pînă mîine la ora 12 ?
R. $16\frac{7}{8}$ s.
2. Pămîntul săpat își mărește volumul cu o cincime. Ce volum de pămînt se va obține, după săpare din 60 m.c. de pămînt ?
R. 72 m.c.
3. $\frac{3}{5}$ din suprafața unei parcele de pămînt s-au semănat cu grîu, iar restul cu sfeclă. Scrieți cîtul acestor două suprafețe de pămînt.
R. $\frac{3}{2}$.

4. $\frac{2}{3}$ dintr-un rezervor al unui automobil reprezintă 36 l benzină. Câtă benzină conțin $1\frac{1}{2}$ rezervoare ?

R. 81 l.

5. La fabrica de la Comarnic se transformă zilnic în var câte 5 vagoane de câte 15 t de calcar. Varul obținut reprezintă $\frac{55}{100}$ din calcarul folosit. Câte kilograme de var s-au obținut într-o săptămână ?

R. 247 500 kg.

6. O gospodină vrea să facă dulceață de nuci verzi și întrebuințează 5 kg de nuci și o cantitate de zahăr egală cu $\frac{3}{5}$ din masa fructelor. Prin fierbere se pierde $\frac{1}{8}$ din masa totală. Câte kg de dulceață a obținut această gospodină ?

R. 7 kg.

7. Mama a cumpărat 27 kg de lână nespălată. Prin spălare lina a pierdut $\frac{5}{9}$ din masă, iar prin toarcere $\frac{1}{3}$ din masă. Câte kilograme de lână toarsă s-au obținut ?

R. 8 kg.

8. Pe un lot s-au semănat 480 ha cu grâu și 520 ha cu porumb. Ce parte din suprafața semănată cu porumb reprezintă suprafața semănată cu grâu și invers ? (Scrieți pe rând suprafața semănată cu grâu și porumb și suprafața întreagă.) Ce observați la aceste fracții ? Scrieți sub forma cea mai simplă.

R. $\frac{12}{13}$; $\frac{13}{12}$.

9. Un biciclist a făcut în prima oră $8\frac{1}{3}$ km, în a doua oră cu $2\frac{1}{4}$ km mai mult și în a treia cu $1\frac{3}{5}$ km mai mult decât în a doua oră. Câți kilometri a mers în cele trei ore ?

R. $31\frac{1}{10}$ km.

10. Între pereții unei camere este o distanță de $\frac{1}{3}$ m. Ce lungime are o birnă care este zidită într-un perete pe o distanță de $\frac{1}{3}$ m, iar la celălalt capăt pe o distanță de $\frac{3}{5}$ m ?

R. $6\frac{4}{15}$ m.

11. Doi muncitori execută o piesă în 9 ore dacă lucrează împreună. Unul dintre ei ar termina această piesă în 15 ore. În câte ore ar termina celălalt muncitor piesa ?

R. $22\frac{1}{2}$ ore.

12. Un rezervor poate fi umplut printr-un robinet în 8 ore și golit în 11 ore. (Se presupune că debitul este constant.) În cât timp se umple rezervorul, dacă sînt deschise robinetul și orificiul de scurgere ?

R. $29\frac{1}{3}$ ore.

13. Patru muncitori trebuiau să facă împreună o lucrare; primul a lucrat $\frac{3}{20}$ din toată lucrarea, al doilea $\frac{5}{20}$, al treilea $\frac{1}{4}$ și al patrulea restul. Ce parte a lucrat al patrulea muncitor?

R. $\frac{13}{30}$.

14. Un vapor parcurge în sensul curentului $24\frac{1}{2}$ km/h. Viteza apei este de $2\frac{3}{4}$ km/h. Câți kilometri pe oră va parcurge vaporul, dacă va merge împotriva curentului?

R. $21\frac{3}{4}$ km/h.

15. Un graur poate zbura 1 200 m pe minut, un lăstun are $\frac{4}{3}$ din viteza graurului, iar un uliu $\frac{7}{16}$ din viteza lăstunului. Câți metri pe minut poate zbura un lăstun și câți un uliu?

R. 1 600 m; 700 m.

16. Care este masa unui paralelipiped dreptunghic de fontă cu dimensiunile de $3\frac{1}{2}$ cm, $7\frac{1}{8}$ cm și $5\frac{1}{3}$ cm, dacă fonta are densitatea de $7\frac{4}{5}$ g/cm³?

R. $1\ 037\frac{2}{5}$ g.

17. Dintr-o cisternă de benzină s-a scos prima dată $\frac{1}{12}$ din toată cantitatea, a doua oară $\frac{1}{5}$ din rest, a treia oară de două ori mai mult decât se scosese până atunci, a patra oară o treime din ultimul rest și în cisternă au mai rămas 160 l de benzină. Câți litri avea cisterna și cât s-a scos de fiecare dată?

R. 1 200 l; 100 l; 220 l; 640 l; 80 l.

18. Dintr-o bucată de stofă s-au vândut $\frac{1}{5}$ și încă $\frac{2}{3}$ din ea: bucată care a mai rămas s-a vândut apoi cu 2 240 lei. Un metru de stofă costă 400 lei. Câți metri de stofă au fost la început în bucată și câți metri s-au vândut de fiecare dată?

R. 42 m; $8\frac{2}{5}$ m; 28 m.

19. Un lucrător cheltuiește din salariul lunar: $\frac{5}{12}$ pentru hrană, $\frac{1}{12}$ pentru locuință, $\frac{1}{4}$ pentru îmbrăcăminte, $\frac{1}{6}$ pentru spectacole iar restul de 150 lei îi depune la CEC. Cât cheltuiește pentru hrană, locuință, îmbrăcăminte și cât la sută din retribuție depune la CEC?

R. 500 lei; 100 lei; 300 lei; 12,50%.

20. 12 muncitori repară o jumătate dintr-un drum de fier în 28 zile. În câte zile va fi reparată cealaltă jumătate, dacă numărul muncitorilor s-a micșorat cu 4 (norma a rămas aceeași)?

R. 42 zile.

II.2. ÎMPĂRȚIREA ÎN PĂRȚI PROPORȚIONALE

21. Un premiu de 1 600 lei a fost împărțit între cinci câștigători astfel: primul o optime din premiu, al doilea $\frac{2}{5}$ din rest iar ceilalți sume proporționale cu numerele $2\frac{1}{2}$, 5 și 6,5. Ce sumă a primit fiecare câștigător ?

R. 200 lei; 560 lei; 150 lei; 300 lei; 380 lei.

22. Două asociații agricole au irigat un teren, cheltuind pentru aceasta 6 580 lei și hotărînd să plătească fiecare proporțional cu cantitatea de cereale recoltată după irigare. Prima asociație a înșămîntat 24 ha cu grîu și 12 ha cu orz, iar a doua 32 ha cu grîu și 26 ha cu orz. Recolta de grîu a fost de 24 chintale la hectar, iar cea de orz 16 chintale la hectar. Cît trebuie să plătească fiecare ?

R. 7 689 lei; 18 849 lei.

23. 15 țesătoare au țesut 2 280 m de pînză în 16 zile. Cîte țesătoare vor țese 1 596 m de pînză în 24 zile ? Cîți metri țese o țesătoare pe zi ? Din pînză țesută de o țesătoare într-o zi, se poate confecționa un șorț, o cămașă și un cearceaf. Să se afle cîți metri de pînză se vor folosi pentru fiecare din aceste confecții, dacă metrajul folosit este invers proporțional cu numerele $2\frac{8}{7}$ și 17.

R. 7 țesătoare; 9,5 m; 2 m; 13,50 m; 4 m.

24. Două familii mergînd în munți au poposit la cabană Padina și au plătit proporțional cu numărul persoanelor și al zilelor cît au stat, dînd în total 700 lei. Prima familie, compusă din 3 persoane, a stat 5 zile, iar a doua, compusă din 5 persoane, a stat 4 zile. Cît a plătit fiecare familie ?

R. 300 lei; 400 lei.

II.3. MĂRIMI INVERS PROPORȚIONALE

25. Un tren a pornit cu o viteză de 36 km pe oră, urmînd să parcurgă un drum în 8 ore, dar după ce a parcurs 108 km a trebuit să se oprească pentru $\frac{3}{4}$ ore. Cu ce viteză trebuie să-și continue drumul pentru a ajunge la ora fixată ?

R. $42\frac{6}{17}$.

26. Un grup de muncitori a făcut trei inovații pentru care a primit cîte 6 273 lei. Grupul era compus din 3 muncitori și banii s-au împărțit astfel: pentru prima inovație proporțional cu numerele 3,4,10, pentru a doua invers proporțional cu aceleași numere și pentru a treia în părți egale. Cîți lei a primit fiecare muncitor pentru cele trei inovații ?

R. 3 000 lei; 2 295 lei; 978 lei.

27. Reparatul și tencuitul unui perete ale cărui dimensiuni sînt: lungimea 38,4 m, înălțimea 9 m și grosimea 0,48 m, costă 2 000 lei. Cît va costa reparatul și tencuitul unui perete care este cu 6,4 m mai scurt, cu 2,25 m mai puțin înalt și cu 0,12 m mai gros decît primul perete?

R. 1 562,50 lei.

II.4. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

28. Lungimea totală a fluviului Dunărea este de 2 800 km. În țara noastră Dunărea are o lungime de 1 075 km. Cît reprezintă lungimea de pe teritoriul țării noastre față de lungimea totală ?

R. $\frac{215}{572}$.

29. a) Un cub are muchia de 3 cm; un alt cub are muchia de 5 cm. Să se afle raportul muchiilor și cel al volumelor. b) Un cub are muchia de 2,5 cm, un alt cub are muchia de $7\frac{1}{2}$ cm. Să se afle raportul muchiilor și cel al volumelor.

R. a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; b) $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{27}$.

30. Lungimea drumului de la București la Bacău este de 302 km. Pe o hartă această distanță are lungimea de 15,1 cm. Care este scara acestei hărți ?

31. Distanța de la București la Drăgășani este de 240 km. Cît va măsura această distanță pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\ 000\ 000}$?

32. Doi bicicliști pleacă în același timp unul spre celălalt din două localități. Distanța dintre ele este de 45 km. Raportul vitezelor celor doi bicicliști este $\frac{4}{5}$ și unul din ei face cu 3 km/oră mai mult decît celălalt. Se cer: a) vitezele celor doi bicicliști; b) distanța la care se întîlnesc; c) timpul după care se întîlnesc.

R. a) 12 km/h, 15 km/h; b) 20 km; c) $\frac{5}{3}$ ore.

33. O întreprindere agricolă de stat a însămînțat 1 900 ha cu grîu, orz, ovăz și secară. Să se afle suprafețele însămînțate cu fiecare fel de cereale, dacă se știe că raportul dintre suprafețele însămînțate cu orz și grîu este $\frac{1}{3}$, a celor însămînțate cu ovăz și orz $\frac{1}{2}$ și a celor însămînțate cu secară și orz $\frac{1}{4}$.

R. 1 200 ha; 400 ha; 200 ha; 100 ha.

34. Un tren de marfă care are o viteză de 18 km pe oră și un tren personal care are o viteză de 24 km pe oră merg pe o linie dublă în sensuri opuse. Mecanicul din trenul de marfă observă că trecerea trenului personal prin fața sa durează 13 secunde. Care este lungimea trenului personal ?

R. $151\frac{2}{3}$ m.

35. Un șofer merge cu autocamionul spre Ploiești cu o viteză de 40 km pe oră. El a întâlnit un tren care venea de la Ploiești cu o viteză de 24 km pe oră și care avea o lungime de 180 m. În cât timp a trecut autocamionul pe lângă tren ?

R. $10\frac{1}{8}$ s.

36. Un muncitor poate construi un zid lung de 33 m în 22 zile. În cât timp vor construi 7 muncitori un zid de 56 m, dar mai greu de lucrat ca primul de $\frac{6}{5}$ ori ?

R. $6\frac{2}{5}$ zile.

37. O placă de metal de formă paralelipipedică are lungimea de 26 cm, lățimea 14 cm și grosimea de 1 mm și are masa de 275 g. O placă din același material cu aceeași lungime și lățime, dar grosimea diferită, are masa de 81,9 g. Care este grosimea acestei plăci ?

R. 0,3 mm.

38. O mamă împreună cu fiica ei lucrează într-un atelier de covoare. Mama țese $3\frac{1}{2}$ m pe zi, iar fiica $2\frac{3}{4}$ m pe zi. Pentru 18 zile de lucru, mama a încasat cu 108 lei mai mult decât fiica. Cât a încasat fiecare din ele pentru cele 18 zile de lucru ?

R. 504 lei, 396 lei.

39. Două roți sînt legate printr-o curea de transmisie. Lungimea cercului primei roți este de 90 cm, iar a celeilalte cu 12 cm mai mare ca prima. Prima roată face 68 învîrtituri pe minut. Cîte învîrtituri face roata a doua ?

R. 60 învîrtituri.

40. Media aritmetică a trei numere este egală cu $46\frac{2}{3}$. Numărul al doilea reprezintă $\frac{1}{2}$ din primul număr și al treilea reprezintă 0,5 din al doilea. Să se afle aceste numere.

R. 80; 40; 20.

41. Media aritmetică a patru numere este egală cu 1 093,75. Care sînt aceste numere, dacă se știe că primul reprezintă 75 % din al doilea, al doilea 75% din al treilea și al treilea 75% din al patrulea ?

R. 1 000; 1 200; 900; 675.

42. Patru numere sînt direct proporționale cu: 0,0(3); 0,5; $\frac{1}{3}$ și 1, iar media lor aritmetică este egală cu 28. Să se afle aceste numere.

R. 2; 30; 20; 60.

43. 21 muncitori lucrînd cîte 8 ore pe zi pot termina o lucrare în 12 zile. În a cincea zi de la începutul lucrului le-au mai venit în ajutor cîțiva lucrători și astfel lucrînd cîte 6 ore pe zi au terminat restul lucrării în 7 zile. Cîți muncitori au venit a cincea zi ?

R. 7 muncitori.

II.5. PROCENTE

44. Patru elevi vor să cumpere, fiecare câte o minge. Primului nu-i ajunge 26,(9)% din cost, celui de-al doilea nu-i ajunge $12/25$, celui de-al treilea nu-i ajunge 47 % din costul mingii, iar celui de-al patrulea îi mai rămîne 0,22 din costul mingii. Să se calculeze câte mingi ar putea cumpăra cei patru elevi, dacă ar pune toți banii împreună.

R. 3 mingi.

45. După două reduceri succesive de prețuri de câte 10 %, un metru de mătase vegetală costă 81 lei. Cît a costat înainte de prima reducere de prețuri ?

R. 100 lei.

46. Prin irigare s-a obținut în medie la ha o recoltă de porumb cu 2 380 kg mai mare. Știind că sporul de recoltă reprezintă 85 % din recolta obținută înainte de irigare, să se afle producția obținută la hectar pe pămîntul irigat.

R. 5 180 kg.

II.6. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ ARITMETIC SAU ALGEBRIC

1. Primul termen al unui raport este 26,4, valoarea raportului este $\frac{3}{5}$. Să se găsească termenul necunoscut.

R. 44.

2. Al doilea termen al unui raport este 0,35, valoarea raportului este $3\frac{1}{3}$. Să se găsească termenul necunoscut.

R. $1\frac{1}{6}$.

3. Panta unui teren se determină prin raportul dintre înălțimea terenului și proiecția orizontală a terenului. Să se determine panta terenului, știind că baza este de 91 m, iar înălțimea de 7 m.

R. $\frac{1}{13}$.

4. Raportul dintre numărul băieților și numărul fetelor dintr-o clasă este $\frac{3}{4}$. Cîți băieți sînt în clasă dacă: 1) totalul elevilor din clasă este 35; 2) numărul fetelor este 20; 3) băieți sînt cu 5 mai puțini decît fete ?

R. 15 băieți.

5. Să se găsească raportul perimetrelor și ariilor a două dreptunghiuri, știind că lungimea unui dreptunghi este de 25 cm, iar lățimea de 20 cm și că lungimea altui dreptunghi este de 24 cm, iar lățimea de 15 cm.

R. $\frac{15}{13}; \frac{25}{18}$.

6. Să se determine scara unei hărți, știind că distanța dintre două puncte de pe teren este de 975 m, iar pe hartă de 3,9 cm.

R. $\frac{1}{25\ 000}$.

7. O grădină de zarzavat are lungimea de 340 m și lățimea de 220 m. Ce lungime, lățime și arie, va avea planul acestei grădini de zarzavat pe un desen executat la scara de $\frac{1}{500}$?

R. 68 cm, 44 cm, 2 992 cm².

8. Pentru încălzirea unei case s-a pregătit combustibil pentru 60 de zile, la un consum de 700 kg pe zi. Pentru câte zile ar ajunge același combustibil, dacă se întrebuințează zilnic 525 kg?

R. 80 zile.

9. Pentru acoperirea unei podele sînt necesari 39 m de linoleum cu lățimea de 0,9 m; dar depozitul nu a avut linoleum de această lățime și a propus un linoleum cu 0,25 m mai îngust. Câți metri de linoleum îngust vor fi necesari, pentru acoperirea podelei date ?

R. 54 m.

10. O roată dințată are 75 dinți și face 92 învîrtituri pe minut. Cîte învîrtituri pe minut va face o roată cu 5 dinți, angrenată cu prima ?

R. 1 380.

11. Dacă se folosesc pentru un parchet plăci dreptunghiulare cu lungimea de 6,3 dm și lățimea de 4,0 dm, atunci sînt necesare 460 de plăci. Cîte plăci pătrate se vor folosi la același parchet dacă se vor lua plăci cu mărimea de 0,01 m.p. ?

R. 11 592 plăci.

12. Un vapor parcurgînd cîte 20 km pe oră, face un drum în $9\frac{1}{5}$ ore. Cît timp va întrebuința vaporul pentru același drum, dacă parcurge cîte 18,4 km într-o oră ?

R. 10 ore.

13. Să se împartă numărul 720 în 2 părți care se rapoartă între ele ca $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$.

R. 320; 400.

14. Să se împartă numărul 100 în 3 părți proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ și $\frac{5}{6}$.

R. 24; 36; 40.

15. Să se împartă numărul 9 510 proporțional cu numerele $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}$.

R. 2 700; 2 400; 2 250; 2 160.

16. Să se împartă numărul 200 în 4 părți, astfel ca: prima să fie de $2\frac{1}{6}$, a doua de $3\frac{2}{3}$, a treia de $\frac{1}{2}$ ori mai mare decît a patra.

R. 52; 88; 36; 24.

17. Să se găsească două numere, știind că unul este mai mare decît celălalt de $1\frac{1}{2}$ ori și adunate, ele dau 105.

R. 42; 63.

18. Diferența a două numere este 10. Aceste numere sînt în raportul: $\frac{5}{6} : \frac{1}{2}$. Să se gă-

sească aceste numere.

R. 25; 15.

19. Să se găsească trei numere, știind că ele sînt direct proporționale cu numerele $1; \frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$ și că primele două numere adunate dau cel mai mic număr de trei cifre.

R. 60; 40; 45.

20. O sîrmă lungă de $38\frac{1}{2}$ m trebuie tăiată în 3 părți, astfel încît prima bucată să fie de atîtea ori mai mare decît a doua, de cîte ori $\frac{2}{3}$ este mai mare decît $\frac{5}{12}$, iar bucata a doua să fie de atîtea ori mai mică decît a treia, de cîte ori $\frac{3}{5}$ este mai mic decît $\frac{3}{4}$. Să se determine lungimea fiecărui segment de sîrmă.

R. 16; 10; $12\frac{1}{2}$ m.

21. Să se găsească trei numere, știind că primul număr se raportează la cel de-al treilea ca $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$, iar al treilea se raportează la cel de-al doilea ca $1 : \frac{4}{7}$ și că suma celui de-al doilea număr cu cel de-al treilea este 60.

R. $50\frac{10}{11}$; $21\frac{19}{11}$; $38\frac{2}{11}$.

22. Două roți sînt legate printr-o curea de transmisiune. Circumferința unei roți este de 80 cm, iar a celeilalte de 185 cm. Să se determine cîte învîrtituri pe minut face a doua roată, dacă prima face 74 învîrtituri pe minut ?

R. 32 învîrtituri.

23. Intr-o școală elementară învață 192 de elevi. Numărul elevilor din clasa a II-a reprezintă $16\frac{2}{3}\%$ din numărul total al elevilor, numărul elevilor din clasa a III-a reprezintă 125% din numărul elevilor din clasa a II-a. Cîți elevi sînt în clasele a II-a și a III-a luate împreună ?

R. 72 elevi.

24. Un grup de copii a strîns într-o zi 48 de snopi de grîu, iar a doua zi 30 de snopi. Cu cît la sută au strîns copii mai mulți snopi în prima zi decît în a doua zi ?

R. 60 %.

25. La o fabrică lucrează 4 125 de femei și bărbați; numărul femeilor reprezintă 65 % din numărul bărbaților. Cu cît este mai mare numărul bărbaților decît al femeilor ?

R. 875.

26. Suma de 300 lei a fost împărțită în două părți, dintre care una este de $1\frac{1}{2}$ ori mai mare decît cealaltă. Partea mai mare a fost depusă la CEC cu dobîndă de 5 %, partea mai mică a fost depusă la CEC cu dobîndă de 4 %. Ce dobîndă se va obține de la ambele părți după trecerea unui an ?

R. 13,80 lei.

27. La o fabrică, 35 % din totalul lucrătorilor îl formează femeile, iar restul bărbații, care sînt cu 420 mai mulți decît femeile. Să se determine numărul total al muncitorilor din fabrică.

R. 1 400 muncitori.

28. Cîtă pînză s-a vîndut în patru zile, știind că în prima zi s-a vîndut 4 % din toată pînza, în a doua zi 15 % din ce a rămas, iar numărul de metri vînduți în a treia zi se raportează la numărul metrilor de pînză vînduți în a patra zi ca $2\frac{1}{2}$ la $1\frac{2}{3}$? În a patra zi s-au vîndut 163,2 m de pînză.

R. 500 m.

29. Un copil are 90 de nuci, un altul 10 nuci. De cîte ori s-au dat fiecareia dintre ei cîte 5 nuci, dacă primul a rămas numai cu de 3 ori mai multe nuci decît al doilea ?

R. 6 ori.

30. Mama, fiica și fiul au cheltuit împreună o sumă oarecare de bani; mama și fiica au cheltuit împreună 100 de lei; fiica și fiul au cheltuit împreună 75 lei, iar mama și fiul au cheltuit împreună 110 lei. Cîți lei a cheltuit fiecare în parte ?

R. 67,5 lei; 32,5 lei; 42,5 lei.

31. Trei grupe de copii au sădit un număr de pomi. Primul grup a sădit 32,5 % din numărul total de pomi; raportul dintre numărul de pomi sădiți de al doilea grup și numărul de pomi sădiți de al treilea grup este 1,2 : 1,5. Care este numărul total de pomi sădiți de copii, știind că primul grup a sădit cu 120 de pomi mai puțini decît cel de-al treilea ?

R. 2 400 pomi.

32. După ce am citit $\frac{1}{4}$ dintr-o carte și încă 20 de pagini, mi-au rămas să mai citesc $\frac{2}{3}$ din carte fără 3 pagini. Cîte pagini are cartea pe care am citit-o ?

R. 144 pagini.

33. Să se găsească două numere, știind că dacă se înmulțește primul din ele cu $2\frac{1}{4}$ se obține un număr cu $5\frac{5}{8}$ mai mic decît al doilea și în cazul cînd se înmulțește primul cu $5\frac{1}{4}$ se obține un număr cu $7\frac{7}{8}$ mai mare decît al doilea număr.

R. $4\frac{1}{4}$; $15\frac{3}{4}$.

34. Să se afle lungimea, lățimea și aria unui dreptunghi, cunoscînd următoarele: dacă lățimea dreptunghiului (avînd aceeași lungime) ar fi $7\frac{1}{4}$ cm, atunci aria lui ar fi mai mică decît aria căutată cu $2\frac{5}{16}$ cm²; dacă lățimea dreptunghiului ar fi fost $7\frac{3}{4}$ cm, atunci aria lui ar fi fost mai mare decît aria căutată cu $2\frac{5}{16}$ cm².

R. $9\frac{1}{4}$ cm; $7\frac{1}{2}$ cm; $69\frac{3}{8}$ cm².

35. Să se găsească 3 numere, știind că $\frac{1}{2}$ din primul număr este egal cu $\frac{1}{3}$ din al doilea sau $\frac{1}{4}$ din al treilea număr și că al treilea număr este mai mare decât primul cu 6,4.

R. 6,4; 9,6; 12,8.

II.7. EXERCȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

Să se efectueze:

$$1. \frac{\left(\frac{33\frac{1}{3}}{2^2 \cdot 5^2} + \frac{2}{3} \right) \cdot \sqrt{\frac{4^2}{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} + 0,1 : \frac{1}{200} + \frac{\sqrt{8} + \sqrt{20}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}}{12 - 2\left(\frac{3}{4} + 0,25 \right) \cdot 3 - 2} \quad \text{R. 2.}$$

$$2. \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{3\frac{1}{8} : \left[\left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24} \right) \cdot \frac{4}{7} \left(3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12} \right) \cdot 1\frac{10}{17} \right]}{2\frac{1}{5} + \frac{1}{1\frac{1}{3}} - \sqrt{3,8025} + 0,1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{R. 1.}$$

$$3. \frac{7}{12} + \frac{\left[15:3\frac{3}{5} + \left(10\frac{1}{2} : \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{14} \right] \cdot \left(1\frac{23}{52} - 1\frac{1}{4} \right)}{\left(2\frac{1}{4} + 0,25 \cdot 8\frac{3}{7} \right) - \frac{5}{14}} + \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} \quad \text{R. 5.}$$

$$4. \frac{\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} - \frac{0,71 - \frac{1}{4}}{0,71 + \frac{1}{4}}}{\frac{\left(15 - 9\frac{1}{3} \right) : 2\frac{5}{9}}{\left(19\frac{2}{3} - 11\frac{7}{9} \right) \cdot \frac{9}{71}}} : \frac{\sqrt{289}}{16} - \sqrt{0,1(6)} : \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{8} \quad \text{R. } \frac{5}{3}.$$

$$5. \frac{3\frac{13}{15} : \frac{42}{45} + \left(6\frac{53}{56} - 2,375 \right)}{1 + \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{122} \right)^2 : \frac{2}{23} \quad \text{R. 1.}$$

$$1\frac{19}{3 + \frac{4}{5}} - \frac{\frac{1}{2}}{8 - \frac{7}{5 - 1,5}}$$

$$6. \sqrt{\frac{271}{476} + \frac{2\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}} : \frac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}} + \left(\frac{1}{2,5-1} - \frac{1}{3\frac{1}{2}-1} \right) : \frac{4}{5} + \frac{2}{3}} \quad \mathbf{R. 2.}$$

$$7. \frac{\left(2\frac{1}{2}\right)^3 - \left(1\frac{1}{4}\right)^2 - \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{33, (3)}{100} - 13\frac{2}{3}}{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2) : (2^2 \cdot 5 \cdot 3^3) + 0,375 + \frac{5}{8} - 4} \cdot \sqrt{3} : \sqrt{27} \quad \mathbf{R. 1.}$$

$$8. \frac{(0,2)^3 : (0,3)^3 1\frac{1}{8} \cdot (1,2)^2 \cdot (2\frac{1}{2})^2 + 30, (5) + 3, (4) - 27}{(0,1)^2 : (0,01)^2 : 10 - (0,9)^3 : (0,9)^2 : \frac{9}{10} + 1} \cdot \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} \quad \mathbf{R. 7.}$$

$$9. \frac{\left(0,5 : 1,25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right) : \frac{8}{11} - \left(6 - 4\frac{1}{2}\right) : 0,003 : 50}{\left(1,5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3} - \left(3\frac{1}{20} - 2,65\right) \cdot 4 : \frac{1}{5}}^{-13 + \frac{7}{12}} \quad \mathbf{R. 1.}$$

$$10. \left(10 - 3 \cdot 0,3 \cdot 10 + \frac{1}{19} + 2\frac{5}{76} - \frac{3}{532}\right) - 2\frac{15}{133} + \frac{\left(\sqrt{903,6036} : 1,2 - 2\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{25}{1371}}{0,003 : 0,15 + 0,08} + \frac{5}{6} \quad \mathbf{R. 6.}$$

$$11. 2 + 19 \left[\frac{2,652 : 1,3 - 1\frac{17}{30} + \frac{3}{50}}{(24 : 6,4 - 12 : 3\frac{3}{5} + \frac{2}{5}) \cdot 0,5 - \sqrt{1,5625}} \right]^{-3 + 2} \cdot 2 \quad \mathbf{R. 19.}$$

$$12. 1,456 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0,125 + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} + \frac{(1-0,1) : 1\frac{11}{16}}{\left(\sqrt{1,7956} + 1\frac{1}{10} : \frac{11}{15}\right) : 5\frac{13}{40}} \quad \mathbf{R. 10.}$$

$$13. \frac{\left[7,25 + 11\frac{3}{4} - \left(3,092 + 9\frac{51}{125}\right)\right] : 6\frac{1}{4}}{2\frac{6}{11} \cdot 0,275 + 0,315\frac{3}{25} - 1,7} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,0256}} \quad \mathbf{R. 4.}$$

$$14. 213-32 \cdot \left[\frac{\left(15-9\frac{1}{3}\right):3\frac{7}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right)\frac{9}{71}} \cdot \left(\sqrt{0,6241}:\frac{1}{4}:0,79+\frac{1}{4}\right) \right]. \quad \text{R. 9.}$$

$$15. 9+4 \left[\frac{(1-0,1) \cdot 1\frac{2}{3}}{0,625+\frac{3}{8}+0,0625:\frac{1}{16}} + \sqrt{4,1616}:\frac{3}{25} \right] - \sqrt{14\frac{1}{16} + \frac{3}{4}}. \quad \text{R. 77.}$$

$$16. 10-4 \left[\frac{0,0625+\frac{15}{16}+\sqrt{4,1616}-\frac{1}{25}}{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4):(5^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2) \cdot 0,1+\frac{33,(3)}{6^2 \cdot 2^2}} \right]. \quad \text{R. 1.}$$

$$17. \frac{\left[\left(\frac{17}{5}+5\frac{4}{15}\right) \cdot 0,25 \cdot \frac{7}{13} - \left(\frac{15}{2}-0,5\right):7\right] \cdot 6 + \left(\frac{\sqrt{28}}{29}\right)^2}{\left(\sqrt{25,1001}-4\frac{7}{50}\right):0,03} \quad \text{R. 1.}$$

$$18. \frac{2\frac{3}{20}-1\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{6}+\frac{0,003}{0,25}:\frac{0,004}{0,2}-\frac{1}{2} \cdot 9\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1,5625}}{\left(2,625+\frac{3}{8}+0,0625+\frac{15}{16}\right)-\left(0,03125+\frac{31}{32}+1,25+\frac{3}{4}\right)} + \frac{4}{5}. \quad \text{R. 3.}$$

$$19. \frac{\left(\frac{27}{5}-5\frac{4}{15}\right) \cdot 0,25:\frac{1}{19}+\left(\frac{15}{2}-0,5\right):7}{\left(\sqrt{26,4196}-4\frac{7}{50}\right):0,125-6\frac{2}{3}}. \quad \text{R. 1.}$$

$$20. \frac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}\right) \cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1} \cdot 2 + \frac{\sqrt{24^2}}{144}. \quad \text{R. 30}$$

$$21. \frac{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)2\frac{2}{17}+40,5 \cdot \frac{2}{9}:9}{4:6,25-1:5+\frac{1}{7}\sqrt{3,8416}+0,28}:\sqrt{192} \cdot \sqrt{3}. \quad \text{R. 1.}$$

$$22. \frac{8-4,7:\left(5-0,8:2\frac{4}{6}\right)+\frac{4}{5}\cdot 1,25}{\left(5\frac{3}{9}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2}\cdot\frac{3}{8}. \quad \text{R. 1.}$$

$$23. 50,05-\left(1,5+3\frac{2}{3}\right)\cdot 7\frac{1}{2}:\sqrt{9,9\ 225}\cdot\frac{63}{31}-\left(1-2\frac{1}{5}:7\right)\cdot 1\frac{11}{24}-\frac{1}{20}. \quad \text{R. 24.}$$

$$24. \frac{\left(4\frac{3}{10}:3\frac{7}{12}-0,2\right)\cdot 55}{2\frac{7}{12}-0,25\cdot 9\frac{1}{3}\cdot 3\frac{13,75}{6}\cdot\frac{3}{127}}+\frac{\sqrt{9,2416}}{2}+14\frac{12}{25}. \quad \text{R. 40.}$$

$$25. \frac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{15}\right)\cdot 30}{1\frac{1}{3}}+\frac{4\frac{1}{4}\cdot 0,85+1:\sqrt{0,25}}{(5,56-\sqrt{16,4836}):3}. \quad \text{R. 37}$$

$$26. \frac{\frac{10}{2}+13\frac{1}{2}-4\frac{2}{3}\cdot 3\frac{3}{4}+4,8:\frac{6}{25}}{6\frac{3}{7}-1:0,7}\left(\frac{7}{8,9-2,6}:\frac{2}{3}\right):\sqrt{196}\cdot(\sqrt{2})^2. \quad \text{R. 1.}$$

$$27. \frac{\left(1\frac{16}{75}+2,46\right):(55,1:5)}{1\frac{2}{3}:1\frac{8}{9}\left(\frac{2}{15}+0,15\right)}+\frac{9,72-6\frac{13}{25}}{\sqrt{1\ 640,25}\cdot\frac{2}{9}\cdot 9}. \quad \text{R. } 4\frac{8}{15}.$$

$$28. \frac{\left(15-9\frac{1}{3}\right):2\frac{5}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right):\frac{9}{71}}\left(\sqrt{0,5\ 041}-\frac{1}{4}\right):\left(0,71+\frac{1}{4}\right). \quad \text{R. } 1\frac{1}{16}.$$

$$29. 2+0,125\cdot\frac{5\frac{8}{3}\left(4,2-3\frac{7}{11}+\frac{9}{55}\right)\cdot\frac{3}{23}}{4,8:5\frac{7}{10}\cdot 1\frac{3}{16}-\left(3\frac{1}{7}-2,8\right)\cdot 1\frac{1}{6}}-\sqrt{3\frac{37}{121}}. \quad \text{R. } \frac{1}{3}.$$

$$30. \frac{\left(5,225 - \frac{5}{9} - 3\frac{5}{6}\right)\frac{36}{43} + 1,3}{\left(2\frac{23}{50} + 1\frac{16}{75}\right) : (55,1:5) - 0,09 + \frac{227}{300}} \quad \text{R. 2.}$$

$$31. \frac{\frac{5}{16} : 0,125 + 1,456 : \frac{91}{250} + 4\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2,652 : 1,3 - 1\frac{17}{30} + \frac{3}{50}}{\left(\sqrt{1,7956} + 1\frac{1}{10} : \frac{11}{15}\right) : 5\frac{13}{40}}}{\quad} \quad \text{R. 9.}$$

$$32. \text{ Se dau mulțimile: } A = \left\{ \frac{\sqrt{275}}{\sqrt{11}}; \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}; 2 \right\}, B = \left\{ \frac{\sqrt{325}}{\sqrt{13}}; \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} \right\}.$$

a) Să se determine $A \cap B$ și $A \cup B$. b) Să se determine $A - B$ și $B - A$. c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor: $p: B \subset A$; $r: A \sim B$.

R. a) $A \cap B = \{5; 3\}$; b) $A \cup B = \{2; 3; 5\}$;

c) p : adevărată, r : falsă.

33. Să se calculeze expresia:

$$E = \left(\frac{2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{5}}{1\frac{1}{7} - \frac{3}{5}} + \frac{1}{2} \right) : \frac{\left[1\frac{1}{2} + 1,(7) \right] \cdot \left[2,(3) - \frac{1}{2} \right]}{2,(3) + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1,(7)-1}{1,(7)+1} + \frac{18}{25}}}{3 - (10^2 - 9^2) \cdot 0,(142857)} \quad \text{R. 21.}$$

34. Se dau expresiile:

$$A = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(0,5 + 2\frac{1}{3} \right) + 0,6 : \frac{1}{5}}{2\sqrt{0,0121}}, B = \sqrt{\frac{0,01 + 0,001 + 0,0001 + 1 : 1\,000}{\left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) : \left(1 - \frac{1}{4} \right)}}, C = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2}.$$

Să se calculeze valoarea lui x din expresia $\frac{B}{C} = \frac{A}{x}$.

$$\text{R. } x = \frac{15}{0,011}.$$

35. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției: $p: M \cap N = M - N = C_M N$ unde $M = \{2, 3\}$ și $N = \{4, 5\}$.

R. falsă.

36. Se dau mulțimile $M = \{x \in N \mid 2 < x < 12 \text{ și } 3 \mid x\}$, $N = \{x \in N \mid 8 < x < 14 \text{ și } 9 \mid x\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: M \cap N =$ soluția ecuației:

$$\frac{\sqrt{8 \cdot 27}}{\sqrt{6}} x - \frac{4x}{9} - 5x = 5.$$

$$\text{R. } M \cap N = \{9\}; x = 9.$$

37. Se dă egalitatea $\frac{\sqrt{48}}{3} - \frac{x}{4} + \frac{3x}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ definită pe mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 8 \text{ și } 2 \mid x\}$. Să se determine soluția ecuației.

R. identitate.

38. Să se determine x din egalitatea $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{125}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{3x}{15} = \frac{x}{5}$

R. $x = \frac{40}{3}$.

39. Se dau mulțimile $A = \{3; 5; 8; 2\}$, $B = \{3; 5; 2; 7\}$. Să se arate că $A - B$ este soluția ecuației: $\frac{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5) : (3^2 \cdot 5^4 \cdot 2^4)}{5 : 2} + \frac{x}{8} = \frac{x}{2} - 2$.

R. $A - B = \{8\}$; $x = 8$.

40. Se dă egalitatea $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}} - \frac{\frac{x}{2}}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{9} = 6$. Să se arate că soluția ecuației aparține mulțimii $A = \{9; 10; 12\}$.

R. 9.

41. Să se determine x din egalitatea: $\frac{\sqrt{27}}{9} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4x}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{x}{3} + 1$

R. $x = 3$.

42. Se dau mulțimile $A = \{\sqrt{144}; \sqrt{121}; \sqrt{169}\}$; $B = \{\sqrt{169}; \sqrt{225}; \sqrt{256}\}$.

a) Să se determine $A \cup B$ și $A \cap B$, elementele mulțimilor fiind numerele rezultate din extragerea rădăcinii pătrate. b) Sînt egale aceste mulțimi?

R. a) $A \cup B = \{11; 12; 13; 15; 16\}$; $A \cap B = \{13\}$; b) $A \neq B$.

43. Suma a două numere este a , raportul lor este $\frac{b}{c}$. În funcție de mărimile date să se arate care sînt cele două numere.

R. $\frac{ab}{b+c}$; $\frac{ac}{b+c}$.

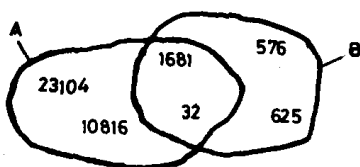


Fig. II.1.

44. Fie mulțimile A și B ca în figura 2.1: Să se determine $C \cup D$, elementele mulțimilor C și D fiind numerele naturale obținute prin extragerea rădăcinii pătrate a numerelor din A și B .

R. $C \cup D = \{18; 24; 25; 41; 104; 152\}$.

45. Suma a două numere este $\sqrt{2 \cdot 601}$ raportul lor este $\sqrt{\frac{25}{144}}$. Să se determine cele două numere.

R. 15; 36.

46. Se dă mulțimea $M = \{\sqrt{107,1225}; \sqrt{309,76}; \sqrt{2,2201}\}$. În ce caz mulțimea $A = \{a; 1; 49\}$ este o submulțime a mulțimii M ?

R. Dacă $a = 10,35$ sau $17,6$.

47. Diferența a două numere este $\sqrt{12, 3\ 201}$ raportul lor este $\frac{2,5}{6,4}$ să se calculeze aceste numere.

R. 5,76; 2,25.

48. Diferența a două numere este b iar raportul lor este $\frac{c}{d}$ unde $d > c$. Să se exprime aceste numere.

R. $\frac{bc}{d-c}$; $\frac{db}{d-c}$.

49. Fie mulțimile:

$$A = \left\{ \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3}, \sqrt{3^4 \cdot 4^2 \cdot 2^5}, \sqrt{4^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2} \right\}, B = \left\{ \sqrt{\frac{2^3}{5^2} \cdot \frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{5^3}{3^2}}, \sqrt{4^2 \cdot 5^6 \cdot 7^4}, \sqrt{4 \cdot 27 \cdot 125} \right\}.$$

a) Să se scrie elementele mulțimilor A și B după extragerea rădăcinilor pătrate.

b) Să se determine $\text{Card } A + \text{Card } B$; c) $A \cup B$; $A \cap B$.

$$\text{R. a) } A = \{30\sqrt{15}; 144\sqrt{2}; 140\sqrt{5}\}; B = \left\{ 2\sqrt{\frac{2}{3}}; 30\sqrt{15}; 24\sqrt{500} \right\}$$

b) 6; c) $A \cap B = 30\sqrt{15}$.

50. Suma a două numere este 432 iar cîțul lor este 8. a) Care sînt cele două numere ?

b) În această problemă să considerăm suma S și cîțul rezultat " n ". Să se scrie cele două numere prin S și n .

R. a) 384; 48; b) $\frac{S}{n+1}$; $\frac{nS}{n+1}$.

51. Fie mulțimea $A = \left\{ \sqrt{1,0816}; \frac{\sqrt{5,76}}{1,2}; \left(\sqrt{4^2} \right)^2; x \right\}$. a) Să se găsească cardinalul lui A .

b) Să se alcătuiască o proporție din elementele mulțimii A și să se determine x .

52. Suma a două numere este 65. Dacă împărțim aceste numere (cel mai mare la cel mai mic) obținem cîțul 5 și restul 5. a) Să se determine aceste numere. b) Să se exprime numerele considerînd suma S , cîțul C și restul r . c) Să se determine x din

$$\text{proporția } \frac{\sqrt{6,25}}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{\sqrt{2,25}}.$$

R. a) 55; 10; b) $\frac{SC+r}{C+1}$; $\frac{S-R}{C+1}$, $x=5$.

53. Suma a două numere este 495. Unul din numere se termină cu zero. Dacă acestuia i se taie zeroul se obține cel de-al doilea număr. Care sînt cele două numere ?

54. Fie mulțimile $E = \{x \in N | x < 11\}$; $A = \{0; 1; 2\}$; $B = \{3; 4; 5\}$; $C = \{6; 7; 8\}$. a) Să se găsească $\text{Card } (A - C \cap B)$. b) Să se determine $\text{Card } ((A - B) \cup (B - C) \cup (C - A))$ și $\text{Card } (A \cup B) \cup C$.

R. a) 1; b) 9.

55. Diferența între vîrsta tatălui și a fiului este de 50. Raportul vîrstelor lor este $\frac{3}{8}$.

a) Cîți ani are tatăl și cîți ani are fiul ? b) Considerăm diferența vîrstelor " a " ani și raportul vîrstelor lor $\frac{b}{c}$; $b < c$. Să se exprime vîrstele tatălui și fiului.

R. a) 80; 30 ani; b) $\frac{ab}{c-b}$; $\frac{ac}{c-b}$.

56. Să se calculeze media proporțională a numerelor $\sqrt{5^2 \times 10^2}$ și $\sqrt{2^2}$
R. 10.
57. Se dau mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} | x < 10\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} | 11 < x < 20\}$.
Să se găsească Card $A + \text{Card } B$.
R. $9+8=17$.
58. Lungimea drumului de la București la Bacău este de 302 km. Pe o hartă această distanță are lungimea de 15,1 cm. Care este scara acestei hărți ?
R. $\frac{1}{2\,000\,000}$.
59. Distanța de la București la Drăgășani este de 240 km. Cît va măsura această distanță pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\,000\,000}$?
R. 12 cm.
60. Pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\,000\,000}$ drumul de la Iași la București este de 20,4 cm. Care este în realitate această distanță ?
R. 408 km.
61. În cît timp se poate parcurge cu bicicleta o distanță care pe hartă este de 32 cm, dacă scara hărții este de $\frac{1}{50\,000}$ iar viteza biciclistului este de 8 km pe oră ?
R. 2 ore.
62. Se dau mulțimile: $M = \{x \in \mathbb{N} | 400 < x < 411\}$; $P = \{x \in \mathbb{N} | 409 < x < 413\}$.
a) Să se scrie mulțimile enumerînd elementele. b) Să se găsească card $M + \text{card } P$.
R. b) 13.
63. Un excursionist care are viteza de 4 km pe oră, trebuie să parcurgă o distanță care pe harta lui cu scara $\frac{1}{100\,000}$ măsoară 2,4 cm. La ce oră va trebui să pornească la drum, ca să fie la destinație la ora 16 ?
R. ora 15 și 24 minute.
64. Să se calculeze: a) Card $\{0\} + \text{Card } \{0\}$; b) $\{\text{Card } \{0\} \cup \text{Card } \{0\}\}$.
R. a) 2; b) 1.
65. La construirea unui zid s-au întrebuițat 18 400 cărămizi. Cîte cărămizi trebuie pentru construirea unui alt zid, dacă raportul dintre lungimea zidului al doilea și lungimea primului zid este $\frac{7}{12}$, raportul grosimilor este de $\frac{3}{2}$, iar raportul înălțimilor de $\frac{5}{14}$?
R. 5 750 cărămizi.
66. Se știe că: Card $A=20$; Card $B=40$; Card $(A \cup B)=50$. Sînt disjuncte mulțimile A și B ?
R. Nu.
Card $A=20$; Card $B=63$ și Card $(A \cup B)=83$. Ce se poate spune despre mulțimile A și B ?
R. Sînt disjuncte.
67. 5 pompe în 3 ore extrag 1 800 cîldări de apă; 4 pompe în 4 ore, cîte cîldări de apă extrag ?
R. 1 920.

68. 5 muncitori lucrează 100 de piese în 10 ore. Cîte ore sînt necesare pentru ca trei muncitori să lucreze cu 20% piese mai mult decît cei 5 muncitori ?

R. 20 ore.

69. Pentru încălzirea a patru sobe în $8\frac{1}{2}$ luni s-au întrebuițat 10,88 tone de cărbune. Cîte sobe se pot încălzi cu 9,6 tone de cărbune timp de $2\frac{1}{2}$ luni, norma fiind aceeași?

R. 12 sobe.

70. Una din roțile dințate ale unei mașini face 240 învîrtituri în 3 minute și are 60 de dinți. Cîte învîrtituri pe minut va face altă roată care are 48 dinți și este prinsă de prima roată ?

R. 100 învîrtituri.

71. Mulțimea A are ca elemente numerele rezultate din scrierea numărului 28, folosind adunarea și numai cifra 2 de 5 ori. Mulțimea B are ca elemente numerele rezultate din scrierea lui 120 folosind tot adunarea și cifra 8 de 6 ori. Să se scrie $A \cup B$ și $A \cap B$.

R. $A = \{2; 22\}; B = \{8; 88\}; A \cup B = \{22; 2; 88; 8\}; A \cap B = \emptyset$.

72. Două dactilografe au primit pentru lucrarea efectuată o sumă oarecare de bani pe care trebuie s-o împartă între ele în raportul 4:1; astfel prima dactilografa efectuînd o parte mai mare a obținut cu 105 lei mai mult decît a doua. Ce sumă au încasat ele pentru toată lucrarea ?

R. $140 + 35 = 175$ lei.

73. O sumă de bani a fost împărțită la trei persoane. Să se afle ce sumă a luat fiecare, știind că sumele primite sînt proporționale cu 5, 8, 3 și că prima a primit cu 200 de lei mai mult decît a treia.

R. 500 lei; 800 lei; 300 lei.

74. Fie mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} | n < 4\}$. Să se scrie mulțimea: $B = \{(a; b) | a \in A; \text{ și } b \in A; a + b \in C\}$ unde mulțimea $C = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$.

R. $A = \{0; 1; 2; 3\}; B = \{(0; 1); (0; 2); (1; 0); (2; 0)\}; C = \{0; 1; 2\}$

75. Laturile unui triunghi ABC sînt de 3 cm, 4 cm, 5 cm, ele sînt proporționale cu ale altui triunghi $A'B'C'$ ce are perimetrul de 24 cm. Să se calculeze aria $\Delta A'B'C'$.

R. 24 cm^2 .

76. Să se scrie egalitățile următoare sub formă de proporții: $a^2 = bc$; $(x+y)(x+y) = m^2$; $(a-b)m = (a+b)n$; $(m \cdot n) \cdot k = (m+n)^2$. Prin mutarea termenilor, să se formeze din proporțiile date proporții noi.

77. Să se extragă pe cale grafică rădăcina pătrată din numărul 35 și apoi să se verifice prin calcul rezultatul obținut.

Indicație. Se ține seama că $35 = 5 \cdot 7$. Se va lua o unitate de măsură după voie, de exemplu centimetrul, se va construi media proporțională între 5 cm și 7 cm, apoi se va măsura segmentul obținut.

78. Sporurile încasate de trei muncitori pentru orele de noapte efectuate într-o lună

sînt proporționale cu $0,75$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{15}$. Cît a încasat fiecare, dacă primul a încasat cu 25 lei mai mult decît al doilea ?

R. { 225; 200; 320 }.

79. Se dau mulțimile $A = \{0; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$. a) Să se scrie mulțimea $P = A \cup B$. b) Cît este cardinal de P ?

R. Card $P = 5$.

80. Într-un triunghi ABC unghiul A este egal cu suma unghiurilor B și C . Să se afle fiecare unghi al triunghiului știind că raportul dintre unghiurile B și C este $\frac{2}{2,5}$ și cît la sută reprezintă unghiul cel mai mare față de cel mai mic ?

R. 90° ; 40° ; 50° ; 225% .

81. Raportul a două numere este $\frac{a}{b}$, iar diferența lor este c . Să se afle numerele dacă $a > b$; $c > 0$.

R. $\frac{ac}{a-b}$; $\frac{bc}{a-b}$.

82. Se dau mulțimile: $M = \{5; 6; 7; 10\}$; $S = \{5; 8; 7\}$. Să se determine $A = M \cap S$.

R. $\{5; 7\}$.

83. Să se verifice că dacă aria unui dreptunghi este constantă și mărim baza " a " de o sută de ori, înălțimea " h " a dreptunghiului se micșorează de același număr de ori.

84. Trei muncitori prelucurează 1 134 piese în 6 zile lucrînd fiecare respectiv 6, 7, 8 ore zilnic. Cîți muncitori vor prelucra 1 620 piese în patru zile lucrînd fiecare cîte 6 ore zilnic, dacă viteza de prelucrare se mărește de 1,5 ori față de primul caz și dacă între muncitori nu sînt deosebiri de îndemînare ?

R. 5 muncitori.

85. Să se împartă numărul 1 080 în două părți astfel încît 5% din prima parte să fie egal cu 4% din a doua parte.

R. 480; 600.

86. Suma a două numere este $285\frac{3}{4}$; primul număr reprezintă 14,3% din cel de-al doilea. Să se găsească aceste numere.

R. 35; 75; 250.

87. În trei clase dintr-o școală elementară sînt 192 elevi. Numărul elevilor din cl. a II-a reprezintă $16\frac{2}{3}\%$ din numărul total al elevilor, numărul elevilor din cl. a III-a reprezintă 125% din numărul elevilor din cl. a II-a. Cîți elevi sînt în cl. a II-a și a III-a luate împreună?

R. 72 elevi.

88. Fonta conține 3,5% carbon, 1,5% siliciu, 1% mangan, $\frac{2}{5}\%$ fosfor, și 0,01% sulf. Să se determine cantitatea în kg a acestor elemente dintr-o tonă de fontă.

R. 35 kg; 15 kg; 10 kg; 4 kg; 0,1 kg.

89. Într-un manej sînt 12 cai. Într-o zi au venit la antrenament 12 călăreți amatori. a) Să se stabilească corespondența ce se poate exprima între cele două mulțimi (cai și călăreți). b) Să se reprezinte această corespondență printr-un desen.

90. Există $x \in \mathbb{N}$ pentru ca $x+1 \leq 3$? Care sînt aceste numere ?

R. $x = \{0; 1; 2\}$.

91. Ciupercile proaspete conțin 90% apă iar cele uscate 12% apă. Ce cantitate de ciuperci uscate se pot obține din 10 kg de ciuperci proaspete ?

R. $\approx 1,14$ kg.

92. La scriere numărului 4 056 s-a omis cifra 0. Să se afle: a) eroarea absolută; b) eroarea relativă (cu aproximatie de 0,1%); c) cîte procente reprezintă numărul dat, față de numărul scris greșit (cel nou); d) cu cîte procente este mai mic numărul cel nou, decît numărul dat.

R. a) 3 600; b) 88,8%; c) 889,5%; d) 88,8%.

93. Să se arate că dacă avem mulțimile: $M = \{1; 5; 9; 13\}$; $P = \{x \in \mathbb{N} | x = 4n - 3, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$, atunci $\text{Card } M < \text{Card } P$.

R. $P = \{1; 5; 9; 13; 17\}$. $\text{Card } M = 4$; $\text{Card } P = 5$; $4 < 5$.

94. Un atelier poate să execute o comandă în 4 zile; un alt atelier, în 3 zile. Executînd împreună lucrarea, amîndouă atelierele au efectuat-o în $1\frac{1}{2}$ zile, fiecare atelier executînd $\frac{1}{2}$ din lucrare. În care ateliere s-a mărit productivitatea muncii, și de cîte ori ?

Soluția I-a. Primul atelier putea efectua într-o zi $\frac{1}{4}$ din lucrare, al doilea $\frac{1}{3}$. Lucrînd $1\frac{1}{2}$ zile, primul atelier ar fi făcut $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ din lucrare. Problema spune că a efectuat $\frac{1}{2}$ din lucrare, deci mai mult decît $\frac{3}{8}$; rezultă că primul atelier și-a mărit productivitate muncii de $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ori. Al doilea atelier, lucrînd $1\frac{1}{2}$ zile, face $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ din lucrare fără a-și mări productivitatea muncii.

Soluția II-a. Primul atelier executînd $\frac{1}{2}$ din lucrare în $1\frac{1}{2}$ zile, înseamnă că ar fi putut termina toată lucrarea în trei zile, în loc de 4 zile, deci că face $\frac{1}{3}$ din lucrare pe zi, în loc de $\frac{1}{4}$. Deci, productivitatea s-a mărit de $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ori. Al doilea atelier, efectuînd $\frac{1}{2}$ din lucrare în $1\frac{1}{2}$ zile, urmează că toată lucrarea a fost terminată în 3 zile (nu și-a mărit productivitatea).

95. Pentru o instalație s-a întrebuițat un sul de sîrmă în felul următor: în prima zi s-a întrebuițat $\frac{1}{3}$ din sîrmă și încă 90 m; în a doua zi s-a întrebuițat $\frac{1}{3}$ din rest și încă 60 m; în a treia zi s-a întrebuițat $\frac{1}{3}$ din noul rest plus 20 m; în a patra zi

s-au întrebuițat 40 m rămași. a) Cîți metri de sîrmă avea sulul ? b) Fie M și N mulțimile a căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă lungimea totală a sîrmei respective și lungimea unei treimi din ea. Să se determine $M \cup N$ și $M \cap N$. c) Să se prezinte graficul $M \cap N$.

Indicație. Utilizăm metoda mersului invers, adică pornim cu raționamentul de la finele problemei.

R. 472,5 m.

96. Un grup de băieți s-au dus la râu să se scalde. 8 dintre ei au trecut înot pe celălalt mal al râului, apoi au mai trecut jumătate din cei rămași și atunci pe malul celălalt au fost de două ori mai mulți băieți decât cei rămași. Câți băieți s-au dus să se scalde?

Indicație. Considerăm situația după ce au trecut pe cel de-al doilea mal 8 băieți și încă un grup ce reprezintă $\frac{1}{2}$ din cei rămași pe mal. Grupul de băieți de pe acest mal reprezintă un număr de 2 ori mai mare decât acela al băieților rămași pe primul mal. Așadar avem pe ambele maluri trei grupe egale de câte 8 băieți fiecare, de unde rezultă că în total sînt 24 băieți.

R. 24 băieți.

97. Într-o sală de festivități a unei școli se pun bănci. Dacă în fiecare bancă s-ar așeza câte 5 elevi, ar mai trebui 8 bănci, dar dacă în fiecare bancă s-ar așeza câte 6 elevi, ar rămîne goale două bănci. a) Cîte bănci erau în sală ?

Indicație. Rămîn $8 \cdot 5 = 40$ de elevi fără bănci; cei 40 elevi completează $40:1 = 40$ de bănci. Dar mai rămîn încă 2 bănci libere adică cei $2 \cdot 5 = 10$ elevi, din aceste bănci, vor trebui să se așeze cîte unul în băncile care au numai cîte 5 elevi. Astfel vor completa încă 10 bănci, pe lîngă cele 40; mai sînt 2 bănci libere.

R. 52 bănci.

98. Cu aceeași sumă de bani doi elevi au cumpărat caiete. Primul a cumpărat cu 5,60 lei bucată și i-au rămas 4 lei, cel de-al doilea a cumpărat cu 4,80 lei bucată și i-au rămas 2,40 lei. Știind că primul elev a cumpărat cu 2 caiete mai puțin decât al doilea, să se afle ce sumă a avut fiecare și cîte caiete s-au cumpărat.

Indicație. Dacă și cel de-al doilea elev ar fi cumpărat același număr de caiete (cu 2 mai puțin), i-ar fi rămas: $2 \times 4,80 + 2,40 = 12$ lei, adică i-ar fi rămas în plus față de primul elev: $12 - 4 = 8$ lei. Această diferență provine din faptul că l-a costat un caiet $5,60 - 4,80 = 0,80$ lei mai puțin.

R. 60 lei; 10 caiete; 12 caiete.

99. O asociație de viticultori trebuie să altoiască cîte 50 butuci de vie zilnic. Asociația a altoit în fiecare zi cîte 56 butuci și a terminat lucrarea cu 3 zile înainte de termen, depășind planul cu 120 de butuci altoiți. Să se afle cîți butuci de vie trebuia să altoiască după plan ?

Indicație. Lucrînd cîte 56 butuci pe zi, în 3 zile se realizează 168 butuci. S-ar fi depășit deci planul în total cu $120 + 168 = 288$ de butuci. Această depășire provine din depășirea zilnică cu 6 butuci de vie.

R. 2 400.

100. O cooperativă de producție trebuia să semene conform planului cîte 40 ha pe zi. Depășind norma, se lucrează în 3 zile 156 ha. Lucrînd în același ritm, termină semănatul cu 2 zile înainte de termen și realizează cu 4 ha mai mult decât era prevăzut în plan. a) Cîte hectare a semănat ? b) Fie H mulțimea ale cărei elemente sînt cifrele scrise în ordinea crescătoare a numărului ce reprezintă totalul de hectare semănat și D mulțimea ale cărei elemente sînt cifrele scrise în ordine descrescătoare a aceleiași număr. Să se determine $H \cup D$; $H \cap D$.

Indicație. Dacă s-a r fi lucrat întreg numărul de zile prevăzute în plan, planul ar fi fost depășit cu încă

104 ha, deci în total s-ar fi obținut 108 ha depășite. Depășirea zilnică fiind de 12 ha, depășirea totală s-ar fi obținut în 9 zile.

R. a) 364 ha; b) $H = \{3; 4; 6\}$; $D = \{6; 4; 3\}$;
 $H \cup D = H \cap D = \{3; 4; 6\}$.

101. C.m.m.d.c. a două numere este 2. C.m.m.m.c. al acestor numere este 60. Să se găsească aceste numere, știind că raportul lor este $\frac{5}{6}$.

R. 10; 12.

102. Un elev are o sumă de bani. Dacă dă fratelui lui un leu îi mai rămâne pe jumătate cât are acum fratele lui, dacă însă fratele lui îi dă un leu, atunci ei vor avea sume egale. Câți lei are fiecare (soluție aritmetică) ?

R. 5 lei și 7 lei.

GEOMETRIE

II.8. UNGHIURI

1. Să se facă următoarele calcule cu grade, minute și secunde.
 - a) $35^{\circ}43'28'' + 46^{\circ}32'43'' - 15^{\circ}27'8''$,
 - b) $24^{\circ}85'72'' + 86^{\circ}320'245'' + 1^{\circ}320''$,
 - c) $85^{\circ}12'46'' - 24^{\circ}37'32''$, d) $120^{\circ} - 85^{\circ}26'38''$,
 - e) $84^{\circ}98'305'' - 24^{\circ}350'430''$, f) $(28^{\circ}18'27'') \cdot 4$,
 - g) $(57^{\circ}23'15'') : 5$, h) $(16^{\circ}342'84'' + 8^{\circ}316'94'') \cdot 4 : 3$.
2. Să se afle în grade, minute și secunde complementele unghiurilor de 45° ; 32° ; 18° ; $84^{\circ}72''$; $31^{\circ}94'102''$.
3. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{2}{7}$. Să se determine măsurile acestor unghiuri. R. 20° ; 70° .
4. Să se construiască două unghiuri adiacente, a căror sumă să fie egală cu 126° și unul din unghiuri să fie $\frac{1}{2}$ din celălalt. R. 84° ; 42° .
5. Două drepte D și Δ sînt concurente în punctul A . Să se scrie această relație. R. $\Delta \cap D = \{A\}$.
6. Să se calculeze măsura unghiului care reprezintă $\frac{3}{5}$ din măsura unghiului la centrul unui cerc care cuprinde între laturile lui un arc egal cu a 8-a parte din cerc. (Unghiul de la centrul unui cerc se măsoară prin arcul cuprins între laturile sale.) R. 27° .
7. Două unghiuri adiacente au unul $27^{\circ}38'23''$ și celălalt 152° . Să se spună dacă laturile necomune sînt în prelungire.
8. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt în prelungire.

9. Două unghiuri sînt suplementare, unul dintre ele este $\frac{2}{7}$ din suplementul său. Unghiul cel mai mare se împarte în alte trei unghiuri A, B, C astfel $m(\angle B) > m(\angle A)$ cu 40° , $m(\angle C) = \frac{m(\angle A)}{3}$ plus 30° . Să se calculeze măsurile unghiurilor A, B, C (soluție aritmetică).

R. $m(\angle A) = 30^\circ$; $m(\angle B) = 70^\circ$; $m(\angle C) = 40^\circ$..

10. Să se arate că unghiul format de bisectoarea AO a unui unghi BAC cu o dreaptă oarecare AD dusă prin vârful unghiului în afară de unghi este egală cu semisuma unghiurilor, pe care această dreaptă le face cu fiecare dreaptă din laturile unghiului.

11. Un unghi este de 7 ori mai mare decît suplementul său. Să se afle măsurile acestor unghiuri.

R. $22^\circ 30'$; $157^\circ 30'$.

12. Un unghi este $\frac{2}{7}$ din complementul său. Să se calculeze măsura unghiului format de jumătatea unghiului celui mai mare și unghiul cel mai mic.

R. 55° .

13. Mediana dusă din unul din unghiurile egale ale unui triunghi isoscel împarte perimetrul lui în două părți de 15 cm și 6 cm. Să se calculeze baza triunghiului isoscel.

R. 1 cm.

14. Un unghi este $\frac{7}{8}$ din suplimentul său. Să se arate că $\frac{2}{3}$ din unghiul cel mai mare este cu un grad mai mare decît $\frac{3}{4}$ din unghiul cel mai mic.

15. Să se demonstreze că dacă suma măsurilor a 3 unghiuri este egală cu 90° atunci suma măsurilor complementelor lor este egală cu 180° .

Indicație. $90^\circ - a + 90^\circ - b + 90^\circ - c = 270^\circ - 90^\circ = 180^\circ$.

Să se facă această demonstrație prin construirea unghiurilor respective fără calcul. Să se generalizeze considerînd în loc de trei unghiuri, n unghiuri.

16. Să se demonstreze că două unghiuri care au același vîrf și laturile două cîte două perpendiculare sînt: sau congruente sau suplementare.

Indicație. Dacă unghiurile sînt amîndouă ascuțite sau amîndouă obtuze ele sînt congruente; cînd unul este obtuz și celălalt ascuțit ele sînt suplementare.

17. Să se demonstreze că unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente are măsura egală cu semisuma măsurilor celor două unghiuri.

18. În jurul unui punct sînt patru unghiuri consecutive AOB, BOC, COD, DOA , astfel că al doilea este dublul primului și încă 20° , al treilea este cu 10° mai puțin decît întreitul primului, iar al patrulea este de patru ori mai mare decît primul și încă 30° . Cîte grade are fiecare unghi ?

R. 32° ; 84° ; 86° ; 158° .

19. Se dă unghiul AOB ; să se construiască unghiul COD care să fie suplementul primului unghi și să aibă aceeași bisectoare cu el.

Indicație. Se duc semidrepte perpendiculare în O pe OA și OB .

20. Fie OC bisectoarea unghiului AOB , iar OM o dreaptă oarecare. Să se arate că

$m(\angle COM)$ este semidiferența sau semisuma măsurilor unghiurilor AOM și BOM după cum OM este interioară sau exterioară unghiului AOB .

Indicație. $m(\angle AOM)=a$; $m(\angle MOB)=b$; $m(\angle COM)=c$, avem $a-c=b+c$.

21. Se dă unghiul AOB , se duc prin O semidreptele OA' și OB' astfel ca OB să fie bisectoarea unghiului AOA' iar OA să fie bisectoarea unghiului BOB' . Cum trebuie să fie unghiul AOB pentru ca semidreptele OA' ; OB' să fie sau în prelungire sau perpendiculare ?

Indicație. $m(\angle A'OB')=3m(\angle AOB)-m(\angle AOB)$ este de 60° sau 30° .

IL9.TRIUNGHIURI

22. Să se demonstreze că dacă ducem o perpendiculară pe bisectoarea unui unghi, ea formează cu laturile unghiului un triunghi isoscel.

Indicație. (Se vor observa două triunghiuri congruente.)

23. Să se demonstreze că medianele duse din extremitățile bazei unui triunghi isoscel sînt congruente. Aceeași proprietate, să se demonstreze și pentru bisectoarele și înălțimile duse din aceleași extremități.

24. Pe laturile triunghiului echilateral ABC , se iau, în același sens, lungimile egale AM , BN , CP ; să se arate că triunghiul MNP este și el echilateral.

25. Pe o latură a unui unghi xOy se iau două lungimi oarecare OA și OB , $A \in OX$ și $B \in OY$, iar pe cealaltă latură se iau lungimile $OC=OA$ și $OD=OB$; $AD \cap BC = \{M\}$. Să se demonstreze că OM este bisectoarea unghiului xOy .

26. Să se demonstreze că în două triunghiuri congruente segmentele determinate de înălțimile sau bisectoarele corespunzătoare unghiurilor congruente pe laturile opuse sînt congruente.

27. Să se demonstreze că distanțele a două din vîrfurile unui triunghi la mediana ce corespunde vîrfului al treilea sînt congruente.

28. Să se arate că dacă într-un triunghi dreptunghic catetă este egală cu jumătate din ipotenuză, atunci unghiul opus acelei catete este de 30° .

29. Se prelungesc în același sens laturile BC , CA , AB ale unui triunghi echilateral ABC cu lungimile $CA'=AB'=BC'$. Să se demonstreze că $\Delta A'B'C'$ este și el echilateral.

30. Fie unghiul xOy și OP bisectoarea unghiului. Punctul $M \in OP$. Se duc perpendicularele MA și MB pe Ox și Oy ; $MB \cap Ox = \{B'\}$; $MA \cap Oy = \{A'\}$. a) Să se arate că $MA'B'$ este un triunghi isoscel. b) $OM \cap A'B' = \{N\}$. Să se arate că ON este bisectoarea unghiului $A'MB'$.

31. În triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, se duc înălțimile BB' și CC' . Să se arate că $\Delta AB'C'$ este isoscel. Să se arate că și în cazul când BB' și CC' sînt bisectoare, $\Delta AB'C'$ este isoscel.

32. Să se demonstreze că dacă două triunghiuri sînt simetrice față de o axă atunci și medianele și înălțimile celor două triunghiuri sînt simetrice față de aceea axă.

33. Se dă Δ isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$; AD înălțime; $N \in AD$. Fie N' și N'' simetrice lui N față de AB și AC . Să se arate că $\Delta AN'N''$ este isoscel. Ce fel de patrulater este $AN'NN''$?

34. Se dă ΔABC dreptunghic în A . Fie $M \in BC$; M' și M'' simetrice lui M față de catetele AB și AC . Să se arate că $\Delta MM'M''$ este dreptunghic și că M', A, M'' sînt puncte coliniare.

35. Să se demonstreze că o mediană a unui triunghi este mai mică decît semisuma laturilor care pornesc din același vîrf.

Indicație. Fie media AD în ΔABC ; se construiește simetricul punctului A față de punctul D .

36. Să se demonstreze că suma medianelor unui triunghi este mai mică decît perimetrul triunghiului.

Indicație. Se folosește indicația din problema precedentă, pentru fiecare mediană.

37. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct oarecare D . Să se demonstreze că AD este mai mică decît semiperimetrul triunghiului ABC dar mai mare decît diferența dintre semiperimetrul acestui triunghi, și latura BC .

Indicație. $AD < AB + AC$ și $AD > AC - AB$.

38. Fie un patrulater $ABCD$ în care știm că AD este latura cea mai mare iar BC latura cea mai mică. Să se arate că $m(\angle B) > m(\angle D)$.

39. Se dă ΔABC în care $AC > AB$. Să se demonstreze că cel mai mare dintre unghiurile făcute de mediana AD cu latura BC este acela care se opune la latura cea mai mare dintre laturile AC și AB .

Indicație. Se consideră triunghiurile ABC și ADC sau se folosește înălțimea dusă din A .

II.10. LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

40. Fie triunghiul echilateral ABC și AD înălțimea ($D \in BC$). Mediana dusă din D intersectează pe AC în M . Să se arate că: 1) $DM = DC = \frac{AC}{2}$; 2) ΔADM este isoscel.

Indicație. Fie D' simetricul punctului D în raport cu punctul M . Patrulaterul format $ADCN$ este dreptunghi.

Observație. Într-un triunghi dreptunghic cateta opusă unghiului de 30° și mediana dusă din unghiul drept pe ipotenuză sînt congruente și egale fiecare cu jumătate din ipotenuză.

41. Bisectoarele unghiurilor consecutive A și B ale paralelogramului $ABCD$ se intersectează în $N(N \in CD)$. Fie NM mediana triunghiului ANB .

1) Să se arate că $AMND$ este paralelogram.

2) Triunghiul AMN este isoscel.

42. Se dă triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, în care AD este înălțime ($D \in BC$). Fie M și N mijloacele catetelor AB și AC și $MN \cap AD = \{O\}$. Să se arate că:

1) $\triangle AMD$ isoscel; 2) $AO \perp MN$.

43. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC mediana AD este egal depărtată de B și C .

Indicație. Din B și C se duc perpendiculare pe AD . Se vor observa triunghiurile formate.

44. O mediană într-un triunghi este mai mică decât semisuma laturilor adiacente.

Indicație. Se prelungește mediana cu o lungime egală cu ea și se va observa triunghiul în care o latură este înădăit mediane.

45. În două triunghiuri congruente medianele, bisectoarele și înălțimile corespunzătoare la două laturi omoloage sînt congruente.

46. Între două sate A și B trece o șosea S . Unde trebuie construită pe șosea o stație de autobuz ca să fie la egală depărtare de ambele sate ?

R. La intersecția mediatoarei segmentului AB cu șoseaua.

47. Două șosele Ox și Oy sînt așezate astfel $xO \cap yO = \{O\}$. Pe șoseaua xO se află o combină de treierat A , iar pe șoseaua yO o combină B . Unde trebuie așezat un stîlp cu lumină ca să fie egal depărtat de cele două combine și egal depărtat de cele două șosele ?

Indicație. Se vor folosi proprietățile bisectoarei și a mediatoarei.

48. Unde trebuie să se construiască o fîntînă F între două șosele paralele Δ și Δ' pentru ca să fie egal depărtată de două sate A și B în cazul cînd $A \in \Delta$ și $B \in \Delta'$ sau $(A \text{ și } B) \in \Delta$ sau $(A \text{ și } B) \in \Delta'$?

49. Să se determine un punct egal depărtat de trei puncte date ce nu sînt situate pe aceeași linie dreaptă.

50. Se dă triunghiul dreptunghic ABC $m(\angle A) = 90^\circ$ și $m(\angle B) = 60^\circ$. Să se afle: 1) unde trebuie să luăm un punct N pe ipotenuza BC astfel ca triunghiul ABN să fie echilateral; 2) unde trebuie să luăm un punct M pe cateta AC ca triunghiul ANM să fie isoscel; 3) AD fiind înălțimea ($D \in BC$) să se arate că $m(\angle DAN) = \frac{m(\angle A)}{3}$.

Indicație. AN mediană, BM bisectoare și NM mediatoarea segmentului BC . Se studiază triunghiurile ABM , BMN și AMN .

51. Fie dreapta AB și două puncte C și D de aceeași parte a ei. Să se afle punctul P pe dreapta AB așa fel încît $CP + PD$ să fie minimă.

Indicație. Fie C' simetricul punctului C față de AB ; $AB \cap CC' = \{I\}$, IP este mediatoarea segmentului CC' .

52. În ΔMNP , înălțimea $MA = \frac{NP}{2}$. Să se arate că unghiul M este ascuțit. În ce caz acest unghi poate fi drept?
53. Fie O mijlocul segmentului BC . Se duce semidreapta Ox și se ia pe această semidreaptă un punct A . Să se arate că dacă $OA = \frac{BC}{2}$ atunci $\angle BAC$ este drept.
54. Să se arate că pe un cerc punctul cel mai apropiat și punctul cel mai depărtat de un punct dat A sînt extremitățile diametrului ce trece prin A . (A situat în interiorul sau exteriorul cercului.)
55. La un cerc dat să se ducă o tangentă perpendiculară pe o dreaptă dată.
56. La un cerc dat să se ducă o tangentă care să facă cu o dreaptă dată un unghi dat α .
57. Fiind date trei puncte A, B, O să se afle o dreaptă ce trece prin O și este egal depărtată de punctele A și B .
58. Se dă triunghiul ABC în care $m(\angle B) - m(\angle C) = 90^\circ$. Fie AD bisectoarea unghiului A ($D \in BC$). Să se arate că $m(\angle ADC) - m(\angle ADB) = 90^\circ$.
59. Într-un triunghi ABC unghiul exterior B este cu 140° mai mare decît unghiul C și cu $\frac{2}{9}$ dr. mai mare decît unghiul A . Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.
60. Fie triunghiul ABC și D un punct în interiorul triunghiului astfel că $m(\angle ABD) = \frac{m(\angle A)}{2}$ și $m(\angle ACD) = \frac{m(\angle A)}{3}$. Să se arate că $\frac{m(\angle BAC)}{m(\angle BDC)} = \frac{6}{11}$.
61. Fie triunghiul ABC și AM bisectoarea interioară a unghiului A ($M \in BC$). Prin punctul B se duce o paralelă la AM care intersectează pe AC în D . Să se arate că:
1) $m(\angle ADB) = \frac{m(\angle BAC)}{2}$; 2) ΔADB este isoscel.
62. Fie N un punct în interiorul triunghiului ABC . Să se arate că $m(\angle BNC) > m(\angle BAC)$.
63. Pe laturile AB și CA ale triunghiului echilateral ABC se iau punctele C' și B' astfel ca $[AC'] \equiv [CB']$; $CC' \cap BB' = \{M\}$. Să se arate că $m(\angle BMC) = 120^\circ$.
Indicație. Triunghiul $BB'C \equiv \Delta AC'C$; $m(\angle BMC) = m(\angle BB'C) + m(\angle B'CC') = m(\angle AC'C) + m(\angle ACC') = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
64. Fie punctul D pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC . Să se arate că diferența măsurilor unghiurilor formate de AD cu BC este egală cu diferența măsurilor unghiurilor formate de AD cu laturile congruente.
65. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, C ale triunghiului ABC . Să se arate că $m(\angle AA'C) + m(\angle BB'A) + m(\angle CC'B) = 270^\circ$.
Indicație. $m(\angle AA'C) = \frac{m(\angle A)}{2} + m(\angle B)$; $m(\angle BB'A) = \frac{m(\angle B)}{2} + m(\angle C)$;
 $m(\angle CC'B) = \frac{m(\angle C)}{2} + m(\angle A)$.

IL11. CONGRUENȚA TRIUNGHILOR

66. Să se demonstreze că două triunghiuri isoscele care au bazele congruente și înălțimile ce cad pe ele congruente sînt congruente.

67. Să se arate că două triunghiuri isoscele sînt congruente dacă au unghiurile de la vîrf congruente și înălțimile ce cad pe baze congruente.

68. Să se demonstreze că două triunghiuri isoscele sînt congruente dacă au bazele congruente și înălțimile corespunzătoare congruente.

69. Se dă triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [BC]$, se prelungesc BA și CA cu segmentele $[AA'] \equiv [AB]$; $BB' \cap CA' = \{N\}$. Să se arate că triunghiul NBC este isoscel.

70. Măsura unghiului exterior unui triunghi este mai mare decît măsura fiecărui unghi interior al triunghiului nealăturat lui.

Indicație. Fie triunghiul ABC și C unghiul exterior. Se duce mediana din A pe latura BC și se prelungește cu un segment egal cu ea.

71. Fie M și N mijloacele laturilor AB și AC ale unui triunghi ABC . Să se arate că $MN = BC/2$.

Indicație. Simetricul punctului M în raport cu N este un alt punct M' . Se cercetează triunghiurile AMN și $NM'C$ și patrulaterul $MM'CB$.

72. În triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, se prelungește baza de o parte și alta cu segmentele $[BM] \equiv [CN]$. Fie AI mediana ($I \in BC$). Să se arate că $m(\angle MAI) = m(\angle NAI)$.

73. Într-un triunghi isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, se duc înălțimile CN și BM ($N \in AB$; $M \in AC$). Fie B' și C' simetricile lui B și C în raport cu M și N . Să se arate că:

1) $[BC'] \equiv [CB']$; 2) $\triangle AB'C'$ este isoscel; 3) Să se determine $m(\angle B'AC')$ știind că $m(\angle BAC) = 42^\circ 33' 12''$.

R. 3) $127^\circ 39' 36''$.

74. Pe baza BC a triunghiului isoscel ABC se construiește pătratul $BCC'B'$, $AB' \cap BC = \{M\}$ și $AC' \cap BC = \{N\}$. Să se arate că $[B'N] \equiv [C'M]$.

75. În triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, fie ND mediatoarea laturii AB ($D \in AC$) și BD bisectoarea unghiului B . Să se arate că $m(\angle BAC) = \frac{m(\angle B) + m(\angle C)}{4} = 36^\circ$.

76. În triunghiul echilateral ABC simetricul punctului B față de AC este B' . Pe AB' se construiește pătratul $AB'C'A'$. Să se arate că triunghiul ABA' este isoscel.

77. Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau segmente congruente în același sens. Să se arate că patrulaterul obținut $A'B'C'D'$ este tot un pătrat.

78. În interiorul unui hexagon regulat $ABCDEF$ (cu toate laturile și unghiurile congruente) se unesc vîrfurile din două în două. 1) Să se arate că $\triangle AEC$ este echilateral.

2) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABF . 3) Să se determine un punct în interiorul triunghiului BFD care împarte hexagonul în şase triunghiuri congruente.

4) Să se arate că aria $\Delta BFD = \text{aria } \frac{ABCDEF}{2}$.

79. Fie AD bisectoarea unghiului $A (D \in BC)$ iar simetricele punctului D faţă de AC şi AB , sînt respectiv M şi N . Să se arate că $[DM] \equiv [DN]$.

80. Se dă triunghiul ABC în care $m(\angle B) = 60^\circ$ iar $m(\angle C) = 30^\circ$. Bisectoarea interioară a unghiului B intersectează pe AC în D . Din punctul D se duce perpendiculara DM pe $BC (M \in BC)$. Prolungirea lui MD intersectează pe AB în N . Să se arate că triunghiul BNC este echilateral.

81. De o parte şi de alta a unui segment AB se construiesc unghiuri congruente BAC şi ABD ; $[AC] \equiv [BD]$; $CD \cap AB = \{M\}$. Să se arate că $[AM] \equiv [MB]$.

Indicație. Se observă mai întîi triunghiurile ABD şi BAC apoi triunghiurile ACD şi CBD şi apoi $\Delta AMC \equiv \Delta BMD$.

82. Fie triunghiul echilateral ABC . Se duce din A o perpendiculară pe AB care intersectează pe AC în F şi pe AD în M astfel $m(\angle MBD) = \frac{1}{3} m(\angle ABM)$. Fie CN bisectoarea unghiului exterior $C (N \in AD)$. Să se arate că: $[AM] \equiv [CD]$; şi $[AN] \equiv [ND]$.

II.12. SUMA UNGHIURILOR UNUI POLIGON CONVEX

83. Numărul laturilor unui poligon convex neregulat este n divizibil cu 2 şi 9. Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor interioare ale acestui poligon ştiind că $8 < n < 36$.

R. 2 880°.

84. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex este egală cu măsura a 6 unghiuri drepte. Să se determine numărul laturilor acestui poligon.

R. 5.

85. Fie poligonul convex neregulat $ABCDE$. Avem $m(\angle D) < m(\angle B)$ cu 20° , $m(\angle C) > m(\angle B)$ cu 40° ; $(\angle A) \equiv (\angle B)$ şi $m(\angle E) > m(\angle B)$ cu 20° . Să se determine măsurile unghiurilor interioare ale acestui poligon.

R. $m(\angle A) = 100^\circ$; $m(\angle B) = 100^\circ$; $m(\angle C) = 140^\circ$;
 $m(\angle D) = 80^\circ$; $m(\angle E) = 120^\circ$.

86. Măsurile unghiurilor interioare ale unui poligon convex sînt proporţionale cu numerele 5; 8; 14; 12; 17; 16. Să se determine măsura unghiului sub care se intersectează bisectoarele interioare ale unghiurilor celor mai mici ale poligonului dat.

R. 115°.

87. Să se calculeze măsura unui unghi al unui poligon regulat (cu laturile egale) cu 7 laturi, cu 8 laturi şi cu 15 laturi.

R. $128^\circ 34' 17''$; 2; 135° ; 156° .

88. Să se arate că într-un patrulater convex suma măsurilor a două unghiuri exterioare este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri interioare nealăturate.

Indicație. Considerăm unghiurile exterioare din A și B și avem $180 - m(\angle A) + 180 - m(\angle B) = 360^\circ - [m(\angle A) + m(\angle B)] = m(\angle C) + m(\angle D)$.

89. Se dă patrulaterul convex $ABCD$, bisectoarele unghiurilor alăturate A și B se intersectează în M , iar bisectoarele unghiurilor alăturate C și D se intersectează în N . Să se arate că $m(\angle AMB) + m(\angle CND) = 180^\circ$.

Indicație. $m(\angle AMB) = 180^\circ - \frac{m(\angle A) + m(\angle B)}{2}$; $m(\angle CND) = 180^\circ - \frac{m(\angle C) + m(\angle D)}{2}$.

90. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex este de 540° .

Aceste măsuri sînt invers proporționale cu $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}$. Să se determine măsurile acestor unghiuri.

R. $80^\circ; 90^\circ; 110^\circ; 120^\circ; 140^\circ$.

91. Să se arate că suma măsurilor unghiurilor exterioare oricărui poligon convex este egală cu suma măsurilor a 4 unghiuri drepte.

Indicație. $180^\circ n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ$.

92. Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex care îndeplinește condiția că există un punct în interiorul lui din care să se vadă laturile sale sub același unghi. Să se construiască un astfel de poligon.

Indicație. Se ține seama de poziția diagonalelor unui patrulater, care să îndeplinească condiția cerută.

93. Fiind dat un triunghi ABC , bisectoarele interioare duse din B și C se intersectează în punctul O și formează unghiul BOC care are măsura de 120° . Să se determine măsura unghiului A al triunghiului ABC .

R. 60° .

94. Se dă un triunghi isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$. Se prelungește BA dincolo de A cu lungimea $AD = BA$. Să se arate că $\triangle DBC$ este dreptunghic.

Indicație. $\triangle DAC$ isoscel; se studiază unghiurile.

IL13. DREPTE PARALELE

95. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt perpendiculare sau paralele.

96. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare, sînt perpendiculare sau paralele.

97. Fiind date două paralele tăiate de o secantă, să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor corespondente sînt paralele.

98. Să se arate că dacă două unghiuri au două laturi paralele și celelalte două perpendiculare, suma sau diferența măsurilor lor este egală cu măsura unui unghi drept sau cu măsura a trei unghiuri drepte.

99. Într-un triunghi ABC se duc bisectoarele BB' ($B' \in AC$) și CC' ($C' \in AB$), $BB' \cap CC' = \{I\}$. Se duce prin I o paralelă MN la BC . ($M \in AB$, $N \in AC$). Să se arate că avem relația $MN = MB + NC$.

Indicație. ΔMBI și ΔNCI sînt isoscele.

100. Prin vîrfurile A a unui triunghi ABC se duce o paralelă la BC . Bisectoarea unghiului B taie paralela dusă prin A în N ; $BN = 20$ cm, $AB = 6$ cm. Să se calculeze perimetrul ΔABN . R. 32 cm.

101. Prin vîrfurile unui triunghi se duc paralele la laturile opuse și se prelungesc pînă ce se întîlnesc două cîte două. Să se arate că triunghiul format este de patru ori mai mare decît cel dat.

102. Într-un triunghi ABC , măsura unghiului A este de două ori mai mare decît măsura unghiului B . Bisectoarea unghiului A intersectează pe BC în D , iar bisectoarea unghiului ADC intersectează pe AC în E . a) Să se arate că $DE \parallel AB$. b) Ce fel de triunghiuri sînt ABD , ADE ?

IL14. PATRULATERE

103. Într-un paralelogram $ABCD$, dreapta MN unește mijloacele laturilor opuse AB și CD . Fie O centrul paralelogramului. Să se arate că MN este paralelă cu AD și cu BC și că punctele N , O , M sînt coliniare.

104. Prin centrul unui paralelogram $ABCD$ se duc două drepte după voie, prima intersectează laturile opuse AB și CD în M și N , iar a doua intersectează celelalte două laturi opuse în P și Q . Să se demonstreze că patrulaterul $MQNP$ este un paralelogram. Cum trebuie duse aceste drepte ca patrulaterul să devină romb ?

105. Să se demonstreze că un patrulater în care două laturi opuse sînt paralele, iar o diagonală este tăiată în părți de lungimi egale de cealaltă diagonală este paralelogram.

106. Bisectoarele interioare ale unui paralelogram se întîlnesc între ele formînd un dreptunghi.

107. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale unui paralelogram se iau în același sens respectiv punctele E, F, G, H astfel ca $[AE] \equiv [CG]$ și $[BF] \equiv [DH]$. Să se demonstreze că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram cu același centru ca și paralelogramul dat.

108. Prin vîrfurile opuse A și C ale paralelogramului $ABCD$ se duc două drepte paralele, după voie, care intersectează diagonala BD în punctele A' și C' . Să se demonstreze că $[A'B] \equiv [C'D]$.

Indicație. Se vor considera triunghiul $AA'B$ și triunghiul $CC'D$.

109. Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram. În ce caz acest paralelogram devine: romb, dreptunghi sau pătrat ?

Indicație. Se va observa că laturile noului patrulater sînt paralele cu diagonalele patrulaterului dat.

110. Punctele de intersecție a celor patru bisectoare interioare ale unui dreptunghi sînt vîrfurile unui pătrat.

Indicație. Se va observa că aceste bisectoare formează cu laturile dreptunghiului patru triunghiuri dreptunghice isoscele, congruente două cîte două.

111. Ducînd două paralele la egală distanță de diagonala unui dreptunghi, în interiorul dreptunghiului și unind extremitățile se formează un paralelogram.

112. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile unui dreptunghi pe diagonalele sale sînt vîrfurile altui dreptunghi, avînd laturile respectiv paralele cu ale dreptunghiului dat.

113. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din centrul unui romb pe laturile sale sînt vîrfurile unui dreptunghi.

114. Se unesc extremitățile unei laturi a unui dreptunghi cu un punct arbitrar de pe latura opusă. Să se arate că triunghiul astfel format are aria jumătate cît a dreptunghiului.

115. Se unește un punct M interior unui paralelogram cu vîrfurile acestuia. Fie AB și CD două laturi opuse. Să se arate că suma ariilor triunghiurilor MAB și MCD este constantă oricum s-ar mișca punctul M .

116. Pe laturile unui paralelogram ca baze se construiesc în afară triunghiuri echilaterale. Să se arate că vîrfurile acestor triunghiuri diferite de vîrfurile paralelogramului sînt vîrfurile altui paralelogram.

117. Se prelungesc laturile AB și AD ale unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $[BM] \equiv [AD]$ și $[DN] \equiv [AB]$. Să se arate că $\triangle DCN$ și $\triangle BMC$ sînt isoscele și că punctele M, N, C sînt coliniare.

118. Se dau trei puncte necoliniare A, B, C . Fie punctele M, N, P simetricele lor față de un punct O . Cîte paralelograme se pot forma cu punctele A, B, C, M, N, P ?

R. 3 paralelograme.

119. Se prelungesc medianele BM și CN ale unui triunghi ABC cu segmentele $[MP] \equiv [MB]$ și $[NQ] \equiv [NC]$. Să se arate că punctele A, P, Q sînt coliniare.

Indicație. Se arată că AP și AQ sînt paralele cu BC .

120. Se prelungește diagonalele unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $[AM] \equiv [CN]$ și $[BK] \equiv [DT]$ (în sensuri opuse). Să se arate că $MKNT$ este paralelogram.

Indicație. În patrulaterul format, diagonalele se înjumătățesc.

121. Fie triunghiul ABC isoscel, $[AB] \equiv [AC]$ și $D \in AC$. Se prelungește latura AB cu $[BE] = [CD]$. $DE \cap BC = \{F\}$. Se arate că F este mijlocul lui DE .

Indicație. Din D se duce o paralelă la AB care taie pe BC în H . Se studiază $\triangle DHC$ și patrulaterul în care DE este diagonală.

122. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AA' , iar prin piciorul A' se duc $A'M$ și $A'N$ paralele la laturile AB și AC ale triunghiului; $M \in AB$ și $N \in AC$. Să se arate că $AMA'N$ este romb.

Indicație. Se observă că triunghiul AMA' este isoscel.

123. Dreptele paralele (d_1) și (d_2) sînt tăiate de secanta AB . Bisectoarele unghiurilor A și B interne de aceeași parte a secantei, întîlnesc cele două paralele în punctele C și D . Să se arate că $ABCD$ este romb.

124. Se dă trapezul $ABCD$ în care baza mare AB este dublul bazei mici CD . a) Să se împartă trapezul în trei triunghiuri echivalente. b) Ce fel de triunghiuri sînt ?

Indicație. Se consideră M mijlocul lui AB ($M \in AB$).

125. Se dau două unghiuri adiacente suplementare $\angle AOB$ și $\angle AOC$. Dintr-un punct A' de pe latura comună OA se duc perpendicularele $A'D$ și $A'E$ pe bisectoarele celor două unghiuri. Să se arate că $ODA'E$ este un dreptunghi și $DE \parallel BC$.

126. Se dă un dreptunghi $ABCD$ ($AB > BC$) în care diagonalele fac un unghi de 60° . Fie P piciorul perpendicularei duse din vîrfurile D pe diagonala AC . a) Să se arate că $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{4}$. b) Să se arate că $APEB$ (E fiind piciorul perpendicularei duse din C pe BD) este trapez isoscel.

127. Unind consecutiv mijloacele laturilor unui romb se obține un patrulater al cărui perimetru este de 198 cm. Latura cea mai mare a acestui patrulater este de două ori mai mare, decît latura cea mai mică. Să se calculeze laturile patrulaterului format.

R. 33 cm; 66 cm.

128. Pe laturile consecutive AB și BC ale unui pătrat se construiesc două triunghiuri echilaterale ABE și BCF , primul cu vîrfurile în interior și al doilea cu vîrfurile în exteriorul pătratului. Să se arate că punctele D, E, F sînt coliniare.

Indicație. Se vor studia triunghiurile BEF, ECD și AED și se va găsi că unghiurile cu vîrfurile în E au 45° și $60^\circ, 75^\circ$.

129. Fie un pătrat $ABCD$. Să se găsească pe laturile acestui pătrat patru puncte care să determine un alt pătrat a cărui arie să fie egală cu jumătate din aria primului.

130. Intr-un trapez isoscel $ABCD$, (BC baza mare și AD baza mică) latura ne paralelă AB este egală cu baza mică și cu jumătate din baza mare. Se cer: 1) unghiurile trapezului; 2) ce fel de triunghi este ABC .

Indicație. Se duce din D o paralelă la AB ce taie pe BC în $M, M \in BC$. Se cercetează $ABMD$ care este un romb.

IL15. PROBLEME RECAPITULATIVE

131. Se dă triunghiul ABC cu înălțimea $AD, D \in BC$. Să se arate că dacă $AD = \frac{BC}{2}$ atunci unghiul A este ascuțit sau drept.

132. Fie dreapta (Δ) și două puncte A și B de aceeași parte a dreptei (Δ) . Să se găsească un punct $M \in (\Delta)$ astfel ca $AM + MB$ să fie cea mai mică.

Indicație. Se consideră simetricul punctului A față de (Δ) .

133. Fie a, b, c , laturile unui triunghi și h_1, h_2 și h_3 înălțimile lui. Să se arate că există relația $a+b+c > h_1+h_2+h_3$.

134. O fiind un punct în interiorul unui triunghi ABC , să se arate că $OB+OC < AB+AC$.

Indicație. $OB \cap AC = \{B'\}$ și $OC \cap AB = \{C'\}$.

135. Suma medianelor unui triunghi este mai mică decât suma laturilor triunghiului.

Indicație. Fie AM mediană. Prelungim AM cu $[MA'] \equiv [MA]$

136. Să se demonstreze că distanțele a două din vîrfurile unui triunghi la mediana ce corespunde vîrfului al treilea sînt congruente.

137. Fiind dat un triunghi echilateral și un punct în interiorul triunghiului să se arate că suma distanțelor acestui punct la laturi este constantă.

138. Fie paralelogramul $ABCD$ în care diagonala $[BD] \equiv [AD]$. Fie M mijlocul laturii DC . Să se arate că $BM \perp DC$.

139. În triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, pe latura AC se ia un punct D și se prelungește latura AB cu o lungime $BE=DC$. ($ED \cap BC = F$); se duce $DH \parallel AB$ ($H \in BC$).

Să se arate că: a) $\frac{DH}{BE} = 1$; b) $[EF] \equiv [FD]$.

Indicație. Se studiază triunghiurile BEF și FDH .

140. Se dau două unghiuri adiacente suplementare xOy și yOC . Dintr-un punct A de pe latura comună yO se duc perpendiculare AD și AE pe bisectoarele acestor unghiuri. Să se arate că $DE \parallel xC$.

Indicație. Se studiază patrulaterul $ADOE$.

141. Măsura unghiului format prin intersecția diagonalelor AC și BD ale unui dreptunghi $ABCD$ este de 60° . Perpendicularele duse din D și B intersectează diagonala AC în M și N ; $AC \cap BD = \{O\}$. Să se arate că: a) $\frac{OM}{AC} = \frac{1}{4}$; b) $MBND$ paralelogram.

142. Se prelungesc laturile unui pătrat în același sens cu segmente de lungimi egale și se unesc punctele obținute; apoi se construiesc pe laturile patrulaterului triunghiuri echilaterale. Să se arate că unind vîrfurile triunghiurilor echilaterale se obține un nou pătrat.

143. Fie xOy un unghi drept. Să presupunem că Ox este bisectoarea unui unghi AOB , iar Oy este bisectoarea altui unghi COD . Să se arate că unghiurile AOC și BOD sînt suplementare. Ce se întîmplă dacă OA și OC se confundă ?

R. $m(\angle AOC) + m(\angle BOD) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$; dacă OA și OC se confundă, atunci OB și OD sînt în prelungire.

144. Dacă se duce bisectoarea unui unghi înscris într-un cerc și prin punctul ei de intersecție cu cercul se duce o coardă paralelă cu una din laturile unghiului, să se arate că această coardă este congruentă cu cealaltă latură a unghiului.

145. Dacă se unesc picioarele înălțimilor unui triunghi, se obține un al doilea triunghi, ale cărui bisectoare sînt înălțimile celui dintîi.

146. Trei orașe pe care le însemnăm cu A, B, C formează pe hartă un triunghi dreptunghic isoscel, cu vîrfurile unghiului drept în B . Ele sînt legate cu o singură cale ferată, lungă de 400 km, care merge de la A la B în linie dreaptă, și de la B la C iarăși în linie dreaptă. Dacă s-ar face o cale ferată directă, adică în linie dreaptă de la A la C , cu cît s-ar scurta drumul, cu trenul, între aceste două orașe ?

R. Cu aproape 118 km.

147. În triunghiul ABC , latura $AC=12,5$ cm, iar înălțimea $AD=10$ cm. Pe latura AB se ia un punct M astfel încît să avem $BM:MA=\frac{1}{4}$. Prin M se duc paralela la AC și perpendiculara pe BC , care determină pe BC , respectiv, punctele N și P . Fie P' simetricul lui P față de N . Paralela la MP' dusă prin P taie dreapta MN în Q . a) Să se arate că patrulaterul $MPQP'$ este paralelogram. b) Să se calculeze lungimile laturilor și diagonalelor paralelogramului $MPQP'$. c) Prelungirea dreptei MN întîlnește tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC , în punctul T . Să se arate că triunghiurile ATM și ABC sînt asemenea.

R. $MP=QP'=2$; $PQ=P'M=\sqrt{13}$; $PP'=3$; $MQ=5$.

148. Din centrul O al unui cerc se duc razele OA și OB . În punctele A și B se duc tangentele la cerc care se intersectează în punctul Q . Prelungirile razelor întîlnesc aceste tangente în P și S . Să se arate că: a) Triunghiul OSP este isoscel. b) Diagonalele patrulaterului $OBQA$ sînt perpendiculare.

149. Se dă un patrulater $ABCD$ în care $m(\angle A)=m(\angle C)$. Bisectoarea unghiului B intersectează pe DC și AD în punctele E și F . Să se demonstreze că triunghiul DEF este isoscel.

Indicație. Se va folosi suma măsurilor unghiurilor dintr-un triunghi.

150. Laturile CB și DA ale patrulaterului $ABCD$ se intersectează în M , iar laturile BA și CD în N . Să se demonstreze că: $m(\angle BMA)-m(\angle AND)=m(\angle ABC)-m(\angle ADC)$.

151. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC . Să se arate că AD formează cu baza două unghiuri care au diferența măsurilor egală cu diferența măsurilor unghiurilor formate de AD cu laturile congruente ale triunghiului.

Indicație. Se va folosi măsura unghiului exterior unui triunghi.

152. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E , astfel că $[AD]=[CE]$. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptelor BE și CD . Să se arate că $m(\angle BMC)=120^\circ$.

153. Fie H punctul de intersecție al înălțimilor duse pe laturile AC și AB ale triunghiului ABC și M și N intersecțiile bisectoarei unghiului A cu aceste înălțimi. Să se arate că triunghiul HMN este isoscel.

Indicație. $m(\angle HMN)=m(\angle MNH)=90^\circ - \frac{m(\angle A)}{2}$.

154. Într-un triunghi ABC , bisectoarea unghiului A intersectează pe BC în D ; dreapta dusă prin D , paralelă cu CA intersectează pe AB în E ; dreapta dusă din E , paralelă cu BC intersectează pe AC în F . Să se demonstreze că $[EA] = [FC]$.

155. Segmentul de dreaptă care unește un punct oarecare al bazei mari a unui trapez cu un punct oarecare al bazei mici este împărțit de linia mijlocie a trapezului în două părți de lungimi egale.

156. Într-un triunghi se duce o dreaptă paralelă la bază, prin punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor alăturate bazei. Să se demonstreze că segmentul de dreaptă, cuprins între două laturi ale triunghiului este egal cu suma părților acestor laturi alăturate bazei.

157. Prin vîrfurile unui triunghi se duc drepte paralele la laturile opuse. Să se demonstreze că triunghiul format de aceste drepte este alcătuit din patru triunghiuri congruente cu cel dat și că fiecare dintre laturile lui este de două ori mai mare decît latura corespunzătoare a triunghiului dat.

158. Într-un triunghi isoscel, suma distanțelor unui punct al bazei la cele două laturi congruente rămîne constantă cînd punctul se mișcă pe bază, și anume este egală cu înălțimea coborîtă pe una din laturile egale. Cum se schimbă această teoremă, dacă se ia punctul pe prelungirea bazei ?

159. Într-un triunghi echilateral, suma distanțelor unui punct luat în interiorul acestui triunghi la laturile lui este o mărime constantă (egală cu înălțimea triunghiului).

160. Se dă trapezul $ABCD$ cu diagonala AC perpendiculară pe bazele trapezului $AB = 2a$ și $CD = a$, $m(\angle ADC) = 45^\circ$. Din punctul M aflat pe mijlocul lui AB se ridică perpendiculara MN ($N \in BC$). Să se arate că: 1) AD este diagonala unui pătrat cu latura a . 2) $AMCD$ este paralelogram. 3) Aria patrulaterului $AMNC$ este $1/2$ din aria trapezului.

161. În triunghiul ABC bisectoarea unghiului B intersectează pe AC în E . Fie $ED \parallel BC$ și $EF \parallel AB$ ($D \in AB$; $F \in BC$). Se știe că $2DE = BC = m$. Să se arate că: triunghiul DBE este isoscel, EF este mediană în triunghiul BEC . Să se afle raportul ariilor patrulaterului $DBEF$ și a triunghiului ABC .

R. $\frac{1}{2}$.

162. Dintr-un punct D al ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, se duc perpendicularele DE și DF pe catetele triunghiului dreptunghic. Pentru ce poziție a punctului D distanța EF este minimă ?

Indicație. Se studiază diagonalele dreptunghiului $AEDF$ în care AD este diagonala dreptunghiului.

163. Se dă triunghiul ABC și un punct M în interiorul lui. Fie A' , B' , C' simetricele lui M față de BC , AC , AB . Să se arate că triunghiurile $C'AB'$, $B'CA'$ și $A'BC'$ sînt isoscele.

Indicație. Se observă triunghiurile congruente formate.

164. Fie paralelogramul $ABCD$ în care diagonala $[BD] \equiv [AD]$. Fie M mijlocul laturii DC . Să se arate că $BM \perp DC$.

165. În triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, pe latura AC se ia un punct D și se prelungește latura AB cu o lungime $BE = DC$. $ED \cap BC = \{F\}$. Se duce $DH \perp AB$ ($H \in BC$). Să se arate că: a) $\frac{DH}{BE} = 1$; b) $[FD] \equiv [EF]$.

Indicație. Se studiază triunghiurile BEF și DEA .

166. Se dau două unghiuri adiacente suplementare xOy și yOc . Dintr-un punct A de pe latura comună yO se duc perpendicularele AD și AE pe bisectoarele acestor unghiuri. Să se arate că $DE \perp xC$.

Indicație. Se observă patrulaterul $ADOE$.

167. Măsura unghiului format prin intersecția diagonalelor AC și BD ale unui dreptunghi $ABCD$ este de 60° . Perpendicularele duse din D și din B intersectează diagonala AC în M și N . $AC \cap BD = \{O\}$. Să se arate că: a) $\frac{OM}{AC} = \frac{1}{4}$; b) $MBND$ este paralelogram.

168. Se prelungesc laturile unui pătrat în același sens cu segmente congruente și se unesc punctele obținute; apoi se construiesc pe laturile patrulaterului format triunghiuri echilaterale. Să se arate că unind vîrfurile triunghiurilor echilaterale se obține un nou pătrat.

169. Fie trapezul $ABCD$. Din D se duce o perpendiculară pe diagonala AC care intersectează pe AB în F , iar din B o paralelă la DF care intersectează pe AC în punctul E . Să se arate că $m(\angle ACD) + m(\angle FDC) = m(\angle CBE) + m(\angle ECB)$.

Indicație. Se observă unghiurile complementare.

170. Se dă triunghiul ABC . Perpendicularele duse în vîrfurile B și C pe laturile AB respectiv AC se intersectează în D . Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\angle BAC$ și $\angle BDC$ sînt paralele.

Indicație. $m(\angle A) + m(\angle D) = 180^\circ$. Se observă unghiurile complementare.

171. Fie ΔABC dreptunghic $m(\angle A) = 90^\circ$ și O mijlocul laturii BC . Perpendiculara din A pe AO intersectează pe BC în D . Se prelungește BD cu segmentul $[DE] \equiv [AD]$. Să se arate: a) $m(\angle DAB) = m(\angle OAC)$; b) $m(\angle ADE) + m(\angle ACO) = 45^\circ$.

172. Lichidul turnat într-un vas are masa de 153 kg. Vasul plin are masa de 5 ori masa vasului gol. Știind că vasul are capacitatea de 1,7 hl, să se afle masa vasului plin și densitatea lichidului.

Indicație. Masa vasului plin este: $\left(153 + \frac{153}{4}\right)$ kg.

R. 191,25 kg; $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$.

173. O sumă de bani este împărțită la 7 elevi astfel: primul primește jumătate din sumă și încă 50 de băni, al doilea primește jumătate din suma rămasă și încă 50 de

bani, al treilea primește jumătate din noul rest și încă 50 de bani și așa mai departe pînă ce ultimul primește jumătate din ultimul rest și încă 50 de bani. Intreaga sumă fiind astfel distribuită să se afle cît a primit fiecare din cei 7 elevi.

Indicație. Se folosește metoda mersului invers. Ultimul rest este 1 leu.

R. Suma totală 127 lei; 64,32,16,8,4,2,1.

174. Spațiul parcurs în alunecarea unui corp pe un plan înclinat este proporțional cu pătratul timpului necesar alunecării. Un corp alunecă în cinci secunde 50 metri. Să se afle ce spațiu a parcurs acel corp dacă a alunecat timp de 8 secunde.

Indicație. Se va scrie legea din enunț: $\frac{s_1}{t_1^2} = \frac{s_2}{t_2^2}$.

R. 128 m

175. Într-un triunghi dreptunghic ABC ipotenuza BC este dublul catetei AB . Se duce bisectoarea BD și bisectoarea DE a triunghiului BDC . a) Să se arate că triunghiurile ABD , DBE și ECD sînt congruente între ele. b) Să se arate că triunghiul ABE este echilateral. c) Să se arate că se poate împărți triunghiul dat ABC în 9 triunghiuri congruente între ele.

Indicație. Ne folosim de proprietatea punctelor situate pe bisectoarea unui unghi și de teorema: dacă într-un triunghi dreptunghic o catetă este jumătate dintr-o ipotenuză, atunci măsura unghiului opus acelei catete este de 30° .

176. Două corpuri se mișcă uniform pe cerc. Ele pleacă în același timp dintr-un punct A de pe cerc în sensuri contrare. După ce s-au întîlnit într-un punct B , primului corp i-au mai trebuit 4 secunde ca să ajungă în A , iar cel de-al doilea continuînd mersul său i-a mai trebuit 9 secunde ca să ajungă și el în A . De cîte ori ar parcurge cercul într-un minut fiecare din cele două corpuri?

Indicații. Dacă ținem seama că timpul este același (t) pentru ambele corpuri (care se mișcă cu viteze diferite v_1 și v_2) pînă la întîlnirea în B , iar distanța parcursă de primul pînă la întîlnire este aceeași cu distanța parcursă de cel de-al doilea pînă la înapoierea în A , se obțin relațiile: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{9}{4}$; $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{4}$ apoi $t = 6$ secunde.

R. 6 ori; 4 ori.

177. În triunghiul ABC se duc bisectoarele BB' și CC' ($B' \in AC, C' \in AB$) și $BB' \cap CC' = \{I\}$. Se duce prin I o paralelă MN la BC ; ($M \in AB$ și $N \in AC$). Să se arate că $MN = BM + NC$.

178. În ΔABC se duc înălțimea AH și bisectoarea AD . Să se calculeze măsura unghiului DAH .

179. Într-un patrulater convex bisectoarele a două unghiuri consecutive formează un unghi avînd măsura egală cu semisuma măsurilor celorlalte unghiuri.

180. Se dă triunghiul isoscel ABC , $[AC] = [BC]$, fie $DE \parallel AB$ și $BD \cap AE = \{F\}$. a) Să se arate că triunghiul DEF este isoscel. b) Să se arate că bisectoarea unghiului BFA este și bisectoarea unghiului EFD .

181. Fie patrulaterul $ABCD$ în care $[AB] = [AD]$ și $m(\angle ABC) = m(\angle ADC)$. Să se arate că AC este perpendiculară pe mijlocul lui BD .

182. Pe o coardă AB a unui cerc se iau două puncte D și E la o distanță egală de mijlocul C al acestei coarde și prin aceste puncte se ridică pe AB perpendicularele DF și EG , în același sens, pînă la intersecția lor cu cercul. Să se demonstreze că aceste perpendiculare sînt congruente.

183. Într-un cerc se duc două coarde CC' și DD' paralele cu diametrul AB . Să se demonstreze că MM' care unește mijloacele coardelor CD și $C'D'$ este paralelă cu AB .

184. Într-un cerc cu centrul O se duce coarda AB și se prelungește cu distanța BC , egală cu raza. Prin punctul C și centrul O se duce secanta CD (D este al doilea punct de intersecție cu cercul). Să se demonstreze că $m(\angle AOD) = 3m(\angle ACD)$.

185. Într-un triunghi ABC prelungim latura AB dincolo de A cu un segment AD congruent cu AC . Apoi prelungim latura AC dincolo de A cu un segment AE congruent cu AB . Să se demonstreze că $[DE] \equiv [BC]$.

186. În figura II.2, AOB este un unghi oarecare. Să se compare BC cu AD .

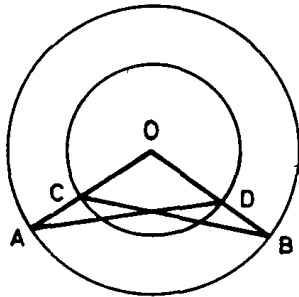


Fig.II.2

187. Fie AB și CD două diametre ale unui cerc. Să se compare; a) segmentul AC cu DB ; b) segmentul AD cu BC .

188. Fie OA și OB două raze ale unui cerc, Ox bisectoarea unghiului AOB și M un punct al ei. Să se compare segmentul MA cu MB .

189. Fie AB un segment și C mijlocul lui. În C se ridică perpendiculara pe AB ; fie M un punct oarecare al ei. Să se compare MA cu MB .

190. Notînd cu O centrul unui cerc, cu A și B două puncte oarecare ale cercului și cu OC bisectoarea unghiului AOB , să se compare segmentele CA și CB .

191. Fie ABC un triunghi oarecare și AD una dintre bisectoarele lui $D \in BC$. Pe semidreapta AC se poartă un segment AE congruent cu AB . Să se demonstreze că $[DE] \equiv [BD]$ (Se va face o figură în care $AC < AB$ și o altă figură în care $AC > AB$.)

192. În figura II.3, $\angle 1 \equiv \angle 3$ și $\angle 2 \equiv \angle 4$. Să se găsească toate elementele congruente din figură.

193. În figura II.4, $\angle 1 \equiv \angle 3$ și $\angle 2 \equiv \angle 4$. Să se demonstreze că $[AB] \equiv [DC]$.

194. În figura II.5, $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $PM \parallel AC$. Care sînt unghiurile congruente cu unghiul 1? Cele 12 unghiuri din figură se pot grupa în 3 grupe de câte 4 unghiuri congruente. Să se formeze aceste grupe.

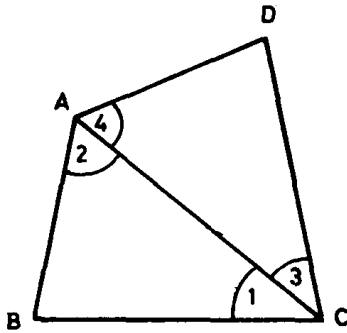


Fig.II.3

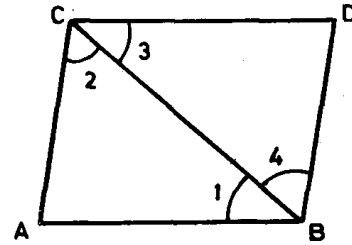


Fig.II.4

195. a) In figura II.6, s-au dus printr-un punct paralelele la laturile patrulaterului $ABCD$. Să se compare unghiurile 1, 2, 3 și 4 cu unghiurile patrulaterului. Să se deducă de aici câte grade are suma $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$. b) Se poate afla pe aceeași cale suma unghiurilor unui pentagon ?

196. Se consideră două drepte paralele tăiate de o secantă. a) Ce poziție au una față de cealaltă, bisectoarele a două unghiuri alterne interne ? b) Să se găsească alte perechi de unghiuri ale căror bisectoare sînt paralele.

197. Două drepte paralele d și e sînt tăiate de o secantă AB , $A \in d$, $B \in e$. Pe dreapta d se poartă un segment AC congruent cu AB . Să se demonstreze că BC este bisectoarea unghiului B . Se vor considera două cazuri: punctul C este de o parte sau de cealaltă a punctului A .

198. Fie xOy un unghi și M un punct al bisectoarei sale. Prin M se duce paralela la Ox și se notează cu N intersecția ei cu Oy . Să se compare segmentul NM cu NO .

199. In figura II.7, BI și CI sînt bisectoare, $MN \parallel BC$. Să se demonstreze că $MN = MB + NC$.

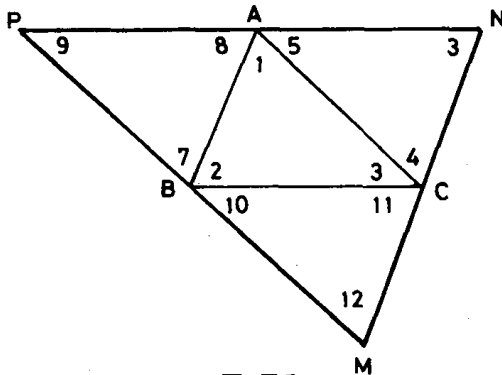


Fig.II.5

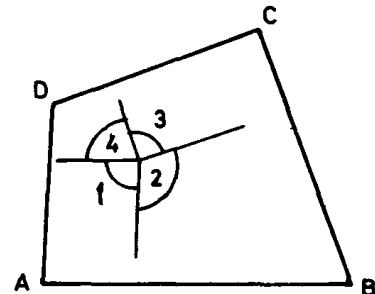


Fig.II.6

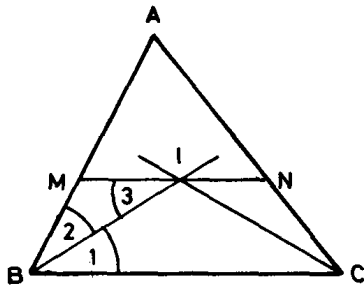


Fig. II.7

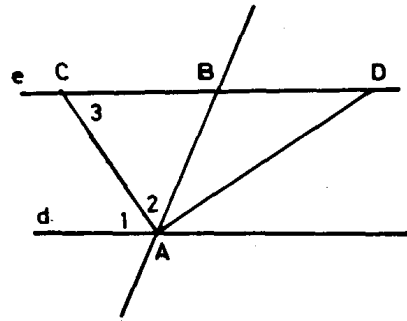


Fig. II.8

200. In figura II.8, $d \parallel e$, AB este o secantă oarecare, iar AC și AD sînt bisectoare. Să se demonstreze că: a) triunghiurile ABC și ABD sînt isoscele; b) AB este o mediană a triunghiului ACD .

201. Fie xOy un unghi și A un punct al laturii Ox . Să se ducă prin A o dreaptă astfel încît, B fiind intersecția ei cu Oy , unghiul OAB să fie congruent cu unghiul OBA .

202. In figura II.9, $[AB] \equiv [AC]$, $[BD] \equiv [CE]$, $DF \perp BC$ și $EG \perp BC$. Să se compare segmentele DF și EG .

203. a) In figura II.10, triunghiurile ABC și ACD sînt isoscele și congruente. a) Să se compare unghiurile ABD și ADB . b) Să se demonstreze că $AC \perp DB$. c) Se construiește la dreapta triunghiului ACD încă un triunghi isoscel ADE , $[AE] \equiv [AD]$. Să se compare unghiurile ABE și AEB .

204. Intr-un triunghi isoscel ABD , $[AB] \equiv [AC]$, se duc medianele BD și CE ($D \in AC$, $E \in AB$) și se notează cu F intersecția lor. Să se demonstreze că: a) $[BD] \equiv [CE]$; b) $\angle DBC \equiv \angle ECB$; c) $[FB] \equiv [FC]$; d) $[FD] \equiv [FE]$; e) $\angle FED \equiv \angle FDE$; f) Aceeași problemă dacă BD și CE sînt înălțimi.

205. Să se demonstreze că: a) un triunghi isoscel are două înălțimi congruente; b) reciproc, un triunghi care are două înălțimi congruente este isoscel. Se vor considera două cazuri, cînd unghiul de la vîrfurile triunghiului este ascuțit și cînd este obtuz. c) Ce se poate deduce de aici cu privire la înălțimile unui triunghi echilateral?

206. Să se demonstreze că un triunghi este isoscel dacă: a) o bisectoare este și înălțime; b) o mediană este și înălțime; c) o mediană este și bisectoare.

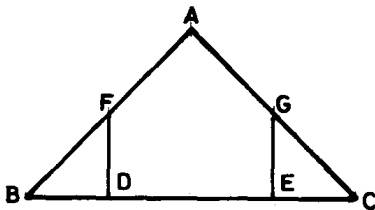


Fig. II.9

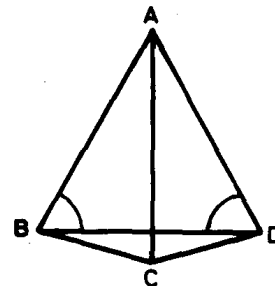


Fig. II.10

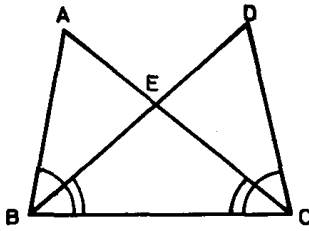


Fig. II.11

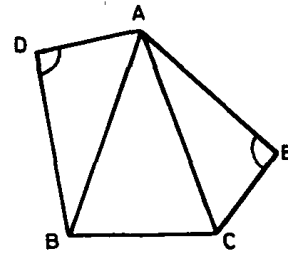


Fig. II.12

207. Fie ABC un triunghi isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, și D intersecția bisectoarelor unghiurilor de la bază. Să se demonstreze că: a) $[DB] \equiv [DC]$; b) AD este bisectoarea unghiului A .

208. a) Fie ABC un triunghi isoscel, $[AB] \equiv [AC]$. Pe latura AB se ia un punct M și pe AC un punct N , unde $[BM] \equiv [CN]$; fie $BN \cap CM = P$. Să se demonstreze că: a) $[BN] \equiv [CM]$ b) $[PB] \equiv [PC]$; c) AP este bisectoarea unghiului A . d) Să se deducă de aici că medianele unui triunghi isoscel sînt concurente; e) de asemenea și înălțimile.

209. Fie xOy un unghi și M un punct din interiorul lui. O dreaptă care trece prin punctul M taie laturile unghiului în două puncte A și B . Să se ducă această dreaptă astfel încît triunghiul OAB să fie isoscel.

210. In figura II.11, $\angle ABC \equiv \angle DCB$ și $\angle ACB \equiv \angle DBC$. Să se compare laturile triunghiului ABC cu cele ale triunghiului DCB .

211. Fie xOy un unghi și Oz bisectoarea lui. Printr-un punct A al bisectoarei se duce perpendiculara pe ea și se notează cu B și C intersecțiile ei cu laturile unghiului. Să se compare OB cu OC .

212. In figura II.12, triunghiul ABC este isoscel, $[CE] \equiv [AD]$ și $[AE] \equiv [BD]$. Să se demonstreze că $\angle D \equiv \angle E$.

213. In figura II.13, O și P sînt centrele celor două cercuri. Să se compare unghiurile triunghiului OBP .

214. In figura II.14, O este centrul comun al celor două cercuri. Să se demonstreze că: a) dacă $\angle 1 \equiv \angle 2$, atunci $[AB] \equiv [CD]$; b) dacă $[AB] \equiv [CD]$, $\angle 1 \equiv \angle 2$.

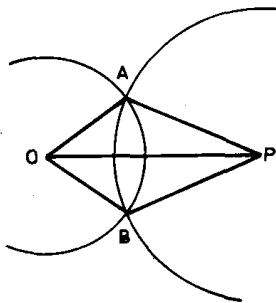


Fig. II.13

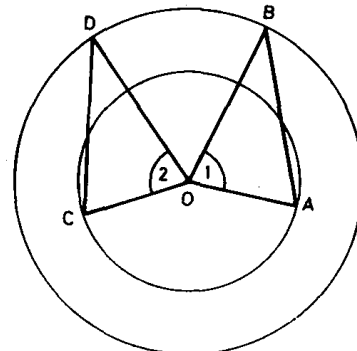


Fig. II.14

- 215.** Într-un triunghi ABC prelungim mediana AD cu un segment DE congruent cu AD . Să se compare triunghiul ABD cu triunghiul CDE . Ce elemente congruente apar?
- 216.** Să se demonstreze că, într-un triunghi oarecare, două vîrfuri sînt egal depărtate de mediana care pleacă din vîrfurile al treilea.

III. C L A S A a VII-a

III.1.PROBLEME DE ARITMETICĂ

1. Să se afle două numere, cunoscând că suma lor este 85 și diferența lor este 15.
R. 50; 35.
2. Diferența a două numere este 8, raportul lor este 3:2. Să se afle aceste numere.
R. 24; 16.
3. Să se împartă numărul 46 în două părți, în așa fel ca o treime a părții întâi să întrecă cu doi o șeptime a părții a doua.
R. 18; 28.
4. Suma a două numere este 64. Împărțind numărul cel mai mare la cel mai mic, obținem câtul 3 și restul 4. Să se găsească cele două numere.
R. 49; 15.
5. Diferența a două numere este 35. Împărțind numărul cel mare la cel mic obținem câtul 4 și restul 2. Să se găsească cele două numere.
R. 46; 11.
6. Avem două rezervoare, dintre care unul conține de două ori mai multă apă decât celălalt. Dacă turnăm din primul rezervor în al doilea 16 hl, ambele rezervoare conțin aceeași cantitate de apă. Câtă apă a fost în fiecare rezervor ?
R. 64hl; 32hl.
7. În clasele I A și I B ale unei școli au fost înscriși la începutul anului 90 de elevi, clasa I A avînd un număr mai mic de elevi. După un trimestru, doi elevi din clasa I A au fost mutați în clasa I B. Acum raportul dintre numărul elevilor din clasa I A și numărul elevilor din clasa I B este $\frac{7}{8}$. Câți elevi au fost în fiecare clasă la începutul anului școlar ?
R. 44; 46.
8. În trei coșuri se află 47 de mere. În primele două, numărul merelor este același, iar în al treilea coș sînt cu două mere mai mult decît în fiecare din celelalte. Cîte mere sînt în fiecare coș ?
R. 15; 15; 17.
9. Pe trei rafturi se află 63 de cărți; pe primul raft, de trei ori mai multe decît pe al doilea și pe al doilea de două ori mai multe decît pe al treilea. Cîte cărți sînt pe fiecare raft ?
R. 42; 14; 7.

10. Din două metale cu densitatea de $7\,200\text{ kg/m}^3$ și $8\,400\text{ kg/m}^3$ s-au fabricat 19 kg de aliaj cu densitatea $7\,600\text{ kg/m}^3$. Cît s-a luat din fiecare metal ?

R. $12\frac{2}{3}\text{ kg}$; $6\frac{1}{3}\text{ kg}$.

11. Un număr e format din două cifre. Dacă scădem din el 18 , obținem numărul răsturnat. Să se afle numărul știind că suma cifrelor sale este 12 .

R. 75 .

12. O traversă de fier trebuie tăiată în două părți ale căror lungimi să fie în raportul $5:3$, iar prima parte trebuie să fie cu 5 dm mai lungă decît $\frac{5}{9}$ din toată traversa. Să se afle lungimile celor două părți.

R. 45 dm ; 27 dm .

13. Dintr-un rezervor s-a scos la început jumătate din apa care se afla în el plus $\frac{1}{2}\text{ hl}$, pe urmă jumătate din acest rest plus $\frac{1}{2}\text{ hl}$; în sfîrșit, încă o jumătate din rest plus $\frac{1}{2}\text{ hl}$. După aceste operații, rezervorul mai conține 6 hl de apă. Cîtă apă a fost la început în rezervor ?

R. 55 hl .

14. În trei lăzi sînt 300 de mere. Numărul merelor din lada a doua este egal cu $\frac{2}{3}$ din numărul merelor din prima ladă, iar numărul merelor din lada a treia este cît $0,5$ din a doua. Cîte mere sînt în fiecare ladă ?

R. 150 de mere; 100 de mere; 50 de mere.

15. Un metrou are patru scări rulante. Cea mai mică scară rulantă are o lungime de 60 m ; această lungime reprezintă $\frac{15}{16}$ din lungimea celei de-a doua scări, $\frac{5}{6}$ din lungimea celei de-a treia și $\frac{5}{7}$ din lungimea celei de-a patra. Să se afle lungimea fiecărei scări rulante.

R. 64 m ; 72 m și 84 m .

16. Distanța dintre două sate poate fi parcursă într-un timp cunoscut. De cîte ori mai mult sau mai puțin timp va fi necesar ca să se parcurgă o distanța egală cu $\frac{11}{12}$ din prima, dacă se fac $1\frac{1}{3}$ ori mai mulți pași pe minut decît mai înainte și dacă mărimea pasului va fi de două ori mai mică decît cea precedentă ?

R. Timpul al doilea este $\frac{11}{8}$ din primul.

17. Un teren a cărui suprafață are aria de $2\,413\text{ ari}$ a fost repartizat la trei asociații. Să se afle ariile suprafețelor repartizate fiecărei asociații, dacă $\frac{3}{4}$ din terenul

repartizat primei asociații reprezintă 0,3 din cel al celei de-a doua asociații și $\frac{1}{8}$ din al asociației a 3-a.

Indicație. Terenul I reprezintă $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ din terenul II, iar terenul III reprezintă $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{5}$ din

terenul II. Toate terenurile la un loc reprezintă: $\frac{2}{5} + \frac{12}{5} + 1 = \frac{19}{5}$ din suprafața terenului II.

R. Terenul II este de 635 ari; terenul I este de 254 ari; terenul III = 1 524 ari.

18. O cooperativă agricolă de stat și-a depozitat ovăzul în trei hambare. În primul era $\frac{3}{8}$ din întreaga cantitate de ovăz, în al doilea de $1\frac{2}{3}$ ori mai puțin decât în primul, iar în al treilea restul ovăzului. Când s-au luat $1\frac{1}{2}$ hē din cel de-al doilea hambar și 33 hē din al treilea, în fiecare hambar a rămas aceeași cantitate de ovăz. Cît ovăz a fost în fiecare hambar ?

R. I. 67,5 hē; II. 40,5 hē; III. 72 hē.

19. Intr-un atelier al unei cooperative se află două bucăți de mătase de calități diferite. Prima bucată, cu prețul de $93\frac{3}{4}$ lei metrul, costă cu $187\frac{1}{2}$ lei mai puțin decât a doua, cu toate că este cu $1\frac{1}{2}$ m mai lungă decât bucata a doua, al cărei preț este de $112\frac{1}{2}$ lei metrul. Să se afle lungimea fiecărei bucăți.

R. 19 m; 17,50 m.

20. Cinci țăranii cooperatori au primit pentru o parte din normele de muncă efectuate 8 591 de lei. Să se afle partea ce s-a convenit fiecăruia, știind că al doilea a primit $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit primul, al treilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al doilea, al patrulea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al treilea, iar al cincilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al patrulea.

R. I. 2 816; II. 2 112; III. 1 584; IV. 1 188; V. 891 lei.

21. Intr-o ladă se află 0,208 t de mălai, iar în alta 0,01 t. De câte ori trebuie să se adauge în fiecare ladă câte 7 kg pentru ca în prima ladă să fie o cantitate de mălai de patru ori mai mare decât în a doua ?

R. De 8 ori.

22. Intr-un hambar sînt de două ori mai multe cereale decât în altul. Dacă se scot din primul hambar 750 t și se aduc în hambarul al doilea 350 t, amîndouă hambarele conțin aceeași cantitate de cereale. Cîte tone de cereale au fost la început în fiecare hambar ?

R. 2 200 t; 1 100 t.

23. Un atelier prelucraza trei bucati de metal: primele doua bucati au aceeași masă, iar a treia cît primele două la un loc. Cîte kilograme are fiecare bucată, dacă prima și a treia au împreună 15 kg ?

R. 5 kg; 5 kg; 10 kg.

24. Un copil avea un număr de bile în două cutii, A și B . Dacă la bilele din cutia A s-ar adăuga încă 4, atunci în cutia B ar fi de patru ori mai multe decît în A ; dacă însă la cutia B s-ar adăuga 2 bile, atunci în această cutie ar fi de șase ori mai multe bile decît în A . Cîte bile au fost în fiecare cutie ?

R. 9 și 52.

25. La un centru de pîine, aproape de închidere, vin 5 cumpărători. S-a vîndut primului cumpărător jumătate din cantitatea de pîine pe care o mai avea înainte de închidere și încă o jumătate de pîine; cumpărătorului al doilea i s-a vîndut jumătate din pîinile rămase și încă jumătate de pîine. În același fel s-au vîndut pîinile la încă doi cumpărători. Cînd s-a apropiat al cincilea cumpărător, mai rămăsese o singură pîine. Cîte pîini mai avea de vînzare centrul de pîine înainte de închidere ?

R. 31 pîini.

26. La o cooperativă agricolă de stat sau arat într-o zi cu 20 ha mai mult decît $\frac{2}{5}$ dintr-un lot al cooperativei. Din cauza timpului nefavorabil, în ziua a doua s-a arat cu 10 ha mai puțin decît $\frac{5}{13}$ din ceea ce a rămas, iar în a treia zi $\frac{1}{3}$ din noul rest. Știind că au mai rămas de arat pentru ziua a patra 60 ha, să se afle cîte hectare are lotul.

R. 250 ha.

27. Un elev a dat din suma care a scos-o de la CEC, pentru 4 caiete cu un leu mai puțin decît $\frac{1}{2}$ din sumă. Din banii rămași a dat $\frac{5}{7}$ și încă 3 lei pentru abonament pe 6 luni la "Gazeța matematică" și astfel i-au rămas 3 lei. Ce sumă a scos elevul de la CEC ?

R. 40 lei.

28. Un elev a cheltuit o sumă de bani astfel: prima dată jumătate din banii săi și încă un leu, a doua oară jumătate din rest și încă 1 leu, a treia oară $\frac{1}{2}$ din rest și încă 3 lei, cheltuind astfel întreaga sumă. Cîți lei a cheltuit ?

R. 30 de lei.

29. O cantitate de pește a fost împărțită la trei magazine astfel: primul a primit $\frac{2}{3}$ din întreaga cantitate de pește prins, al doilea a primit 0,3 din ceea ce a rămas, iar al treilea restul; primul magazin a primit cu 143 kg mai mult pește decît al treilea. Cîte kilograme de pește a primit fiecare magazin ?

R. I. 220 kg; II. 33kg; III. 73 kg.

30. Intr-o zi s-a scos $\frac{1}{5}$ din grîul ce se află într-un hambar, în ziua a doua $\frac{1}{3}$ din rest, în a treia zi s-a scos de 3 ori mai mult grîu decît în a patra zi, iar în ziua a patra a fost scoasă toată cantitatea de grîu rămasă, adică cu 16 t și 5 q mai puțin decît în prima zi. Cîte tone de grîu au fost în hambar ?

Indicație. În ziua I și a II-a s-a scos din hambar $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$ deci pentru a III-a și a IV-a zi au mai rămas $\frac{8}{9}$ din cantitatea inițială. Știind că în ziua a treia s-a scos de 3 ori mai mult decît în a patra zi, rezultă că din cele $\frac{8}{9}$ rămase, s-au scos $\frac{6}{9}$ în ziua a III-a și $\frac{2}{9}$ în ziua a IV-a. Conform enunțului, se deduce că $\frac{1}{9}$ din cantitatea totală reprezintă 16,5 t.

R. 247,5 t.

31. Un lot agricol a fost semănat astfel: 0,24 din el cu grîu, 0,25 din rest cu ovăz, 0,5 din rest cu cartofi, iar pe lotul rămas s-a pus floarea soarelui. Cîte hectare avea acel teren, dacă diferența dintre partea semănată cu floarea soarelui și cea semănată cu ovăz a fost de 50,312 ha ?

R. 529,6 ha.

32. Doi taxatori de tramvai, funcționînd unul la cl. I și celălalt la cl. a II-a, aveau bilete de valori diferite. $\frac{2}{5}$ din toate biletele erau de 0,25 lei, $\frac{4}{10}$ din numărul rămas de bilete erau de cîte 0,35 lei, iar restul erau bilete de cîte 0,40 lei și valoarea acestora din urmă era de 144 lei. Cîte bilete au avut cei doi taxatori și care este valoarea lor în lei ?

R. 1 000 de bilete în valoare de 328 lei.

33. Un tractorist trebuia să are 18 ha și a depășit norma cu un anumit procent. Un al doilea tractorist trebuia să are 24 ha și a depășit norma, procentul de depășire fiind cu 3 unități mai mare decît la primul. Amîndoi tractoriștii au arat împreună 44,82 ha. Cu cît la sută a depășit norma primul tractorist ?

R. 5% .

34. Trei strungari lucrează într-un atelier, la 3 strunguri cu turații diferite. Primul strung face 360 de rotații pe minut, al doilea 270 de rotații pe minut și al treilea 240 de rotații pe minut. a) După cît timp toți strungarii vor termina piesa în același moment ? b) Cîte piese produce atelierul în medie pe oră, dacă se știe că pentru o piesă fiecare strung trebuie să facă 900 de turații iar, strungarii lucrează cu același ritm ? c) Fie P mulțimea ale cărei elemente sînt numărul de piese făcute de cele trei strunguri pe oră și M mulțimea ale cărei elemente sînt trei numere proporționale cu cele trei elemente ale mulțimii P în așa fel ca aceste numere să fie mai mici ca numerele ce sînt elementele mulțimii P și să aparțină mulțimii numerelor naturale. Scrieți aceste mulțimi. d) Determinați $P \cap M$.

R. a) În 30 de minute vor face toți un număr întreg de piese și anume 12; 9; 8;

b) $19\frac{1}{3}$ piese; c) $P = \{24; 18; 16\}; M = \{12; 9; 8\}$; d) \emptyset .

35. Două brigăzi, avînd împreună 25 de tractoriști, ară în 12 zile 2 040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi și unul din a doua, 8 ha pe zi. a) Câți tractoriști sînt în fiecare brigadă ? b) Ce economie au realizat cele două brigăzi, dacă prima economisește 2 ℓ de combustibil la ha și a doua, 1,5 ℓ la ha și dacă litrul de combustibil costă 2,20 lei ? c) Să se scrie mulțimea M ale cărei elemente sînt cifrele ce reprezintă numărul de tractoriști din prima și a doua brigadă. d) Fie N mulțimea factorilor primi ai c.m.m.m.c. al numerelor de tractoriști din cele două brigăzi. Să se scrie relațiile: $M \cup N$ și $M \cap N$. e) Ce relații mai puteți pune în evidență între elementele celor două mulțimi ?

Indicație. Dacă toți tractoriștii ar fi arat cîte 6 ha pe zi, atunci 25 de tractoriști ar fi arat 150 ha pe zi, iar în 12 zile 1 800 ha. În realitate, ei au lucrat cu $2\,040 - 1\,800 = 240$ ha mai mult, ceea ce provine din faptul că tractoriștii din a doua brigadă au arat cu $8 - 6 = 2$ ha mai mult pe zi, prin urmare în 12 zile, cei din a doua brigadă au arat în plus 24 ha.

Observație: Problema se putea rezolva presupunînd că toți tractoriștii ar fi arat cîte 8 ha pe zi.

R. a) 15; 10. b) 7 920 lei. c) $M = \{0; 1; 5\}$.

36. Un lucrător face cîte a piese pe zi, iar un altul cu b piese mai mult pe zi, dar a lucrat cu c zile mai puțin decît primul. a) Să se afle cîte zile a muncit fiecare, știind că ei au lucrat același număr de piese. b) Caz numeric: $2 < a < 25, a \in \mathbb{N}$ ai cărui divizori scriși în ordinea crescătoare fără extreme, alcătuiesc mulțimea $M = \{3; 4; 6; 12\}$, $b = 4$ și $c = 3$.

Indicație. a) Pentru primul muncitor $\frac{c(a+b)}{b}$ zile. Numărul de zile lucrate pentru al doilea muncitor $\frac{ac}{b}$. b) Primul muncitor, lucrînd cîte 24 de piese zilnic, în cele trei zile lucrate în plus a făcut 72 piese. Numărul pieselor lucrate de fiecare dintre cei doi lucrători fiind același, cel de-al doilea lucrător a făcut acest număr de 72 de piese lucrînd mai multe piese în fiecare zi. Știm că a lucrat cu 4 piese pe zi mai multe decît primul; a realizat deci cele 72 de piese în 18 zile.

R. b) 21 zile; 18 zile.

37. O brigadă a unei cooperative agricole de producție trebuia să semene un ogor în 14 zile. Depășind norma cu 2 ha pe zi, a terminat semănatul în 10 zile. Cîte hectare trebuia să semene brigada pe zi și cîte hectare au fost semămate în total ?

Indicație. Brigada a lucrat cu 4 zile mai puțin, deoarece a semănat cîte 2 ha în plus pe zi, deci, în 10 zile a semănat 20 ha în plus față de normă. Pentru cele 20 ha ar mai fi trebuit 4 zile.

R. 70 ha în total.

38. În două depozite s-au adus 4 365 kg de orez. Știind că $\frac{3}{5}$ din cantitatea de orez adus la depozit împreună cu $\frac{11}{15}$ din cantitatea de orez adus la al doilea depozit reprezintă $2\,821\frac{2}{5}$ kg. Să se afle cît orez s-a adus la fiecare depozit?

Indicație. Știm că $\frac{9}{15}$ din prima categorie și cu $\frac{11}{15}$ din a doua fac 2 821,40 kg. Așezăm cercurile ce reprezintă grămezile unul sub altul, ca în figura III.1 și apoi grupăm un cerc plin • cu un cerc •, așa cum se vede în schemă. Fiecare grupare ca aceasta reprezintă o cantitate ce cîntărește, $4\,365 : 15 = 291$ kg. Însă sînt 9 grupări de acest fel. Ele vor reprezenta $291 \cdot 9 = 2\,619$ kg. Dacă din 2 821,40 kg scădem 2 619 kg, rămîn 202,40 kg care reprezintă cît cîntăresc cele două grămezi rămase, notate cu 2

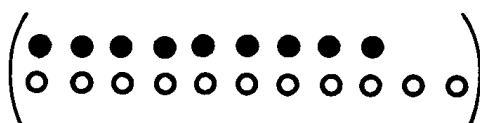


Fig.III.1

cercuri goale. Rezultă că o grămadă reprezentată printr-un cerc gol cântărește 101,20 kg.

R. 2 847 kg; 1 518 kg.

39. Să se găsească numerele A și B , știind că admit pe 40 ca cel mai mare divizor comun și pe 3 600 ca cel mai mic multiplu comun.

R. O soluție este $A=D=40$; $B=M=3\,600$; putem lua pentru A și B și alte valori, studiind descompunerea în factori a numerelor 40 și 3 600.

40. Doi concurenți, participând la un concurs, au răspuns corect -primul la 8 întrebări, al doilea la 6 întrebări. Suma primită de fiecare drept premiu este proporțională cu numărul de întrebări la care a răspuns corect. Ce sumă a primit fiecare, dacă $\frac{1}{6}$ din suma primită de al doilea concurent, mărită cu 25% din suma primită de primul, este cu 1 100 de lei mai mică decât sumele primite de ei împreună.

Indicație. Primul a primit 8 părți, iar al doilea, 6 părți. În total 14 părți. O parte este $\frac{1}{14}$ din întreg. Dacă din tot întregul scădem a 4-a parte din cât a luat primul, adică două părți, și $\frac{1}{6}$ din cât a luat al doilea, adică o parte, în total 3 părți, obținem 1 100 de lei \rightarrow 11 părți fac 1 100 lei.

R. 800 lei; 600 lei.

41. Trei tineri A, B și C au primit 1 520 de lei. Suma primită de cel de-al doilea reprezintă $\frac{4}{5}$ din suma primită de primul tânăr, iar suma primită de cel de-al doilea se raportează la suma primită de cel de-al treilea ca numerele $6\frac{1}{2} : 9\frac{1}{8}$. Să se afle câți lei a primit fiecare tânăr.

Indicație. Presupunem că A a primit 65 lei, atunci B primește $65 \cdot \frac{4}{5} = 52$ de lei, iar C primește $65 \cdot \frac{73}{65} = 73$ lei. $1\,520 : 190 = 8$ ori mai mică decât cea din enunț. Rezultă că sumele primite de cei trei tineri vor fi de 8 ori mai mari decât cele presupuse de noi.

R. 520 lei; 416 lei; 584 lei.

42. O coloană de soldați mergea pe o șosea cu viteza de 3 km/ oră. Unui biciclist care mergea în același sens, cu viteza de 15 km/ oră, i-au trebuit 2 minute pentru a merge de la un capăt la celălalt al coloanei. Să se afle lungimea coloanei de soldați.

Indicație. În fiecare oră biciclistul va înainta cu $15-3=12$ km mai mult decât coloana. Într-un minut va înainta cu $12:60=0,2$ km mai mult decât coloana, iar în două minute cu $0,2 \cdot 2 = 0,4$ km mai mult. Astfel el ajunge la capătul celălalt al coloanei, care are deci 0,4 km lungime.

R. 0,4 km.

43. Doi drumeți au pornit în același timp pe jos de la sat la oraș. Primul drumeț a sosit la oraș cu 2 ore mai târziu decât al doilea. Viteza primului drumeț este de

4 km/ oră, iar viteza celui de-al doilea, de 6 km/ oră. Să se determine distanța între sat și oraș.

Indicație. Fie s distanța între sat și oraș (în kilometri). Primul drumet o parcurge într-un timp $t_1: t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{4}$ ore, iar cel de-al doilea în timpul $t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{6}$.

R. 24 km.

44. Un călător care mergea într-un tren de persoane, ce avea viteza de 40 km/ oră, a observat că un tren accelerat care mergea în sens contrar a trecut pe lângă el în 3 secunde. Cunoscând că lungimea acceleratului este de 75 m, să se afle viteza acceleratului.

Indicație. Viteza personalului (în care se afla călătorul) $v_1 = 40$ km/ oră Viteza aparentă a acceleratului: $v_2 = \frac{s}{t} = \frac{75}{3} = 25$ m/s $= \frac{25 \cdot 3 \cdot 600}{1 \cdot 000} = 90$ km/ oră. Viteza acceleratului: $v_a = v_2 - v_1 = 90 - 40 = 50$ km/ oră.

Deci acceleratul avea viteza de 50 km/ oră.

R. 50 km/ oră.

45. O barcă cu vîsle parcurge o distanță în sensul cursului apei în $4\frac{1}{2}$ ore, iar împotriva curentului apei parcurge aceeași distanță în 6 ore. În cîte ore parcurge aceeași distanță o plută mînată numai de viteza apei ?

Indicație. Considerînd distanța parcursă ca un întreg, drumul parcurs în josul apei, într-o oră, va fi $\frac{1}{4,5}$, iar în susul ei, $\frac{1}{6}$.

R. 36 ore.

46. Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 8, numărul obținut este de $4\frac{1}{2}$ ori mai mare decît acela pe care îl vom obține dacă scriem cifra 8 la sfîrșitul lui. Care este acel număr?

Indicație. Fie a cifra căutată. Dacă așezăm cifra 8 înaintea sa, înseamnă că numărul obținut se va scrie algebric $80 + a$, (8 fiind cifra zecilor și a fiind cifra unităților). Dacă scriem acum cifra 8 la dreapta sa, adică numărul scris aritmetic este $\overline{a8}$, înseamnă că cifra zecilor devine a și a unităților simple 8, deci el se scrie algebric $10a + 8$. Enunțul problemei conduce la ecuația: $a + 80 = \frac{9}{2}(10a + 8)$, cu soluția $a = 1$ → numărul căutat este 1.

R. 1.

47. O lucrare trebuia terminată de 18 muncitori în 25 de zile. În cît timp a fost terminată lucrarea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 25%, iar alți doi muncitori cu 12,5% ?

Indicație. Dacă doi muncitori au depășit norma cu 25% înseamnă că ei au produs în plus, la un loc cît jumătate din norma unui muncitor; de asemenea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 12,5% ei au produs în plus cîte un sfert din norma unui muncitor. Situația este ca și cum s-ar fi efectuat:

$18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 18\frac{3}{4}$ norme. Acum problema se reduce la o regulă de trei simplă.

R. 24 zile.

48. Locatarii unei case trebuie sa plătească încălzitul pe o zi. Dacă fiecare dintre ei ar plăti câte 10 lei, ar mai lipsi 88 de lei, iar dacă fiecare ar da câte 10,80 lei, s-ar strînge cu 2,5% mai mult decît trebuie. Cît costă încălzitul casei și cîți locatari sînt în casă ?

R. 164 locatari; 1 728 lei.

49. Alama este un aliaj de aramă și zinc. O bucată de alamă cu o masă de 124 g, fiind cufundată în apă, "pierde" din masa sa 15 g. Cîtă aramă și cît zinc conține bucata de alamă, știind că 89g de aramă "pierd" în apă 10 g, iar 7 g de zinc "pierd" 1 g ?

Indicație. Dacă cele 89 g de aramă "pierd" din masă 10 g sub apă, conform principiului lui Arhimede, atunci 1 g "pierde" $\frac{10}{89}$ g, cele x grame de aramă "pierd" sub apă $\frac{10x}{89}$ g. Dacă cele 7 g de zinc "pierd" 1 g sub apă atunci: 1 g "pierde" $\frac{1}{7}$ g.

R. 80 g aramă; 35 g zinc.

50. Un aliaj de aur și aramă are titlul de 0,650 și are masa de 10 g. Cît aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,950 ?

Indicație. T = Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios (m) pe care îl conține și masa totală a aliajului (M), adică $T = \frac{m}{M}$. Calculăm mai întîi masa aurului corespunzătoare la 10 g aliaj cu titlul de 0,650; se obțin 6,5 g.

R. 60 (grame aur).

51. Un aliaj este format din 10 g aur și 20 g argint. Cît aur trebuie să-i adăugăm pentru a obține un aliaj cu titlul de 0,800 ?

R. 70 g aur.

52. Un aliaj de 4 kg cu titlul de 0,900 este făcut dintr-o bucată de aur cu titlul de 0,700 și o alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel de aur a intrat în aliaj ?

Rezolvare. $\frac{0,950}{0,700} \left\{ \frac{0,200}{0,050} \right\} \frac{0,200}{0,050} = \frac{20}{5}$; $20+5=25$ părți. Acum calculăm cantitatea luată

din fiecare bucată de aur: $\frac{4 \cdot 20}{25} = 3,2$ kg; $\frac{4 \cdot 5}{25} = 0,8$ kg.

R. 3,2 kg; 0,8 kg.

53. Secția de strungărie a unei întreprinderi trebuie să confecționeze, 75 000 de piese. Acest număr de piese este repartizat celor trei brigăzi de strungari, compuse din 7, 8 și 10 muncitori, proporțional cu numărul lor. Încă din prima lună a anului, cele trei brigăzi au depășit norma lunară respectiv cu 12%, 12,5%, 13%. Să se afle numărul de piese confecționate în această lună de către fiecare brigadă, precum și procentul de depășire lunară pentru întreaga secție.

R. 21 000 piese; 24 000 piese;

30 000 piese=12,5% depășire.

54. Un muncitor poate să efectueze o lucrare în 12 zile. Alt muncitor ar executa aceeași lucrare în 15 zile. Ei au început să lucreze în același timp și au lucrat împreună un anumit număr de zile, după care primul muncitor a fost mutat la altă lucrare, iar muncitorul al doilea a terminat partea rămasă în 6 zile. Cîte zile a lucrat primul muncitor ?

R. 4 zile.

55. Două tractoare lucrând împreună, au arat în 15 ore a 6-a parte dintr-un teren. Dacă primul tractor ar ara singur 12 ore și pe urmă ar lucra tractorul al doilea 20 de ore, ele ar ara 20% din tot terenul. În cât timp poate ara terenul fiecare tractor lucrând singur ?

Indicație. Cele două tractoare lucrând împreună ară într-o singură oră $\frac{1}{6} : 15 = \frac{1}{90}$ din întregul teren. În 12 ore, lucrând împreună, ele ară $\frac{12}{90} = \frac{2}{15}$ din teren. Tractorul al doilea ară cu 8 ore mai mult. În acest timp el ară: $\frac{20}{100} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$ din teren. Rezultă că tractorul al doilea ară întreg terenul în 120 de ore. Primul tractor ară în 15 ore $\frac{1}{6} - \frac{1}{120} = \frac{1}{24}$ din teren, iar întregul teren în 360 de ore.

R. 360 ore; 120 ore.

56. Cîțiva excursioniști au angajat o barcă pentru 3 ore și au pornit în sensul curentului apei. Cu câți km pot să se depărteze ei de la debarcader ca să ajungă înapoi în 3 ore, dacă viteza bărcii în apă stătătoare este de 7,5 km/ oră, iar viteza apei este de 2,5 km/ oră ?

Indicație. Să notăm cu s spațiul parcurs, socotit în kilometri; $7,5 + 2,5 = 10$ km/ oră = viteza la dus. Timpul necesar va fi: $\frac{s}{10}$ ore. Viteza la întoarcere este de $7,5 - 2,5 = 5$ km/ oră, iar timpul $\frac{s}{5}$. Timpul dus-întors este de 3 ore, adică: $\frac{s}{10} + \frac{s}{5} = 3$, deci $s = 10$ km.

R. 10 km.

57. Lungimea circumferinței roții dinapoi a unei căruțe este de 2 ori mai mare decît lungimea circumferinței roții dinainte. Pe distanța de 300 m roata dinainte a făcut cu 100 de învîrtituri mai multe decît cea dinapoi. Să se afle lungimea circumferinței fiecărei roți.

Indicație. Deoarece lungimea circumferinței roții din față este de 2 ori mai mică, înseamnă că a făcut de 2 ori mai multe învîrtituri decît roata din spate. Deci, diferența dintre numărul de învîrtituri făcute de cele două roți este egală cu numărul de învîrtituri făcute de roata din spate. Roata din spate a făcut 100 de învîrtituri deci, circumferința roții din spate este de 3 m. Circumferința roții din față este: $3:2 = 1,5$ m.

R. 3 m; 1,5 m.

58. Un grup de elevi pleacă cu bicicletele în excursie de la București spre o pădure situată la o distanță de 40 km de locul de plecare. O dată cu ei, pleacă și un motociclist. Bicicliștii merg cu 12 km/ oră, iar motociclistul cu 36 km/ oră. Motociclistul ajunge la pădure, unde se odihnește o oră, apoi se întoarce în întîmpinarea bicicliștilor. După cât timp de la plecarea din București îi întîlnește pe elevi și la ce distanță de București ?

Indicație. Motociclistul, mergînd cu 36 km/ oră, a parcurs 40 km în $1\frac{1}{9}$ ore și a mai stat o oră în pădure; deci, în total, s-au scurs de la plecarea lui din București $2\frac{1}{9}$ ore. În acest răstimp, bicicliștii au parcurs $\left(2\frac{1}{9}\right) \cdot (12)$ km, adică $25\frac{1}{3}$ km și au ajuns în punctul A (v.fig.III.2).

Urmează că de la A la pădure sînt: $40 - 25\frac{1}{3} = 14\frac{2}{3}$ km. Această distanță o parcurg bicicliștii, de la A către pădure, cu 12 km/ oră, iar motociclistul de la P la A, cu o viteză de 36 km/ oră, adică de trei ori mai mare, deci în timp ce bicicliștii fac un sfert din distanța AP, motociclistul face trei sferturi. Găsim distanța de

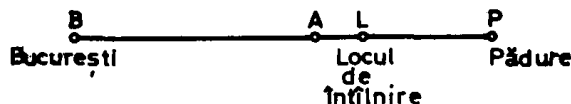


Fig.III.2

la A pînă la locul de întîlnire L, apoi timpul respectiv.

R. $\frac{29}{12}$ ore; 29 km.

59. Tatăl a chemat pe feciorul său cel mare și i-a spus: în sertarul bibliotecii vei găsi o casetă cu o sumă de bani, ce nu depășește 50 lei; să-ți iei partea ta și să lași acolo restul pentru ceilalți doi frați ai tăi, ținînd seama că toți trebuie să primești sume egale. Copilul a putut face acest lucru corect după ce i-a dat 1 leu mamei sale. A chemat apoi pe fiul mijlociu căruia i-a spus același lucru. Acesta crezînd că este primul care împarte suma, a putut face aceasta după ce i-a dat mai întîi și el 1 leu mamei sale. Al treilea fecior crezînd și el că este primul ce împarte suma a făcut și el același lucru ca și frații săi. Ce sumă a fost în sertar inițial și ce sumă a găsit fiecare în sertar ?

60. Se dau trei săculețe cu nuci; în fiecare din ele se află un același număr de nuci. Dacă se iau cîte 8 nuci din fiecare săculeț, rămîn în toate cele trei săculețe tot atîtea nuci cîte au fost la început în fiecare săculeț. Cîte nuci sînt în fiecare săculeț ?

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura III.3.

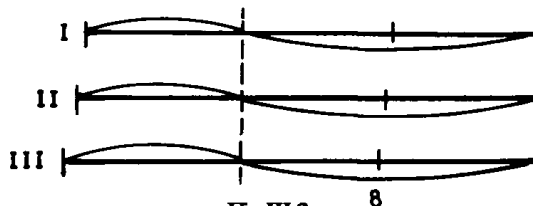


Fig.III.3

R. 12 nuci.

61. Într-o curte sînt găini, gîște, rațe și curci. Numărul găinilor reprezintă $\frac{1}{2}$ din numărul celorlalte păsări; numărul gîștelor reprezintă $\frac{1}{3}$ din numărul celorlalte păsări; numărul rațelor reprezintă $\frac{1}{4}$ din numărul celorlalte păsări. Știind că numărul curcilor este de 260, să se afle numărul total al păsărilor din curte.

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura III.4.

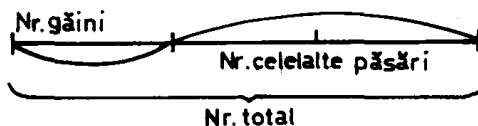


Fig.III.4

De fiecare dată se va considera mulțimea formată de celelalte pasări ca un întreg.

R. 1 200 păsări.

62. Mama este mai în vîrstă decît fiica sa de $2\frac{1}{2}$ ori. Cu 6 ani în urmă, mama era de 4 ori mai în vîrstă decît fiica. Care este vîrsta actuală a celor doua persoane ?

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura III.5.

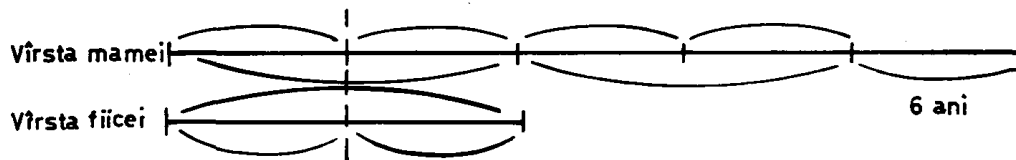


Fig.III.5

R. 30 ani, 12 ani.

63. Vîrsta tatălui reprezintă $1\frac{5}{6}$ din vîrsta fiului său. Acum 10 ani vîrsta fiului era 44,(4)% din vîrsta tatălui. Cîți ani are tatăl ? Dar fiul ?

Indicație. Schița pentru rezolvarea aritmetică este dată în figura III.6.

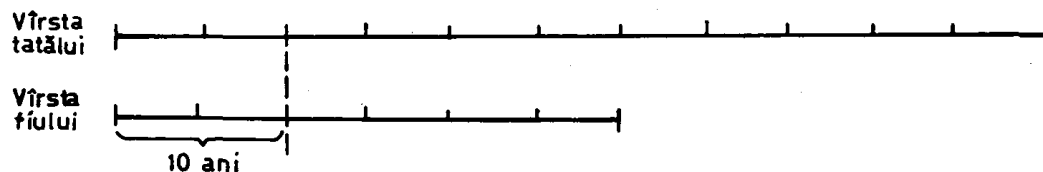


Fig.III.6

R. 55 ani; 30 ani.

64. O studentă are azi de 5 ori vîrsta pe care o avea ea, cînd fratele ei avea vîrsta ei actuală. Cînd ea avea etatea de azi a fratelui ei, suma vîrstelor va fi 88 ani. Ce etate are fiecare acum ?

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică.

	trecut	prezent	viitor
pentru vîrsta studentei	(1)0	(5)00000	(9)00000000
pentru vîrsta fratelui ei	(5)0	(9)00000	(13)00000000
	0000	0000	0000
			9+13=22 părți egale corespund la 88 ani.

R. 20 ani; 36 ani.

65. Să se afle trei numere știind că $\frac{2}{3}$ din primul este cît $\frac{5}{8}$ din al doilea, iar $\frac{5}{12}$ din al doilea valorează cît $\frac{7}{18}$ din al treilea. Suma numerelor este 33,7.

Indicație. Se presupune că primul număr ar fi 21; atunci, conform enunțului, se găsește că al doilea ar fi 22,4, iar al treilea 24. Suma celor trei numere ar fi atunci 67,4 adică dublul celei din enunț; prin urmare, toate numerele trebuie micșorate de două ori.

R. 10,5; 11,2; 12.

70. Un copil nu are 100 de nuci, ci îi lipsesc atâtea nuci câte ar avea peste 100, dacă ar avea de 9 ori câte are acum. Câte nuci are acel copil?

Indicație. Schița pentru soluție este dată în fig.III.7.

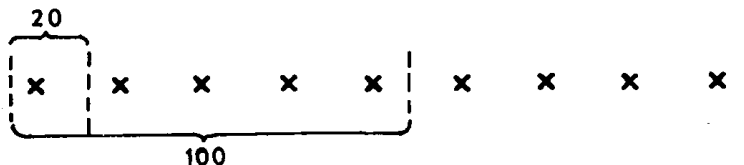


Fig.III.7

R. 20 nuci.

71. Se repartizează 22 000 volume pentru bibliotecile de la 3 licee, 2 școli generale și o școală profesională. Fiecare liceu primește de 3 ori mai multe cărți decât școala profesională, iar școala profesională primește de două ori mai multe cărți decât fiecare școală generală. Câte cărți primește fiecare școală din cele trei categorii ?

Indicație. Schița pentru soluție este dată în fig.III.8.

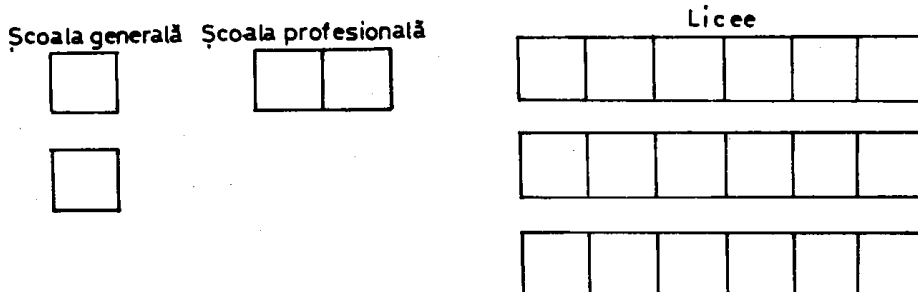


Fig.III.8

R. 6 000 vol; 1 000 vol; 2 000 vol.

72. Două ateliere care produc piese metalice au randamente diferite: dacă fiecare ar realiza 1 000 piese mai mult pe lună, atunci producția primului atelier ar fi de trei ori mai mare decât producția celui de-al doilea atelier, iar dacă fiecare ar lucra 1 000 piese mai puțin pe lună producția primului atelier ar fi de 5 ori mai mare decât a celui de-al doilea atelier. Câte piese produce lunar fiecare dintre cele două ateliere ?

Indicație. Schița pentru soluție este dată în fig.III.9. Reprezentăm producția celui de-al doilea atelier prin AB ; după creșterea cu 1 000 piese, producția devine AC , iar producția primului atelier o reprezentăm prin $A'C' = 3AC$. ($A'M = MN = NC' = AC$). Notăm micșorarea de 1 000 piese cu $BP = B'P'$; rezultă $AP = NP'$. Dar $A'P'$ trebuie să fie de 5 ori cât AP , deci AP se cuprinde în $A'N$ de 4 ori și în AC de 2 ori, adică $AP = PC$ și corespunde cu 2 000 piese, de unde rezultă că AB corespunde unei producții de 3 000 piese. Producțiile sînt de 11 000 piese, respectiv 3 000 piese lunar.



Fig.III.9

R. 11 000 piese; 3 000 piese.

73. Din producția unei grădini de zarzavat s-a vândut o dată $\frac{21}{40}$ cu un câștig de 30% față de cheltuieli, iar restul s-a vândut cu suma de 2 270 lei. Ce sumă s-a încasat din această vânzare ?

Indicație pentru soluția aritmetică.

Să presupunem că prețul de cost ar fi fost 100 lei. Se găsește că pentru prima parte, vândută cu un beneficiu de 30%, s-ar fi încasat 68,25 lei; dar cum întreaga cantitate s-a vândut cu un beneficiu de 25%, adică s-ar fi încasat 125 lei, rezultă că pentru a doua parte a vânzării, s-ar fi încasat $125 - 68,25 = 56,75$ lei. În realitate s-au încasat pentru partea a doua 2 270 lei, adică de 40 de ori mai mult ($2\,270 : 56,75 = 40$) decât prin presupunerea noastră. Aceasta înseamnă că prețul de cost a fost $100 \cdot 40 = 4\,000$ lei, iar suma încasată prin vânzare a fost 5 000 lei.

R. 5 000 de lei.

74. Să se împartă 232 în trei părți, astfel că, dacă la prima parte se adaugă jumătate din suma celorlalte două, la a doua se adaugă a treia parte din suma celorlalte două, iar la a treia a patra parte din suma celorlalte două, rezultatele să fie egale între ele.

R. 40, 88 și 104.

75. Într-o pivniță sînt trei butoaie. Dacă s-ar umple primul butoi cu apă și s-ar turna din el în butoiul al doilea pînă ce acesta s-ar umple, în primul butoi ar rămîne $\frac{2}{7}$ din apa care era în el; dar dacă butoaiele al doilea și al treilea, fiind pline, le-am deșerta în primul butoi, ar mai lipsi 10 litri ca acesta din urmă să se umple. Câți litri de apă conține fiecare dintre aceste butoaie, dacă în toate trei încap 270 litri ?

R. 140 litri; 100 l; 30 l.

76. Perimetrul unui triunghi este de 36 m. Raportul dintre latura cea mică și cea mare a acestui triunghi este $\frac{3}{5}$ iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mijlocie este 3 m. Să se afle laturile triunghiului.

R. 9 m; 12m; 15m.

77. Să se împartă numărul 49 în trei părți, astfel încît dacă adăugăm primei părți o treime din suma celorlalte două, celei de-a doua $\frac{1}{4}$ din suma celorlalte două și celei de-a treia $\frac{1}{5}$ din suma celorlalte două, să obținem numere egale.

R. 13; 17; 19.

78. O marfă se vinde cu un câștig de 0,11 din prețul ei de cost; dar acest câștig este mai mic cu 181,50 lei decât 0,11 din întreaga sumă încasată prin vânzarea mărfii. Care este prețul de cost al mărfii, dar prețul de vânzare ?

Indicație pentru soluția aritmetică. Să presupunem că prețul de cost al mărfii ar fi fost 100 lei; atunci câștigul ar fi fost, conform condițiilor din enunț, de 11 lei, deci suma încasată din vânzare ar fi fost 111 lei. Frația 0,11 din întreaga sumă încasată este atunci $0,11 \cdot 111 = 12,21$ lei, față de care câștigul este mai mic cu 1,21 lei. Cum câștigul real este mai mic cu 181,50 lei decât fracția 0,11 din suma de vânzare, rezultă că adevăratul preț de cost este mai mare decât cel presupus și anume de atîtea ori mai mare de cîte cuprinderi de cîte 1,21 sînt în 181,50. Numărul acestor cuprinderi fiind 150 înseamnă că prețul real de cost este $100 \cdot 150 = 15\,000$ lei.

R. 15 000 lei; 16 650 lei.

79. Dacă un kg de fructe s-ar vinde cu 2,80 lei s-ar pierde $6\frac{2}{3}\%$ din prețul său de cost; dacă aceleași fructe s-ar vinde cu prețul de 3,30 lei kg atunci s-ar câștiga la întreaga cantitate vândută 36 lei. Care este prețul de cost al întregii cantități de fructe?

R. 360 lei.

80. Trei asociații s-au înțeles să împartă cheltuielile pentru construcția unui pod, proporțional cu numărul de membri ai asociațiilor și invers proporțional cu distanța de la sediul asociațiilor până la pod. Podul costă 55 320 lei, asociațiile au respectiv, 84 membri, 156 membri, 56 membri, iar distanțele până la pod sînt, respectiv, de 3 km, 2,6 km și $1\frac{3}{4}$ km. Ce sumă va plăti fiecare asociație ?

R. 12 908 lei; 27 660 lei; 14 752 lei.

81. La un atelier de confecții s-au cumpărat 140 metri de mătase de trei feluri plătindu-se sumele de 9 000 lei, 6 600 lei și 4 000 lei, respectiv pentru cele trei calități. Cîți metri de mătase are fiecare bucată, dacă se știe că 1,1 m din prima calitate costă tot atît cît 1,8 m din calitatea a doua, iar $6\frac{2}{3}$ m din a doua costă tot atît cît $5\frac{1}{2}$ m din calitatea a treia.

Indicație. Judecăm astfel: dacă prima bucată de mătase ar avea 20 m, atunci 1 m ar costa 450 lei. Potrivit relațiilor date între prețuri ar rezulta că 1 m din bucata a doua costă 275 lei și deci această bucată ar avea $6\,600:275=24$ m. Judecînd la fel pentru bucata a treia, se găsește că un metru costă $333\frac{1}{3}$ lei și ar fi 12 m. Numărul total de m ar fi astfel $20+24+12=56$ m (față de 140 m dați în enunț). Cantitățile trebuie majorate de 2,5 ori ($140:56=2,5$).

R. 50 m; 60 m; 30 m.

82. Un biciclist mergînd dintr-un sat spre oraș, parcurge această distanță cu viteza de 8 km/h, la dus și cu viteza de 12 km/h la întors. El a mers în total 10 ore. Care este distanța de la sat la oraș ? Să se dea și soluția aritmetică.

Indicație pentru soluția aritmetică. Se va calcula timpul necesar parcurgerii unui km, atît la dus, cît și la întors, spre a putea deduce drumul străbătut în cele 10 ore de mers.

R. 48 km.

83. Un biciclist a parcurs distanța de la A la B astfel: în prima etapă a parcurs $\frac{1}{5}$ din distanța de la A la B plus 20 km. În altă etapă a parcurs $\frac{1}{6}$ din rest plus 50 km și astfel a parcurs toată distanța de la A la B. Cîți km sînt de la A la B?

R. 100 km.

84. O cooperativă agricolă a vîndut 3 000 q de cereale și anume: orz, secară și grîu, primind: pentru orz 140 000 de lei, pentru secară 120 000 de lei și pentru grîu 84 000 de lei. Știind că 6 q de orz costă cît 5 q de secară și că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu să se afle cantitatea de chintale și costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

Indicație. Să notăm cu x, y, z numerele ce reprezintă cantitățile în chintale de orz, secară și grîu vîndute de cooperativă $x+y+z=3\,000$. Scriem acum că 6 q de orz costă cît 5 q de secară:

$$\frac{6 \cdot 140\,000}{x} = \frac{5 \cdot 120\,000}{y}$$

Apoi, scriem că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu:

$$\frac{7 \cdot 120\,000}{y} = \frac{6 \cdot 84\,000}{z}. \text{ Rezultă } x=1\,400, y=1\,000, z=600.$$

R. 100 lei; 120 lei; 140 lei.

85. Două robinete, curgînd împreună, pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au fost deschise timp de 2 ore, apoi s-a închis primul robinet și bazinul s-a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet. a) În cît timp poate să umple bazinul fiecare robinet ? b) Se consideră cifrele, scrise în ordinea crescătoare a numerelor ce exprimă timpul în care cele două robinete umple bazinul, elementele mulțimilor A respectiv B . Să se determine $A-B$ și $A \cap B$.

Indicație. Într-o oră ele umplu $\frac{1}{8}$ din bazin. În două ore robinetele au umplut $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. Cel de-al doilea robinet a umplut în 18 ore $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ din bazin și, prin urmare, întregul bazin îl umple în $18 : \frac{3}{4} = 24$ ore. Deoarece al doilea robinet a umplut $\frac{1}{24}$ din bazin într-o oră primul va umple într-o oră $\frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$ din bazin și prin urmare va umple tot bazinul în 12 ore.

R. 12 ore și 24 ore.

86. O cadă este alimentată de două robinete: prin unul curge apă la 15°C prin celălalt la 60°C . Dacă robinetele sînt deschise amîndouă odată, apa din cadă este la temperatura de 30°C . Primul robinet umple singur cada într-o oră. În cît timp se umple cada, dacă ambele robinete sînt deschise ?

Indicație. La robinetul cu apă rece se cîștigă 15°C , iar la robinetul cu apă caldă se pierde 30°C . Pentru ca să se compenseze pierderea, primul robinet are un debit dublu. Ținînd seama de debitul pe oră rezultă relația:

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{120} = \frac{1}{40}$$

R. 40 minute.

ALGEBRA

III.2. EXERCIIII ȘI PROBLEME

1. Să se determine mulțimea divizorilor, numere naturale, a numărului 16.
2. Să se determine mulțimea multiplilor numărului 3 cuprinși între 8 și 25 și care sînt numere naturale.
3. Fie M mulțimea divizorilor, numere naturale, ai numărului 20 și $N = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Să se compare aceste mulțimi.
R. $M=N$.
4. Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $x \in A$. Să se determine x pentru fiecare din egalitățile următoare astfel încît următoarele propoziții să fie adevărate:
 $x^2 - 4 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $2x + 2 = 0$; $3x + 1 = 7$.
5. Să se determine numerele naturale x și y astfel încît următoarele propoziții să fie simultan adevărate: $5x + 2y = 19$, $2x + y = 16$.

6. Fie $A = \{1; 8; 9; 10\}$. Să se determine x, y și z astfel încît: $x-y+2z=4$, $2x+y+4z=32$; ($x \in A$; $y \in A$; $z \in A$) să fie simultan adevărate.

R. $x=10$; $y=8$; $z=1$.

7. Fie mulțimile $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{x \in N | 2x+3=9\}$ și $B = \{x \in N | x^2=9\}$. $x \in M$?

8. Să se calculeze numărul x definit prin egalitatea $x=a-b-c$ știind că $a=-2$; $b=+4$; $c=-3$.

9. Să se calculeze numerele x și y definite de formulele:

$$x=abc; y=ab-bc-ac \text{ pentru } a=3; b=-5; c=-2.$$

10. a) Din relația $X \cup A = Y \cup A$ rezultă $X=Y$?

b) Din relația $X \cap A = Y \cap A$ rezultă $X=Y$?

11. Să se scrie prescurtat cu ajutorul coeficienților următoarele expresii:

$$\begin{aligned} x+x+y+y+y; & \quad \frac{m+m}{n+n+n}; \\ a+a+b+a+b+a; & \quad \frac{d+d+2d}{2c+c+3c+c}; \\ \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3}; & \quad \frac{x}{100} + \frac{3x}{100} + \frac{x}{100} - \frac{z}{10} - \frac{z}{10} - \frac{2z}{10}. \end{aligned}$$

12. Să se scrie prescurtat cu ajutorul coeficienților, următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \text{a) } ab+ab; & \quad \text{b) } abc+abc; & \quad \text{c) } \frac{ab+ab}{cd+cd+cd}; & \quad \text{d) } xy+xy+xy+xy+xy; \\ \text{e) } bcd+bcd+bcd; & \quad \text{f) } \frac{abc+abc+abc}{3}; & \quad \text{g) } \frac{k+k-mn-mn-mn}{k+k+k+mn+mn}; \\ \text{h) } (a+b)+(a+b)-(m-n)-(m-n)-(m-n). \end{aligned}$$

13. Să se afle aria a șase loturi de grădină egale de formă dreptunghiulară cu laturile de m metri și n metri.

14. O cameră are următoarele dimensiuni: lungimea a metri, lățimea b metri și înălțimea h metri. Să se exprime volumul a n camere de același fel. Să se calculeze volumul pentru: $a=5$; $b=4$ și $h=2,5$.

15. Să se scrie sub formă generală numerele pare, numerele impare, multipli lui 5 și multipli comuni ai numerelor 2 și 3.

16. Să se restrîngă următoarele expresii folosind exponenții:

$$\begin{aligned} & 3.3.a.a.a.; \quad b.b.b....b \text{ (de } n \text{ ori)}; \\ & (a+b)(a+b)(x-y)(x-y)(x-y); \\ & (a+x)(a+x)(a+x)...(a+x) \text{ (de } n \text{ ori)}. \end{aligned}$$

17. Fie mulțimea M ale cărei elemente sînt numerele sub formă de produse de puteri de factori primi ai numerelor 128; 1 728; 1 000 și mulțimea Q care are ca elemente numerele de produse de puteri de factori primi ai numerelor 384; 512; 640. Să se afle $(M \cup Q) \cap Q$.

18. Să se restrîngă următoarele expresii cu ajutorul unor coeficienți și exponenți $a^3 + a^3 + a^3; y^3 + y^3 + y^3 + y^3; x^2y + x^2y + x^2y; \frac{a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b + b \cdot b \cdot b + b \cdot b \cdot b}$.

Să se utilizeze metoda grafică la rezolvarea următoarelor trei probleme:

19. Dacă mărim de 3 ori un număr și adăugăm la rezultat $\frac{1}{3}$ din el, obținem numărul a . Să se afle numărul.

$$R. \frac{3a}{10}$$

20. Dacă mărim de 4 ori un număr și scădem din rezultat $\frac{1}{4}$ din el obținem numărul b . Să se afle numărul.

$$R. \frac{4b}{13}$$

21. Dacă micșorăm un număr de 2 ori și scădem din rezultat $\frac{1}{5}$ din el obținem a . Să se afle numărul necunoscut.

$$R. \frac{10a}{3}$$

22. Dacă împărțim numărul a la numărul x și adăugăm la rezultat b , obținem numărul y . Să se determine x .

$$R. x = \frac{a}{y-b}$$

23. Dacă împărțim numărul a la un număr x și scădem din rezultat numărul y obținem 0. Să se afle numărul necunoscut x .

$$R. x = \frac{a}{y}$$

24. În doi saci sînt a kg de făină; în primul sac sînt cu b kg mai mult decît în al doilea. Să se exprime cîte kg de făină sînt în fiecare sac ?

$$R. \frac{a-b}{2}; \frac{a-b}{2} + b.$$

25. O mamă este mai în vîrstă decît fiul său cu x ani și mai tînără decît tatăl cu y ani. Știind că toți trei au împreună z ani să se exprime vîrsta fiecăruia.

$$R. \text{fiul: } \frac{z-(2x+y)}{3}; \text{mama: } \frac{z-(2x+y)}{3} + x; \text{tatăl: } \frac{x+2y+z}{3}.$$

26. Suma a două numere este a iar raportul lor este $\frac{c}{b}$. Să se determine aceste numere.

$$R. \frac{ac}{c+b}; \frac{ab}{c+b}.$$

27. Diferența a două numere este a iar raportul lor este $\frac{m}{n}$; $n > m$. Să se determine aceste numere.

$$R. \frac{am}{n-m}; \frac{an}{n-m}.$$

28. Să se împartă numărul m în părți proporționale cu numerele a, b, c .

$$R. \frac{am}{a+b+c}; \frac{bm}{a+b+c}; \frac{cm}{a+b+c}.$$

29. Laturile a, b, c , ale unui triunghi cu perimetrul de m cm sînt invers proporționale cu numerele $2; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}$. Să se determine laturile triunghiului în funcție de m .

$$R. a = \frac{3m}{20}; b = \frac{8m}{20}; c = \frac{9m}{20}.$$

30. Cele trei dimensiuni L, l, i , ale unui paralelipiped dreptunghic, sînt proporționale cu numerele $2; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}$. Lungimea este mai mare decît lățimea cu 18 cm. Să se calculeze volumul paralelipipedului în dm^3 .

$$R. 1,156 \text{ dm}^3.$$

III.3. VALOAREA NUMERICĂ A UNEI EXPRESII ALGEBRICE

Să se afle valorile numerice ale expresiilor algebrice:

1. $2a-3bc$ cînd $a=5, b=1, c=\frac{1}{2}$.

$$R. 8\frac{1}{2}.$$

2. $5(x-y)$ cînd $x=14,2; y=6,8$.

$$R. 37.$$

3. $3(x^2+y^2), 3(x+y)^2, [3(x+y)]^2$ cînd $x=6, y=8$.

$$R. 300; 588; 1\,764.$$

4. $2(x^2-y^2), 2(x-y)^2$ și $[2(x-y)]^2$ cînd $x=10, y=7$.

$$R. 102; 18; 36.$$

5. $(a+b)(a-b)$ cînd $a=8, b=5$.

$$R. 39.$$

6. $(a+b)(c-d)$ cînd $a=10, b=4, c=1,1(6), d=\frac{3}{4}$.

$$R. 4\frac{1}{6}.$$

7. $(a-b)c+d$ cînd $a=10, b=3, c=\frac{2}{7}, d=\frac{3}{5}$.

$$R. 2\frac{3}{5}.$$

8. $a+b(c+d)$ cînd $a=10, b=14, c=\frac{2}{7}, d=\frac{3}{5}$.

$$R. 22\frac{2}{5}.$$

9. $(2x+y)^2$ cînd $x=\frac{3}{4}, y=\frac{5}{8}$.

$$R. 4\frac{33}{64}.$$

10. $2xy^2$ cînd $x=0,75, y=\frac{5}{8}$.

$$R. \frac{75}{128}.$$

11. $2a^3+3a^2-5a+6$ cînd $a=2, a=\frac{1}{2}, a=1\frac{2}{3}$.

$$R. 24; 4\frac{1}{2}; 15\frac{7}{27}.$$

12. $5+4x+3x^2+2x^3$ când $x=3, x=0,1 x=\frac{1}{2}$. R. 98; 5,432; 8.
13. $\frac{1+a+a^2}{1+a-a^2}$ când $a=\frac{1}{2}$. R. $1\frac{2}{3}$
14. $m(m-n)+2n$ când $m=5,4; n=3,9$. R. 15,9.
15. $a^2(2a+b)+3a$ când $a=1,5; b=4$. R. 20,25.
16. $\frac{a}{m} - \left(\frac{a^2}{m^2} - 2 \right)$ când $a=2\frac{1}{2}, m=1,4$. R. $\frac{117}{196}$
17. $3(a^2-b^2)-4(a+b)$ când $a=-0,5; b=0,1$. R. 2,32.
18. Să se afle lungimea unei circumferințe (C) în care d este diametrul, iar $\pi=3,14$.
Se va calcula cu aproximație de 0,1 prin lipsă.

d (centimetri)	15	20	18,5	10,5	0,36	1,05	3,25	2,75
$C=\pi d$								

19. Să se afle aria unui cerc A în care R este raza cercului și $\pi=3,14$. Se va calcula cu o aproximație de 0,1 prin adaos.

R (metri)	8,25	2,1	2,6	1,2
$A=\pi R^2$				

20. Să se afle volumul cilindrului V cu R raza bazei și H înălțimea.

R (metri)	2,4	1,01	0,01
H (metri)	5,2	1,5	1,1(6)
$V=\pi R^2 H$			

21. Să se arate că împărțind suma cuburilor numerelor a și b la cubul numărului a obținem $1+\frac{b^3}{a^3}$.

22. a) Să se figureze, în raport cu un sistem de axe perpendiculare, punctele care au coordonatele $x=5, y=3; x=-3, y=-4; x=-4, y=6; x=5, y=-2$.

- b) Să se figureze punctele care au următoarele coordonate $x=8\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}; x=-6,5,$

$y=4,5$; c) Să se figureze punctele: $A\left(-3\frac{3}{4}; 5\frac{1}{2}\right)$; $B(-0,8; -1,4)$.

23. a) Să se construiască triunghiul ale cărui vîrfuri A, B, C au coordonatele $A(4; 5)$, $B(8; 2)$, $C(-6; 3)$. b) Să se construiască patrulaterul ale cărui vîrfuri A, B, C, D au coordonatele: $A(-3; 8)$; $B(10; 6)$; $C(5; -5)$; $D(-7; -9)$.

24. Tabelul de mai jos indică temperaturile medii din luna noiembrie.

Data	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatura	+3°	+5°	+6°	+5°	0°	-3°	-6°	-7°	8°

a) Să se reprezinte sub formă de grafic variația temperaturii.

b) Cum se determină pe grafic temperatura cea mai mare și cea mai mică a aerului din cele 9 zile ale lunii ?

25. Nivelul apei unui râu a variat de la 1 pînă la 15 mai în comparație cu cel mijlociu în felul următor:

Data	Nivelul apei în cm	Data	Nivelul apei în cm	Data	Nivelul apei în cm
1	10	6	20	11	0
2	12	7	17	12	-3
3	15	8	14	13	-3
4	18	9	10	14	-5
5	22	10	5	15	-8

a) Să se facă graficul variației nivelului apei din râu în acest interval de timp. b) Să se arate pe grafic nivelul cel mai ridicat și cel mai scăzut al apei din acest timp.

26. Figura III.10 reprezintă graficul variației drumului S în funcție de durata mișcării t în cazul unui drumeț care are o mișcare uniformă. Să se afle, cu ajutorul graficului, drumul S parcurs în timp de: 2 ore; $2\frac{1}{2}$ ore; 3 ore; $3\frac{1}{2}$ ore; 4 ore; $4\frac{1}{2}$ ore.

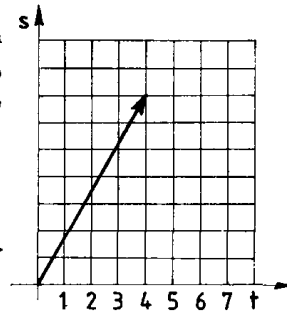


Fig.III.10

27. Pentru măsurat stofele se utiliza cotul, înainte de introducerea metrului. Știind că 1 cot=0,64m, să se construiască graficul pentru transformarea metrilor în coți și invers. Să se transforme după grafic: a) în coți: 2 m, $2\frac{1}{2}$ m; $3\frac{1}{2}$ m. b) în metri: 2 coți; 3 coți; 4 coți.

28. Să se arate că produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2 și produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 3.

29. Numărul x este mai mare decât numărul y cu 8. Să se scrie aceasta în trei feluri sub formă de egalități.

30. Să se afle mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care expresia $2x-1 \leq 4$ și $2x-1 > 4$.

$$\mathbb{R} \left(-\infty; \frac{5}{2} \right]; \left(\frac{5}{2}; +\infty \right).$$

31. Pentru ce valori ale lui a și b avem: $a=5a$; $a=a^2$; $a^3 < a^2$; $a^3 = a^2$; $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{a}{b} < 1$; $\frac{a}{b} > 1$; $ab = a$; $ab < a$; $ab > a$?

32. Este expresia $2k$ totdeauna un număr cu soț ? Să se scrie forma generală a multiplilor lui 7. Să se scrie forma generală a numerelor care împărțite la 3 dau restul 2.

33. Să se scrie sub formă de puteri ale numărului 10 următoarele: 10 000; 100 000; 1 000 000; 1 000 000 000.

34. Să se calculeze: $5 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^6$; $6 \cdot 10^{12}$. Să se scrie prescurtat folosind puterile lui 10 următoarele numere: 90 000; 500 000; 300 000; 2 000 000 000; 450 000 000 000.

35. În ce condiții fracția $\frac{a}{b}$ este un număr pozitiv; un număr negativ; egală cu zero; fără sens ?

36. În ce condiții au loc relațiile: $a+b=a-b$; $(a+b)^2=a+b$; $a+b=0$.

37. Pentru ce valori ale lui a sînt adevărate relațiile: $a < 2a$; $a = 2a$; $a > 2a$?

38. Să se arate în ce condiții suma a doi termeni este: a) egală cu unul din termeni; b) mai mică decât unul din ei.

39. Pentru ce valori ale lui x următoarele propoziții sînt adevărate:

$$\frac{x-1}{2} > 0; \frac{x-1}{2} < 0; \frac{x-1}{2} = 0.$$

40. Care din următoarele expresii: $-a^2$ și $(-a)^2$; $-a^5$ și $(-a)^5$ sînt egale între ele ?

41. Pentru ce valori ale lui x , expresia $(x+2)^2$ este 0 ?

42. Pentru ce valori ale lui x expresiile: $\frac{5}{x-1}$; $\frac{7}{x-3}$; $\frac{2}{x+5}$; $\frac{1}{x+1}$ sînt pozitive, negative, fără sens ?

43. Dacă $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{N}$ se poate afirma că rădăcina ecuației $x-a=b$ este întotdeauna un număr natural ?

44. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ și $b \in \mathbb{N}^*$, care din ecuațiile $x: a=b$; $ax=b$; $x+a=b$; $x-a=b$ nu au întotdeauna o soluție în mulțimea numerelor naturale ?

45. Care este valoarea cea mai mică pe care poate să o aibă expresia $1+x^2$?

46. Poate expresia $\frac{1}{1+x^2}$ să fie mai mare ca unitatea ?

47. Intr-un vas se găsește apă la temperatura de 0° . Vasul fiind pus pe foc temperatura apei se schimbă în funcție de durata încălzirii astfel:

Timpul în minute	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura apei în grade	y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

a) Să se afle raportul a două valori oarecare ale lui x și să se compare acest raport cu raportul valorilor, corespunzătoare ale lui y .

b) Să se formeze câteva propoziții cu valorile lui x și y date în tabelul de mărimi.

c) Să se scrie forma care exprimă pe y în funcție de x .

d) Să se calculeze temperatura apei din vas, când $x=15^\circ$ admițând că încălzirea se face uniform.

e) Pe baza datelor din tabel să se facă graficul variației temperaturii apei din vas.

48. Din două orașe care se găsesc la distanțe de m kilometri unul de altul, pornesc în același timp două trenuri, unul către altul. Viteza primului tren este de a km pe oră, iar viteza celui de-al doilea, de b km/ oră. Peste câte ore se vor întâlni trenurile ?

$$R. t = \frac{m}{a+b}.$$

49. Dintr-un depozit de lemne s-au scos a m³ de lemne, ceea ce reprezintă $p\%$ din toată rezerva de lemne. Să se afle care este rezerva de lemne?

$$R. \frac{100a}{p} \text{ m}^3.$$

50. Pentru încălzirea unei clădiri s-au rezervat a tone de cărbuni. Din această rezervă s-au întrebuințat b tone. Câte kg de cărbuni trebuie să se ardă în medie, pe zi, așa încât cărbunii rămași să ajungă t zile ?

$$R. \frac{(a-b)1000}{t} \text{ kg}.$$

51. Un teren de formă dreptunghiulară are lungimea de $3\frac{1}{2}$ ori mai mare decât lățimea și perimetrul de 360 dam. Terenul s-a amenajat pentru cultivat cartofi și varză. Ariile suprafețelor cultivate cu cartofi și varză sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{4}$. Să se afle câte hectare s-au cultivat cu cartofi și câte cu varză.

$$R. 33,6 \text{ ha}; 22,4 \text{ ha}.$$

52. Din două unghiuri adiacente suplementare unul este $\frac{4}{5}$ din celălalt. Să se afle unghiurile ?

53. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 48 cm. Baza lui este cu 12 cm mai mică decât una din laturile egale. Să se afle laturile triunghiului.

R. 20 cm; 8 cm.

54. Una din laturile egale ale unui triunghi isoscel este de $3\frac{1}{3}$ ori mai mare decât baza lui. Perimetrul triunghiului este de 48 m. Să se afle laturile triunghiului.

R. 21 m, 6 m.

55. Intr-o ladă sînt a kg de zahăr, în alta b kg. Dacă mutăm din prima ladă în lada a doua c kg obținem în amîndouă lăzile aceeași cantitate de zahăr. Să se scrie sub formă de egalitate, operațiile efectuate.

R. $a-c=b+c$.

56. Viteza unui vapor în apă stătătoare este de v km pe oră, iar viteza apei este de n km pe oră. În cîte ore va parcurge vaporul distanța de m km: a) mergînd în sensul curentului, b) împotriva curentului ?

R. a) $\frac{m}{v+n}$ ore, b) $\frac{m}{v-n}$ ore.

57. O bară în formă de paralelipiped are lungimea de a cm și lățimea de b cm iar înălțimea de c cm. Să se afle masa barei știind că densitatea barei este q .

R. $abcq$.

58. Un teren de n hectare este arat cu tractorul în a zile. Dacă aceeași suprafață ar fi arată cu plugul tras de vite, aratul s-ar efectua în b zile. Să se afle cu cît se ară mai repede într-o zi cu tractorul decât cu plugul tras de vite.

R. $\frac{n}{a} - \frac{n}{b}$.

59. Un bazin este umplut de un robinet în a ore și de altul în b ore. A cîta parte a bazinului o va umple fiecare robinet într-o oră ?

R. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$.

III.4. OPERAȚII CU NUMERE REALE

1. $(-219) + (-7) + (319) + (-13)$.

2. $(10\ 009) + (-3\ 111) + (991) - (889)$.

3. $(-1\ 009) + (981) + (-991) + (19)$.

4. $(3\ 908) + (-2\ 345) + (-1\ 902) + (-635)$.

5. $\left(-2\frac{3}{5}\right) + (1,625) + \left(-8\frac{2}{5}\right) + \left(9\frac{3}{8}\right)$.

6. $\left(5\frac{3}{4}\right) + (-4,125) + (-5,75) + \left(-5\frac{7}{8}\right)$.

7. $[-2,(3)]+(5,375)+\left(-7\frac{2}{3}\right)+\left(4\frac{5}{8}\right).$

8. $[(1,1(6))]+\left(-8\frac{2}{5}\right)+\left(-5\frac{1}{6}\right)+(4,2).$

9. $(3,6)+(-8,25)+\left(-4\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{3}{4}\right).$

10. $(-261)-(-314)-(+139)-(-186).$

11. $(235)-(+881)-(-675)-(119).$

12. $\left(-3\frac{3}{4}\right)-(3,75)-\left(12\frac{3}{8}\right)+(-8,625).$

13. $5,1(6)-[-8,2(2)]-\left(7\frac{3}{5}\right)+\left(-2\frac{3}{4}\right).$

14. $\left(-1\frac{2}{5}\right)-\left(-3\frac{3}{4}\right)-\left(4\frac{3}{4}\right)-(-3,75).$

15. $\left(-9\frac{5}{8}\right)-\left(-2\frac{2}{3}\right)-(-9,625)-\left(-7\frac{1}{3}\right).$

16. $\left(-1\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{4}\right)+\left(-3\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1\frac{1}{6}\right)-[(-3,3(3))].$

17. $(8,75)\cdot\left(-3\frac{2}{5}\right)-\left(-3\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{15}\right)+6,2(1).$

18. $[\sqrt{8}-(-8\sqrt{2})]\cdot 3\sqrt{2}+(\sqrt{27}-2\sqrt{3})\cdot 4\sqrt{3}.$

R. 72.

19. $[\sqrt{125}-(-3\sqrt{5})]\cdot(-4\sqrt{5})+160.$

R. 0.

20. $\{[\sqrt{54}+7\sqrt{6}]\cdot(10\sqrt{6})-(-400)\}\cdot 10^{17}.$

R. 10^{20}

21. $\left[\sqrt{216}-5,125+4\sqrt{6}-\left(-5\frac{1}{8}\right)\right]\cdot\sqrt{24}.$

R. 120.

22. $\left[-5,1(9)+\sqrt{125}-\left(-\frac{26}{5}\right)-4\sqrt{5}\right]\cdot 2\sqrt{5}-10.$

R. 0.

23. $\left[5\frac{3}{\sqrt{8}}-8,9(9)-(12)-5\frac{5}{2\sqrt{2}}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{20}}\right]^2.$

R. 1.

$$24. \left[3 \frac{3}{\sqrt{75}} - 8 \frac{2}{\sqrt{98}} - \left(-7 \frac{2}{5\sqrt{3}} \right) + 8 \frac{2}{7\sqrt{2}} \right] \cdot \frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}+1}.$$

R. 5.

$$25. \frac{\left(3 \frac{2}{3\sqrt{7}} - 20 \frac{4}{3\sqrt{7}} + 17 \frac{2}{\sqrt{63}} \right) : \left(\frac{-2 \ 360 \ 789}{2 \ 345} \right) + \sqrt{363}}{11\sqrt{3}}.$$

R. 1.

$$26. \left[\frac{8}{3\sqrt{6}} - \left(-\frac{4}{3\sqrt{11}} \right) - \frac{8}{\sqrt{54}} + \frac{6}{\sqrt{99}} \right] : \left(-\frac{5}{3\sqrt{11}} \right).$$

R. 2.

$$27. \frac{\sqrt{25,9(9)} : (-\sqrt{8}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{1}{2}}{(\sqrt{68} - \sqrt{17}) : (\sqrt{4914})}.$$

R. 17.

$$28. \frac{\left[\sqrt{1,0816} - \left(-\frac{24}{25} \right) \right] : \sqrt{48} + \frac{7}{8\sqrt{3}}}{-\sqrt{108} - 5\sqrt{3}}.$$

R. $-\frac{1}{24}$.

$$29. \frac{\left[\sqrt{9,030025} - \left(-7 \frac{99}{200} \right) \right] : \left(-10 \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{245} : (-7\sqrt{5})}.$$

R. 1.

$$30. \frac{\left[\frac{\sqrt{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^7}}{125\sqrt{5}} - (-4\sqrt{6}) \right] : 10\sqrt{6} + \sqrt{\frac{2}{5}}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) : \sqrt{5}}.$$

R. 1.

$$31. \left[\frac{\sqrt{(3^3 \cdot 5^3 \cdot 4^4 \cdot 9^{10}) : (27 \cdot 125 \cdot 4^5 \cdot 9^9)}}{1,5} - 1 + \sqrt{2} \right] : \sqrt{2}.$$

R. 1.

$$32. \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{4} \right) - \left(\frac{1}{-5} \right) \left(\frac{-3}{2} \right) + \left(\frac{-2}{-5} \right) \left(\frac{4}{-3} \right) - (-2+5).$$

R. $-\frac{83}{24}$.

$$33. \frac{-3+(-5)^2}{2-9} + \frac{(+6)-(+4)}{(+3)(+2)-(-2)^2} + \frac{(+3)^2-(-2)^3}{21-(+2)^2}.$$

R. $-1\frac{1}{7}$.

$$34. \left(-3-5-\frac{1}{2} \right)^2 + (-1-2)^2 \left(-1+5+\frac{1}{2} \right) + (-1+2)^3.$$

R. $113\frac{3}{4}$.

$$35. (-1+2-3)^2 + (-2+1-3)^2 (-3+2-1) + (1-2)^2.$$

R. -27.

36. $\frac{(-1)(-2)}{3} + \frac{(-2)^3}{-1} + \frac{(-1)^3}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{3}$ R. 8.
37. $\frac{(-3)(-1)^2(-2)^3 - (-5)^3(-2)^3 + (+4)^2}{[(+7) - (-2) - (+1)](-5)^2}$ R. $-4\frac{4}{3}$.
38. $(-1)^2(1+2-3) - (2+3)(3-1-5) + (-2+1)^2(9-2+1)$ R. 23.
39. $[15^2 - (-8)^2]^2 - [15^2 + (-8)^2]^2 + 4 \cdot 15^2(-8)^2$ R. 0.
40. $[(4-3)(2+1) - (4-2)(3-1)](4-1)$ R. -3.
41. $\frac{-3^3 - (-5)^3}{3^2 + 5^2 - 5 \cdot 3} + \frac{15-10}{6 - (-1)^3} + \frac{(-5)^2 - (-1)^2}{-6-2+(-1)} - 5\frac{3}{19} - \frac{5}{7}$ R. $-\frac{8}{3}$.
42. $\frac{-2\frac{29}{30}}{\left[6 - 2\frac{1}{3} - \frac{\frac{7}{2}}{\frac{4}{3}}\right] : (-0,125)} - \frac{339}{250}$ R. -1.
43. $\frac{(-5)^3 - 3^3}{(-5)^2 - 5 \cdot 3 + 3^2} + \frac{-10+15}{6 - (-1)} + \frac{(-5)^2 - (-1)^2}{-5-6+(-1)}$ R. $-9\frac{2}{7}$.
44. $\left(\frac{81-9}{71+1}\right) \left(\frac{-9}{9-1} - \frac{1}{-9+1}\right)$ R. -1.
45. $\frac{12+4\sqrt{5}}{48+16\sqrt{5}} + \left(\frac{-3}{4}\right) \left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{5}{6}$ R. $1\frac{1}{4}$.
46. $\frac{(-2)}{-3} + \frac{(-2)(+3)}{-1} + \frac{(-3)}{-2} + 1 + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-3}$ R. $8\frac{1}{3}$.
47. $\left[\left(-1\frac{5}{6}\right) + (2,5) + 5\right] - 8 + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left[\left(-3\frac{1}{2}\right) + 9\right]$ R. $2\frac{5}{12}$.
48. $\frac{(3) + (-7) + (-5) + (10) + (-4) + (+4)}{(-5) + (-7) - (+4) + (+10) + (-2)}$ R. $-\frac{1}{8}$.
49. $\frac{7 + (-2) - (-3) - 4 + (+5) - (-1)}{(-3)(-2)(-1)}$ R. $-1\frac{2}{3}$.
50. $\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) : \left[\left(\frac{5}{6}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{-3}{5}\right) (-3)\right]$ R. $-\frac{3}{8}$.

$$51. \frac{(-5):(+5)+(+3):\left(+\frac{3}{5}\right)}{\frac{3}{5}:\left(\frac{-2}{5}\right)}. \quad \text{R. } -2\frac{2}{3}.$$

$$52. \frac{16+8\sqrt{5}-4-4\sqrt{5}}{56+24\sqrt{5}-24-8\sqrt{5}+16}. \quad \text{R. } \frac{1}{4}.$$

$$53. \frac{-\sqrt{27}+2\sqrt{75}-9\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}. \quad \text{R. } 1.$$

$$54. \frac{\left[(-5)-(-0,25)+\left(-2\frac{1}{4}\right)\right]\sqrt{7}}{(-6\sqrt{7})+(\sqrt{343})}. \quad \text{R. } -7.$$

$$55. \frac{\left[\left(\frac{-2}{5}\right)+(+1,5)-\left(-\frac{9}{10}\right)+(-1)\right]^2}{\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}}. \quad \text{R. } 1.$$

$$56. \frac{\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{-3}\right)^2-\left(-\frac{4}{9}\right)+(-2)^2\right]^3}{\left(-\frac{5}{6}\right)^3-(-1)^3-1}. \quad \text{R. } -216.$$

III.5. ECUAȚII

Să se determine x din următoarele ecuații:

$$57. \frac{\sqrt{\frac{867}{75}}-\left(-\frac{3}{5}\right)}{x}=\frac{\sqrt{841}\cdot 12}{\sqrt{2523}\cdot\sqrt{3}}. \quad \text{R. } x=1.$$

$$58. \frac{3\sqrt{722}\cdot\sqrt{2}}{38\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{598}}{x}. \quad \text{R. } x=11\frac{1}{3}.$$

$$59. \frac{\frac{\sqrt{845}}{13}-\left(-\frac{7\sqrt{5}}{7}\right)}{7\sqrt{5}}=\frac{x}{10}. \quad \text{R. } x=20.$$

$$60. x \left[\frac{\sqrt{5^3} \cdot 8^2 \cdot 3^2}{\sqrt{375 \cdot 192}} - (-6) \right] = \frac{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}}{\sqrt{968} : 88\sqrt{2}}.$$

R. $\frac{8}{75}$.

$$61. \frac{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}{1,1(6)} = 1\frac{5}{7}.$$

R. $x = -\frac{1}{2}$.

$$62. \frac{1 + \frac{1}{-2 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{5}}}}}{5 : 19x} - \frac{1 - \frac{1}{x - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}}{(30x - 43) : (30x - 13)} = 1.$$

R. $x = 2$.

III.6. SISTEME DE ECUAȚII

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații:

$$63. \begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5} \\ \frac{x+4}{y+4} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

R. (4; 16).

$$64. \begin{cases} 0,25x + 0,04y = 2 \\ 4x + 25y = 641 \end{cases}$$

R. (4; 25).

$$65. \begin{cases} x + \frac{5y-1}{3} = -\frac{2}{3} \\ 3y - \frac{2x+3}{2} = -\frac{21}{2} \end{cases}$$

R. (3; -2).

$$66. \begin{cases} \frac{5}{x-1} : \frac{4}{y-1} = 25:24 \\ \frac{2}{x+1} : \frac{3}{y+1} = 7:12 \end{cases} \quad \mathbf{R. (7; 6).}$$

$$67. \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15 \\ y - \frac{y-x}{5} = 6 \end{cases} \quad \mathbf{R. (10; 5).}$$

$$68. \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8 \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11 \end{cases} \quad \mathbf{R. (18; 6).}$$

$$69. \begin{cases} \frac{3x-5y}{2} + 3 = \frac{2x+y}{5} \\ 8 - \frac{x-2y}{5} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \end{cases} \quad \mathbf{R. (12; 6).}$$

$$70. \begin{cases} \frac{5}{x+4} = \frac{2}{y-1} \\ \frac{3}{x+2} = \frac{4}{y+1} \end{cases} \quad \mathbf{R. (1; 3).}$$

$$71. \begin{cases} x-y = \frac{1}{12} \\ 18x-5y = 4\frac{3}{4} \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right).}$$

$$72. \begin{cases} \frac{ay}{bx} = \frac{d}{c} \\ bx+ay=d+c \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{c}{b}; \frac{d}{a}\right).}$$

$$73. \begin{cases} \frac{1}{2}y - 3x = 2 \\ y = 14x \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{1}{2}; 7\right).}$$

74.
$$\begin{cases} \frac{9x-y}{8}=1 \\ 7(x-1)=\frac{1}{9}(1-y) \end{cases} \quad \mathbf{R. (1; 1)}$$
75.
$$\begin{cases} x(y-1)-y(3+x)=4 \\ \frac{x+2y-3}{y-x+2}=\frac{2}{3} \end{cases} \quad \mathbf{R. (5; -3)}.$$
76.
$$\begin{cases} 5+4(0,1x+1)=1,1y \\ 5+4\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{11+0,3y-x}{x} \end{cases} \quad \mathbf{R. determinat; (5; 10)}.$$
77.
$$\begin{cases} \frac{x-y+1}{y-x+1}=\frac{-3}{5} \\ \frac{2x+3y-5}{6+2y-x}=-\frac{1}{4} \end{cases} \quad \mathbf{R. determinat; (-2; 2)}.$$
78.
$$\begin{cases} 2x-\frac{11y}{3}+\frac{5}{3}=0 \\ 48x-88y=-15 \end{cases} \quad \mathbf{R. incompatibil}.$$
79.
$$\begin{cases} 8-\frac{z-2y}{5}=\frac{z}{2}+\frac{y}{3} \\ 2y-21z+240=0 \end{cases} \quad \mathbf{R. nedeterminat}.$$

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații, în care a, b și c reprezintă numere date.

80.
$$\begin{cases} (a+c)x-by=bc \\ x+y=a+b \end{cases} \quad \mathbf{R. (b; a)}.$$
81.
$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=c \\ \frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0 \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{ab^2c}{a^2+b^2}, \frac{a^2bc}{a^2+b^2} \right)}.$$
82.
$$\begin{cases} \frac{x+y-a}{x+y+a}=\frac{2}{3} \\ 2x-3y=-5a \end{cases} \quad \mathbf{R. (2a; 3a)}.$$
83.
$$\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1 \\ a(x-y)+b(x+y)=1 \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{1}{a+b}; 0 \right)}.$$

III.7. PROBLEME CARE CONDUC LA ECUAȚII DE GRADUL INTII ȘI LA SISTEME DE ECUAȚII DE GRADUL INTII CU DOUĂ ȘI TREI NECUNOSCUTE

1. La o întreprindere muncitorii lucrând câte 15 piese pe zi, depășeau norma zilnică cu 0,25 din ea. Dacă numărul muncitorilor s-ar micșora cu $\frac{1}{5}$ din numărul lor și fiecare muncitor ar depăși norma zilnică cu 10 piese, atelierul ar realiza 2 800 de piese mai mult decât prevedea planul inițial. Câți muncitori erau inițial în atelier și care era planul pe zi?

R. 500 de muncitori; 6 000 de piese pe zi.

2. Două brigăzi ale unei secții de strungărie trebuiau să lucreze zilnic, conform planului, un număr de piese care se găsesc în raportul de $\frac{3}{4}$. Prima brigadă a depășit planul cu 15%, iar a doua cu $\frac{3}{20}$ din norma pe zi. Știind că în felul acesta au lucrat împreună 805 piese zilnic să se afle câte piese trebuia să lucreze fiecare după plan și care a fost realizarea în procente față de plan ?

R. 300 și 400 de piese; 115% realizare.

3. La un magazin de legume și fructe s-au adus cireșe socotite la 10 lei/kg și căpșuni socotite la 15 lei/kg, în valoare totală de 13 000 de lei. Cireșele au avut un scăzământ de 5%, iar căpșunile 10%. Pentru a se recupera scăzământul, s-a mărit prețul pe kg cu procentele scăzământelor respective. Din vânzare s-a încasat pe căpșuni cu 5 000 lei mai mult decât de pe cireșe. 1) Câte kg de cireșe și căpșuni s-au adus la magazin ? 2) Ce procent reprezintă scăzământul cireșelor față de cel al căpșunilor ?

R. 600 kg căpșuni; 400 kg cireșe; 33%.

4. Pentru construcția a două clădiri trebuiau transportate cantități egale de ciment, cu două camioane. Un camion transporta ciment pentru clădirea mai apropiată și la fiecare drum ducea 1,5 t; celalalt transporta ciment pentru clădirea mai depărtată și la fiecare drum ducea cu $\frac{2}{3}$ t mai mult decât primul. Până la amiază camionul al doilea a făcut 3 drumuri mai puțin decât primul și au rămas netransportate $3\frac{1}{2}$ t de ciment pentru clădirea apropiată și 4 t pentru clădirea mai depărtată. a) Câte tone de ciment trebuiau transportate pentru fiecare clădire? b) Câte drumuri a făcut fiecare camion ?

R. a) 17 t; b) 9 drumuri; 6 drumuri.

5. O asociație de țărani și-a propus să termine prășitul unei parcele de floarea-soarelui într-un anumit număr de zile. Dacă s-ar fi prășit câte 12 ha pe zi, ar fi rămas 8 ha neprășite față de cele propuse. Prășind însă cu câte 4 ha mai mult pe zi, s-a terminat prășitul parcelei cu o zi mai devreme față de plan. În câte zile trebuia terminat prășitul după plan ?

R. 6 zile.

6. Un grup de elevi din București au organizat prin O.N.T. o excursie la Tușnad, dînd fiecare cîte 200 de lei. Înaintea plecării s-au mai înscris 3 elevi plătind și ei cîte 200 lei și după ce au convenit să mai dea fiecare cîte 50 lei, realizîndu-se un plus de 2 250 lei, excursia s-a prelungit pînă la Borsec. Cîți excursioniști au fost inițial și care a fost costul total al excursiei la Tușnad ?

R. 42 de elevi; 8 400 de lei.

7. 380 ha grîu și 230 ha secară trebuiau recoltate în timp de două săptămîni. În prima săptămînă s-au recoltat de două ori mai multe ha de grîu decît de secară, iar în săptămîna a doua de două ori și jumătate mai multe ha de secară decît de grîu. Cîte ha de grîu au fost recoltate în prima săptămînă ?

R. 360 ha.

8. Două secții ale unei uzine au produs împreună într-un an 8 900 piese. În anul următor, producția primei secții a crescut cu 12% iar a celei de-a doua cu 10%, așa încît cea de-a doua secție a produs cu 2 686 mai multe piese decît prima secție. Cîte piese a produs fiecare secție în primul an ?

R. 3 200 piese; 5 700 de piese.

9. În două silozuri s-au înmagazinat 186 t cereale. Din primul siloz s-a scos 60% din cantitatea înmagazinată, iar din al doilea $\frac{5}{6}$ și a mai rămas în primul siloz de 12 ori mai mult decît în al doilea. Cîte tone au fost în fiecare siloz ?

R. 155 t; 31 t.

10. Doi muncitori lucrînd împreună, pot să facă o anumită lucrare în 12 zile; dacă primul muncitor ar lucra 2 zile, iar muncitorul al doilea 3 zile, atunci ei ar face numai 20% din lucrarea întreagă. În cîte zile poate să facă lucrarea fiecare muncitor lucrînd singur ?

Indicație. Notăm cu x partea din lucrare realizată, de primul muncitor într-o zi, singur, și cu y partea executată de-al doilea muncitor într-o zi dacă ar lucra singur; se găsește $x = \frac{1}{20}$; $y = \frac{1}{20}$.

R. 20 zile; 30 zile.

11. Pentru executarea unei comenzi, o fabrică a întrebuițat două tipuri de strunguri: 12 strunguri de tipul A și alte 12 de tipul B și a terminat comanda în 8 zile. Se știe că 3 strunguri de tipul A pot strunji într-o oră aceeași cantitate de piese cît strunjesc două strunguri de tipul B . În cît timp se va efectua o altă comandă la fel de mare, dacă la ea lucrează 9 strunguri de tipul A și 4 strunguri de tipul B ?

R. 16 zile.

12. Un grup de elevi a organizat o excursie la hidrocentrala de la Bicăz. Dacă fiecare participant ar contribui la cheltuielile pentru transport cu cîte 25 de lei, suma adunată de la toți elevii ar fi mai mică cu 200 de lei decît cea necesară; dacă fiecare elev ar contribui cu cîte 32 de lei, suma adunată ar acoperi cheltuielile și ar mai rămîne 24 de lei. Cîți elevi erau în grup ?

R. 32 de elevi.

13. Cîțiva turiști au luat masa la o cabană. Dacă ar fi fost cu 5 mai mulți și dacă costul total al mesei ar fi fost cu 600 de lei mai mare, fiecare ar fi plătit cu 20 lei mai mult, iar dacă ar fi fost 15 turiști în plus și masa ar fi costat cu 400 de lei mai mult, fiecare ar fi plătit 20 lei mai puțin. Cîți turiști au luat masa la cabană și cît a plătit fiecare pentru masă ?

R. 10 turiști; 60 lei.

14. Pentru două școli care s-au construit la Calafat, au fost necesare cantități egale de ciment. De la depozit, cimentul a fost cărat de 2 camioane. Pentru școala cea mai apropiată, un camion a transportat $2\frac{1}{2}$ t la fiecare drum; pentru școala mai îndepărtată, celălalt camion a transportat 3,5 t la fiecare drum. Până la amiază camionul al doilea a făcut cu 3 drumuri mai puțin decât primul și au rămas netransportate $65\frac{1}{2}$ t pentru școala apropiată și 69 t pentru cea îndepărtată. Câte tone de ciment au fost necesare pentru fiecare școală ?

R. 83 tone.

15. O fermă zootehnică a pregătit fin pentru hrana unei cirezi de vaci. Dacă vinde 20 de vaci, atunci va hrăni restul de vaci cu 10 zile mai mult decât timpul prevăzut la început. Dacă va mai cumpăra 80 de vaci, rezerva de fin se va consuma cu 20 de zile mai devreme decât termenul fixat. Pentru câte vaci și pentru câte zile s-a făcut rezerva de fin ?

R. 120 de vaci; 50 de zile.

16. Mai mulți elevi au vrut să cumpere un joc de șah. Dacă fiecare ar fi dat cîte 5 lei, nu le-ar fi ajuns pentru a cumpăra șahul o sumă de două ori mai mică decât costul șahului. Doi dintre elevi au renunțat să mai ia parte la cumpărarea șahului, și atunci, dînd fiecare cîte 20 de lei, le-a mai rămas o sumă egală cu 20% din costul șahului, care reprezintă costul a 5 piese de rezervă pentru șah. a) Cît a costat jocul de șah ? b) Cîți elevi au fost inițial ? c) Cît costă o piesă de rezervă ?

R. a) 50 lei; b) 5 elevi; c) 2 lei.

17. Terenul unei cooperative agricole de producție a fost repartizat la trei asociații astfel: 0,75 din terenul primei asociații reprezintă 0,3 din terenul repartizat asociației a doua și $\frac{1}{8}$ din terenul asociației a treia. Aria terenului fiind de 2 413 ari, să se afle suprafața repartizată fiecărei asociații.

R. 2,54 ha; 6,35 ha; 15,24 ha.

18. Trei brigăzi de muncitori ar fi executat aceeași lucrare astfel: prima ar fi terminat-o în 9 zile, a doua în 10 zile și a treia în 12 zile. S-a alcătuit o brigadă din $\frac{1}{4}$ din efectivul brigăzii întîi, $\frac{1}{3}$ din efectivul brigăzii a doua și $\frac{1}{2}$ din efectivul celei de-a treia. În cîte zile s-a executat aceeași lucrare cu brigada astfel alcătuită ?

R. 10 zile.

19. Trei grupe de muncitori au primit pentru o lucrare suma de 34 200 lei. Prima grupă de 8 oameni a lucrat 5 zile, a doua compusă din 7 membri a lucrat 8 zile, iar a treia compusă din 12 oameni a lucrat 4 zile. Calificarea fiind aceeași, pentru membrii tuturor grupelor, să se afle ce sumă revine de plată fiecărei brigăzi?

R. 9 500 lei; 13 300 lei; 11 400 lei.

20. O roată dințată A are 60 de dinți și face 80 rotații pe minut. O altă roată B, angrenată cu prima, are 48 de dinți. Cîte rotații face roata B pe minut ? Dacă, la un moment dat, un dinte a al roții A este angrenat cu un dinte b al roții B, peste cît timp dinții a și b se angrenează iarăși ?

R. 100 rotații; 3 s.

21. Intr-o excursie, timpul coborîrii de pe munte a fost cu 1,2 ori mai mic decît timpul necesar urcuşului. Care este distanţa parcursă pînă la vîrfurile muntelui, ştiind că la urcare pe munte s-a parcurs, în medie, 106,2 m în $\frac{1}{5}$ oră, iar timpul necesar coborîrii a fost $\frac{3}{5}$ din cel necesar urcuşului ?

R. 1 593 m.

22. Dacă un tren ar merge cu viteza de 54 km/h, ar străbate distanţa dintre două localităţi într-un timp mai mic cu jumătate de oră decît cel programat, iar dacă ar merge cu viteza de 36 km/h, i-ar trebui 1 oră şi $\frac{1}{2}$ mai mult decît timpul programat pentru străbaterea acelei distanţe. Care este viteza programată a acelui tren ? (Se presupune mişcarea uniformă)

R. 48 km/h.

23. Luni, la ora 5 dimineaţa a plecat un vapor de pasageri dintr-un port spre un alt port; în acelaşi timp, a plecat de la al doilea port către primul, un şlep care are viteza $\frac{1}{2}$ din viteza vaporului. Cele două nave s-au întîlnit la ora 11 noaptea. Cînd va ajunge fiecare dintre ele la destinaţie ?

R. Marţi la ora 8; miercuri la ora 11.

24. Vitezele a trei trenuri: unul de marfă, altul personal şi al treilea rapid sînt proporţionale cu numerele 1; $1\frac{1}{2}$; 3. Ştiind că pentru o aceeaşi distanţă trenul de marfă foloseşte o oră şi 20 minute mai mult decît personalul, să se afle în cît timp a parcurs acea distanţă fiecare din cele trei trenuri.

R. 240 min; 160 min; 80 min.

25. Intr-o lună, două echipe de muncitori aveau de efectuat, după plan, 2 750 de piese. Prima echipă a depăşit planul cu 20%, iar a doua echipă cu 15%. Ştiind că în acest caz prima echipă a efectuat în acea lună cu 480 de piese mai mult decît a doua echipă, să se calculeze: a) numărul de piese planificate iniţial pentru fiecare echipă; b) numărul de piese efectuate peste plan de către fiecare echipă.

R. a) I. 1 550; II. 1 200 de piese;

b) 310; 180 de piese efectuate peste plan.

26. Din două calităţi de produse cu preţul de 5 lei şi 3 lei/kg, s-a făcut un amestec de 18 kg. Dacă acest amestec s-ar vinde cu 3,90 lei/kg, s-ar pierde 3,80 lei. Cîte kg de produse din fiecare cantitate s-au luat pentru amestec ?

R. 10 kg de calitatea I; 8 kg de calitatea a II-a.

27. Trei brigăzi ale unei cooperative agricole de producţie au cultivat zarzavaturi astfel: 20% din lotul primei brigăzi împreună cu 25% din lotul celei de-a treia brigăzi fac cît $\frac{1}{3}$ din lotul brigăzii a doua. Loturile au fost repartizate proporţional cu numărul de tractoare al fiecărei brigăzi. Ştiind că prima brigadă a avut 10 tractoare, a doua 15 tractoare şi a treia 12 tractoare. Să se afle cîte hectare a cultivat fiecare brigadă.

R. 100 ha; 150 ha; 120 ha.

28. Pentru rezultatele deosebite în muncă, trei muncitori au primit drept primă suma de 3 000 lei. 75% din suma primită de primul muncitor este cu 100 de lei mai mare decît suma primită de al doilea muncitor, iar raportul dintre suma primului muncitor şi al celui de-al treilea este de $\frac{6}{5}$. Să se afle sumele primite de fiecare muncitor.

R. 1 200; 800; 1 000 de lei.

29. Intr-un an, o cooperativă agricolă de producție a recoltat de pe două loturi semănate unul cu grâu și celălalt cu orz 1 370 q de cereale. În anul al doilea, folosind îngrășăminte chimice, recolta de pe lotul semănat cu grâu s-a mărit cu 15%, iar cea de pe lotul semănat cu orz s-a mărit cu 10%, obținându-se astfel de pe ambele loturi 1 551 q de cereale. Cît s-a recoltat, pe fiecare lot, în anul următor ?

R. 1 012 q; 539 q.

30. Avem două bucăți de aliaj, dintre care prima bucată conține 270 g de aur și 30 g de aramă, iar bucata a doua conține 400 g de aur și 100 g de aramă. Cît trebuie luat din fiecare bucată de aliaj, pentru a obține 400 g de aliaj cu titlul de 0,825 ?

R. 100 g; 300 g.

31. Două aliaje de aur și aramă, dintre care unul cu proba de 950, iar celălalt cu proba de 800, se topesc împreună cu 2 g de aur curat și se obține un aliaj nou cu masa de 25 g și cu proba de 906. Să se afle masa celor două aliaje date. (Se numește proba unui aliaj, de 1 000 ori titlul lui.)

R. 15 g; 8 g.

32. Pentru 5 kilograme de cafea de două calități s-au plătit 1 800 de lei. Un kilogram de cafea de prima calitate costă 400 de lei, iar un kilogram de calitatea a doua costă 300 de lei. Cîte kg de cafea de fiecare calitate s-au cumpărat ?

R. 3 kg; 2 kg.

33. Un aliaj de aur și argint cu masa de 1,06 kg, fiind introdus în apă, "pierde" 70 g. Cît aur și cît argint este în acest aliaj, dacă aurul "pierde" în apă $\frac{1}{19}$ din masă, iar argintul "pierde" 0,1 din masă ?

R. 760 g; 300 g.

34. Se cîntărește o medalie în apă și se găsește că are masa de 22,5 g, iar în aer de 25 g. Medalia fiind un aliaj de cupru și argint, să se afle ce cantitate din fiecare metal cuprinde, știind că densitatea argintului este de $10\,450\text{ kg/m}^3$, iar a cuprului $8\,800\text{ kg/m}^3$.

R. Ag 19 g; Cu 6 g.

35. Se amestecă 15 kg acid sulfuric de 40% cu apă și se obține o soluție cu o concentrație de 15%. Să se calculeze masa amestecului obținut.

Indicație. Pentru rezolvarea aritmetică

$$\begin{array}{ccc} 40\% & \backslash & 15\% \\ 0\% & / & 25\% \end{array}$$

Raportul părților este $15/25=3/5$; noul amestec conține în total $3+5=8$ părți egale, dintre care trei corespund la 15 kg. O singură parte conține 5 kg, iar amestecul total va avea 40 kg

R. 40 de kg.

36. Pentru a prepara 40 kg acid cu tăria de 20% se amestecă acid de 80% cu acid de 15%. Ce cantități de acid se vor folosi din fiecare fel ?

R. 3,07 kg; 36,93 kg.

37. Din două calități de grâu de 4 lei/kg și 3 lei/kg trebuie făcut un amestec de 350 kg spre a fi vîndut cu 3,40 lei/kg (fără cîștig sau pierdere). Ce cantitate de grâu trebuie să se ia din fiecare calitate ?

Indicație pentru rezolvarea aritmetică. Dacă tot grâul ar fi de 3 lei/kg, atunci costul a 350 kg ar fi 1 050 lei; dar grâul amestecat este vîndut cu $3,40 \cdot 350=1\,190$ lei. Diferența de 140 de lei provine de

la 140 kg grâu de calitate 4 lei/kg și restul (210 kg) cuprinde grâul de calitate 3 lei/kg. Se poate utiliza și metoda obișnuită pentru problemele de amestec.

R. 140 kg; 210 kg.

38. Un aliaj de aur de 2 kg cu titlul de 0,910 s-a obținut dintr-o bucată de aliaj de aur cu titlul de 0,800 și alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel s-a folosit pentru noul aliaj ?

R. 0,533 kg; 1,467 kg.

39. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de două ori mai mică decât cifra unităților. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obținem un număr cu 27 de unități mai mare decât cel de la început. Să se afle numărul.

R. 36.

40. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de trei ori mai mare decât cifra unităților. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obținem un număr cu 36 de unități mai mic decât numărul de la început. Să se afle numărul.

R. 62.

41. Suma cifrelor unui număr de două cifre este 11. Dacă adăugăm la acest număr 63, obținem un număr format din aceleași cifre, dar așezate în ordine inversă. Să se afle numărul.

R. 29.

42. Să se găsească două numere știind că unul este mai mare decât celălalt cu 14 unități, iar dacă se împarte cel mai mare la 5 și cel mai mic la 8, diferența cîturilor obținute este 4.

R. 30; 16.

43. O echipă de muncitori trebuia să producă zilnic un număr de 19 800 de piese. Introducerea de utilaj modern a făcut ca productivitatea să crească astfel că, dacă ar fi fost cu 18 muncitori mai puțin în echipă, s-ar fi produs tot atît cît înainte de introducerea utilajului. Aplicîndu-se apoi o inovație, productivitatea fiecărui muncitor a crescut din nou cu același număr de unități, astfel că dacă ar fi fost cu 33 de muncitori mai puțin în echipă, față de numărul inițial, s-ar fi produs tot atît cît se producea la început.

a) Cîți muncitori au fost la început și care era norma unui muncitor ?

b) Cu cît s-a mărit norma de fiecare dată ?

R. a) 198 muncitori; 100 piese; b) cu 10 piese.

44. Dacă pentru îndeplinirea unui contract o uzină ar face zilnic cîte 20 de tractoare, ar lipsi la termenul stabilit 100 de tractoare, iar dacă uzina ar face zilnic cîte 23 de tractoare ar preda la termenul stabilit cu 20 de tractoare mai mult decât prevedea contractul. Cîte tractoare au fost comandate și ce termen a fost stabilit pentru îndeplinirea contractului ? Ce relație se poate stabili între 900 de tractoare și 900 de tractoriști dacă pe fiecare tractor lucrează cîte un tractorist ?

Indicație. Dacă, în loc de 20 de tractoare, uzina ar face 23 de tractoare pe zi, există un plus de $100 + 20 = 120$ de tractoare, care provin de la surplusul zilnic de 3 tractoare (40) zile; $40 \cdot 20 + 100 = 900$ tractoare.

R. 900 de tractoare; 40 de zile.

45. Să se găsească un număr de trei cifre, divizibil cu 9, astfel încât cifra sutelor să fie de trei ori mai mică decât a unităților, iar dacă adăugăm 594 să obținem răsturnatul lui.

Indicație. Numărul se scrie algebric $100x+10y+z$ răsturnatul lui $100z+10y+x$

R. 369.

46. Să se determine un număr cuprins între 400 și 500, știind că suma cifrelor sale este 9 și că răsturnatul numărului este $36/47$ din el.

Indicație. Numărul căutat fiind cuprins între 400 și 500, cifra sutelor este 4; suma celorlalte două cifre este deci 5.

R. 423.

47. Prima cifră a unui număr de șase cifre este 9. Dacă se ia această cifră de la început și se așează la sfârșitul numărului, se obține sfertul primului număr. Care este acel număr ?

Indicație. Tăiem pe 9. Această operație este echivalentă cu a scădea 900 000 din numărul dat, și obținem: (1) $x-900\ 000$. Acest număr are cinci cifre. Vom adăuga apoi cifra 0 la sfârșitul său. El recapătă 6 cifre. Operațiunea este echivalentă cu înmulțirea numărului (1) cu 10: $10(x-900\ 000)$. În fine, în ultima etapă, adăugăm acestui număr cifra 9 la sfârșit: $10(x-900\ 000)+9$. Acum scriem că numărul astfel obținut este $\frac{1}{4}$ din numărul inițial adică $10(x-900\ 000)+9=\frac{x}{4}$.

R. 923 076.

48. Un număr de 6 cifre are ultima cifră 7. Dacă se taie de la urmă cifra 7 și se mută în fața numărului, vom obține un număr de 5 ori mai mare decât numărul dat. Să se afle primul număr.

Indicație. Scădem din acest număr pe 7, adică ultima sa cifră. Atunci, toate cifrele lui rămân la fel ca și înainte, dar ultima devine zero. Dacă acum tăiem pe acest zero de la sfârșit, numărul s-a împărțit cu 10, adică a devenit de 5 cifre și se va scrie $\frac{x-7}{10}$ (1). Luăm cifra 7 și o punem acum în fața numărului. Atunci, numărul are din nou șase cifre, iar cifra sutelor de mii este 7. Aceasta echivalează cu a adăuga 700 000 la numărul (1); numărul astfel obținut se va scrie: $700\ 000+\frac{x-7}{10}$. El trebuie să fie egal cu de 5 ori numărul căutat, de unde ecuația problemei: $700\ 000+\frac{x-7}{10}=5x$, cu soluția $x=142\ 857$.

R. 142 857.

49. Un atelier de croitorie a primit tercot de două calități și anume: din calitatea întâi 240 m și din a doua 360 m, în valoare totală de 103 200 lei. Pentru confecționarea unor trenciuri, atelierul a întrebuințat 30% din prima calitate și 45% din a doua calitate. Știind că tercotul de calitatea a doua întrebuințat pentru trenciuri a costat cu 1 440 de lei mai mult decât tercotul de calitatea întâi întrebuințat să se afle costul unui metru de tercot din fiecare calitate.

R. 250 de lei; 120 lei.

50. Pentru a hrăni 10 cai și 14 vaci se dădeau câte 180 kg de fân pe zi. Mărindu-se rația de fân pentru cai cu 25% iar pentru vaci cu $33\frac{1}{3}\%$, s-au dat câte 232 kg de fân pe zi. Câte kg de fân se dădeau pe zi la început pentru un cal și câte pentru o vacă ?

R. 9,6 kg; 6 kg.

51. Un muncitor a economisit 1 600 lei pentru cumpărarea unui sacou și a unui pulovăr. În urma reducerilor de prețuri, sacourile s-au ieftinit cu 38%, iar puloverele cu 24%. Cumpărând la prețurile reduse un sacou și două pulovere, i-au mai rămas 68 de lei din suma pe care a avut-o. Să se afle prețul unui sacou și al unui pulovăr, înainte și după reducerea de prețuri.

R. 1 000 lei și 600; 620 lei și 456 lei.

52. Două secții ale unei fabrici de încălțăminte trebuiau să confecționeze 4 000 de perechi de pantofi într-o lună. Prima secție, lucrând lunar cu 12% mai multe perechi iar a doua cu 8%, după 3 luni, a doua secție a făcut cu 1 080 de perechi de pantofi mai mult decât prima. Câte perechi de pantofi trebuia să confecționeze, într-o lună, fiecare secție ?

R. 1 800 perechi; 2 200 perechi.

53. În primul an de existență o cooperativă agricolă de producție a recoltat, de pe un loc de 20 ha semănate cu grâu și 30 ha semănate cu porumb, 1 180 q de cereale. În al doilea an, folosind noi metode agrotehnice înaintate, producția de grâu la ha s-a mărit cu 20%, iar cea de porumb cu 2 q la hectar. În aceste condiții, recolta de pe trei hectare semănate cu grâu întrece cu 1,2 q recolta culeasă de pe două hectare semănate cu porumb. Să se calculeze recolta de grâu și porumb la hectar în fiecare din cei doi ani.

R. I. 17 q grâu și 28 q porumb.

II. 20 q grâu și 30 q porumb.

54. Un obiect care are masa de 300 g este alcătuit din aur și argint. În apă, el are o masă cu 20 g mai mică. Să se afle cantitatea de aur și argint din acel obiect, știind că densitatea aurului este de $19\,200\text{ kg/m}^3$, a argintului de $10\,500\text{ kg/m}^3$ și a apei $1\,000\text{ kg/m}^3$.

Indicație. Fie x și y numerele ce ne arată masa în grame a aurului și a argintului considerat: $x+y=300$. Obiectul cufundat în apă este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de apă dezlucuit (principiul lui Arhimede). Pe de altă parte raportul dintre masa unui corp și densitatea sa este egală cu volumul său, deci putem scrie ecuația: $\frac{x}{19,2} + \frac{y}{10,5} = 20$, unde $\frac{x}{19,2}$ și $\frac{y}{10,5}$ sînt respectiv, volumele aurului și argintului.

R. $x=198,62\text{ g}$; $y=101,38\text{ g}$.

55. Pentru scopuri tehnice, s-au amestecat 5ℓ de spirt, de o calitate, cu 7ℓ de spirt de o altă calitate și s-a obținut spirt cu tăria de 65° . Dacă s-ar lua 20 de litri de spirt de prima calitate și 41 de calitate a doua amestecul ar avea tăria de 70° . Să se determine tăria spirtului de fiecare calitate.

Indicație. Fie x și y tăriile spirtului de prima, respectiv a doua calitate. Atunci 5ℓ de spirt de prima calitate conțin $\frac{5x}{100}\text{ ℓ}$ de alcool pur, 7ℓ din calitatea a doua conțin $\frac{7x}{100}\text{ ℓ}$ de alcool pur, iar amestecul lor conține $\frac{12 \cdot 65}{100}$ alcool curat. Apoi, 20ℓ de spirt de prima calitate conțin $\frac{20x}{100}$ alcool, iar 41ℓ de calitatea a doua conțin $\frac{41y}{100}$.

R. 72° ; 60° .

56. O fermă agricolă a vîndut 3 000 q de cereale și anume: orz, secară și grâu, primind: pentru orz 140 000 de lei, pentru secară 120 000 de lei și pentru grâu 84 000 de lei. Știind că 6 q de orz costă cît 5 q de secară și că 7 q de secară costă cît 6 q de grâu, să se afle cantitatea de chintale și costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

Rezolvare: Să notăm cu x, y, z numerele ce reprezintă cantitățile în chintale de orz, secară și grâu vîndute de fermă, obținem ecuația $x+y+z=3\,000$. Scriem acum că 6 q de orz costă cît 5 q de secară.

$\frac{6 \cdot 140\,000}{x} = \frac{5 \cdot 120\,000}{y}$. Apoi, scriem că 7 q de secară costă cît 6 q de grâu: $\frac{7 \cdot 120\,000}{y} = \frac{6 \cdot 84\,000}{z}$, $x=1\,400$, $y=1\,000$, $z=600$.

R. 100 lei; 120 lei; 140 lei.

III.8. PROBLEME DE MIȘCARE

1. Pentru a ajunge din sat la oraș în timpul stabilit, un drumeț trebuia să meargă cu viteza de 4 km/h. El merge jumătate din drum cu viteza stabilită, iar restul cu un autocamion care merge cu 20 km/h. El sosește în oraș cu două ore înaintea timpului stabilit. Să se afle distanța de la sat pînă la oraș.

R. 20 km.

2. Un drumeț a socotit că, făcînd cîte 3 km pe oră, va sosi din sat la oraș la o anumită oră. După ce a făcut jumătate din drum cu viteza stabilită, el s-a oprit pentru o oră și apoi a trebuit să-și mărească viteza, pentru partea de drum rămasă, cu 1 km pe oră. Să se afle distanța de la sat la oraș.

R. 24 km.

3. Roata din față a unei trăsuri are circumferința de 30 dm, iar roata din spate, de 40 dm. Pe distanța de la A la B , roata din față a făcut cu 30 de învîrtituri mai mult decît roata din spate. Să se afle distanța de la A pînă la B .

R. 360 m.

4. Pe aceeași distanță, roata din față a unei trăsuri face 240 de învîrtituri, iar cea din spate, a cărei circumferință este cu 0,6 m mai mare, face 180 de învîrtituri. Să se afle lungimea circumferinței fiecăreia din aceste roți.

R. 1,8 m; 2,4 m.

5. Roata din față a unei căruțe a făcut pe o anumită distanță cu 15 învîrtituri mai mult decît cea din spate. Circumferința roții din față este de 2,5 m iar a celei din spate, de 4 m. Cîte învîrtituri a făcut fiecare roată și ce distanță a parcurs căruța ?

R. 40; 25; 100 m.

6. Cu cîți km poate să se îndepărteze de la debarcader o barcă care merge împotriva curentului, pentru ca să se întoarcă înapoi în 4 ore, dacă viteza apei este de 2 km/h și viteza bărcii în apă stătătoare este de 8 km/h ?

R. 15 km.

7. Un curier a parcurs pe o bicicletă un drum cu viteza medie de 8 km/h. El s-a înapoiat pe alt drum, cu 3 km mai lung decît primul. La întoarcere curierul a mers cu o viteză medie de 9 km/h și a făcut cu $\frac{1}{8}$ ore mai mult decît la dus. Să se afle lungimea fiecărui drum.

R. 15 km; 18 km.

8. Un călător trebuie să străbată într-un timp stabilit distanța dintre orașele A și B . Dacă el ar face acest drum cu o motocicletă, parcurgînd cîte 35 km/ oră, ar întîrzia cu 2 ore, iar dacă ar face acest drum cu un automobil parcurgînd cîte 50 km/ oră, ar sosi cu o oră mai devreme. Să se afle distanța dintre orașele A și B și în cîte ore trebuia să ajungă călătorul în orașul B .

R. $AB=350$ km; 8 ore.

9. Doi turiști merg unul către celălalt din două orașe A și B , situate la o distanță de 30 km unul de celălalt. Dacă primul turist pornește cu 2 ore înaintea celui de-al doilea,

ei se întâlnesc după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecarea turistului al doilea, iar dacă turistul al doilea pornește cu 2 ore înaintea primului, ei se întâlnesc după trei ore de la plecarea primului turist. Câți kilometri pe oră face fiecare turist ?

R. 5 km/ oră ; 3 km/ oră.

10. Un călăreț și un pieton pornesc din același punct A spre punctul B . Călărețul, ajungând în B cu 50 minute înaintea pietonului, se reîntoarce imediat spre A și se întâlnește cu pietonul la o distanță de 2 km de B . Pentru tot drumul de la A la B și înapoi i-a trebuit călărețului 1 oră 40 minute. Să se afle distanța de la A la B , vitezele călărețului și a pietonului.

Indicație pentru metoda aritmetică. Se deduce ușor că distanța AB a fost parcursă de călăreț în 50 min. Dacă pietonul a sosit în B la 50 minute după călăreț, înseamnă că în același moment călărețul ajunsese din nou în A , deci viteza pietonului este de două ori mai mică decât a călărețului și, prin urmare, când călărețul sosise în B , pietonul era la jumătatea drumului. La întoarcere călărețul face 2 km până îl întâlnește pe pieton, care, în acest timp, mergând cu o viteză de două ori mai mică, a parcurs un km de la jumătatea drumului; aceasta înseamnă că jumătatea distanței dintre A și B este $1+2=3$ km. Acum se poate afla distanța AB și apoi vitezele.

R. 6 km; 7,2 km/ oră ; 3,6 km/ oră.

11. Un înotător înoată pe fluviul Neva împotriva curentului. Lângă Podul Republicii pierde o ploscă goală. După ce mai înoată 20 de minute împotriva curentului, observă pierderea, se întoarce și ajunge plosca lângă podul Schmidt. Să se afle cu ce viteză curge Neva, știind că distanța dintre poduri este de 2 km.

Culegere U.R.S.S.

Rezolvare: Să notăm cu x viteza cu care curge Neva exprimată în km pe oră. Pentru a lucra cu aceleași unități de măsură, vom transforma în prealabil cele 20 de minute în ore, adică $20 \text{ de minute} = \frac{20}{60}$ ore $= \frac{1}{3}$ ore. Să notăm cu A punctul unde înotătorul a observat că a pierdut plosca. De la Podul Republicii până la A el a parcurs distanța împotriva curentului deci viteza lui față de țărmlul apei a fost diferența dintre viteza v (viteza proprie a înotătorului) și viteza apei, adică $v-x$, fiindcă el a parcurs distanța VA în $\frac{1}{3}$ ore, avem $VA = \frac{1}{3}(v-x)$. întorcându-se de la A la V , el parcurge această distanță cu o viteză egală cu $v+x$ întrucât la viteza sa proprie se adaugă viteza apei. Ca să ajungă plosca, el mai parcurge încă o distanță VS dintre poduri care este de 2 km, având o viteză tot de $v+x$. Deci, drumul total parcurs în sensul curentului va fi:

$$AV + VS = \frac{1}{3}(v-x) + 2.$$

Prin urmare, timpul necesar ca să parcurgă acest spațiu, adică să ajungă plosca, este: $\frac{\frac{1}{3}(v-x) + 2}{v+x}$. Dacă la

acest timp adăugăm cele 20 minute $= \frac{1}{3}$ ore, de când a pierdut plosca, înseamnă că pentru ca s-o prindă s-a

scurs un timp egal cu: $\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(v-x) + 2}{v+x}$.

Acest timp trebuie să fie egal cu acela necesar pentru ca plosca să parcurgă cei 2 km cu viteza x a apei,

GEOMETRIE PLANĂ

III.9. CERCUL

Poziția a două cercuri; intersecția unei drepte cu un cerc; tangenta la cerc; construcții în cerc.

1. Insemnând cu R și r razele a două cercuri, iar cu D distanța centrelor lor, să se spună ce poziție au aceste cercuri, dacă:

$$R = 5 \text{ dm}, \quad r = 3 \text{ dm}, \quad D = 10 \text{ cm}; \quad R = 9 \text{ dm}, \quad r = 3 \text{ dm}, \quad D = 6 \text{ cm};$$

$$R = 7 \text{ dm}, \quad r = 4 \text{ dm}, \quad D = 9 \text{ cm}; \quad R = 5 \text{ dm}, \quad r = 2 \text{ dm}, \quad D = 2 \text{ cm}.$$

$$R = 6 \text{ dm}, \quad r = 2 \text{ dm}, \quad D = 8 \text{ cm};$$

2. Prin extremitățile unui diametru al unui cerc se duc două coarde paralele. Să se arate că aceste două coarde sînt congruente.

3. Printr-un punct în interiorul unui cerc, să se ducă o coardă care să aibă mijlocul în acest punct.

R. Perpendiculara pe diametru ce trece prin acest punct.

4. Printr-un punct oarecare se duc într-un cerc două coarde congruente. Să se arate că ele sînt simetrice față de diametrul care trece prin acest punct.

Indicație: Se va observa că distanțele de la coarde la centru sînt egale.

5. Să se ducă printr-un punct în interiorul unui cerc, două coarde congruente și perpendiculare.

Indicație: Se va arăta că cele două coarde fac unghiuri de 45° cu diametrul ce trece prin acest punct.

6. Se dă cercul O în care se duce diametrul AB ; fie CD coarda perpendiculară pe acest diametru în mijlocul razei OB . a) Să se arate că triunghiul DCB este isoscel; b) patrulaterul $ODBC$ este romb.

Indicație: Triunghiurile $OA'B$, $OA'C$ sînt echilaterale. $m(\angle BOC) = 120^\circ$ și $BA'C = 120^\circ$; arcele egale \widehat{AB} și \widehat{AC} au tot cîte 120° .

7. Se dă un punct în interiorul unui cerc. Să se arate că, dintre toate coardele ce se pot duce prin acest punct, cea mai scurtă este aceea care este perpendiculară pe diametrul ce trece prin acel punct.

Indicație: Se arată că această coardă este cea mai îndepărtată de centru, față de toate coardele duse prin acest punct.

8. Să se construiască o dreaptă care taie două cercuri date sub unghiuri congruente.

Indicație: Se duc două raze paralele în cele două cercuri și se unesc extremitățile lor. Se va cerceta cazul când razele sînt în același sens sau în sens contrar.

9. Fie două cercuri secante de raze R și r . Să se arate că segmentele paralele duse din punctele de intersecție a celor două cercuri și mărginite de aceste cercuri, sînt congruente.

10. Fie un punct M în interiorul unui cerc. Să se ducă prin M o coardă a cărei mijloc să fie punctul M și să se arate că această coardă este cea mai scurtă din toate coardele, ce ar trece prin M .

11. Fie cercul O și N un punct în interiorul cercului. Să se arate cum se obține cea mai mare coardă și cea mai mică, care trec prin punctul N . Justificați răspunsul.

12. Fie cercul O și două coarde ale cercului $[AB] \equiv [DC]$ astfel ca $AB \cap DC = \{N\}$. Să se arate că AB și DC sînt diagonalele unui trapez înscris în cercul O .

Indicație: Din arcele subîntinse de coarde se scoate partea comună.

13. Să se ducă printr-un punct din interiorul unui cerc, două coarde congruente și perpendiculare.

Indicație: Se va demonstra mai întîi că cele două coarde subîntind unghiuri de 45° cu diametrul ce trece prin acel punct.

14. Fie AOB un unghi la centrul cercului O și $A'OB'$ un alt unghi la centru cu laturile respectiv perpendiculare pe ale primului unghi. Să se demonstreze că dreptele AB , $A'B'$ sînt perpendiculare sau paralele, după cum unghiurile indicate sînt ambele de același fel, sau unul ascuțit iar celălalt obtuz.

Indicație: Se va arăta că perpendicularele duse din O pe AB , $A'B'$ sînt sau perpendiculare, sau în prelungire.

15. Se dă cercul O în care se duce diametrul AA' ; fie BC coarda perpendiculară pe diametrul dat în mijlocul razei OA' . Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

Indicație: Triunghiurile $OA'B$, $OA'C$ sînt isoscele.

16. Se dă un cerc O de rază R și un punct A în același plan. Se unește A cu centrul O și un punct variabil B de pe cerc. Se notează cu D mijlocul lui AO și cu C mijlocul lui AB . Care este figura determinată de punctul C ale cărei puncte au aceeași proprietate ?

R. Un cerc cu centrul în D și cu raza $\frac{R}{2}$.

17. Se dau două cercuri concentrice avînd centrul în O . Se duce o dreaptă care determină pe cele două cercuri coardele AB și CD . Să se arate că triunghiurile OAC și OBD sînt congruente.

18. În planul unui cerc, se dă un punct fix și se duc prin el două coarde mobile perpendiculare. Să se arate că dreapta care unește mijloacele acestor două coarde este

o lungime constantă

Indicație: Centrul cercului, punctul fix și mijloacele celor două coarde sînt vîrfurile unui dreptunghi.

19. Se dă un cerc C și un punct A pe el; pe tangenta în punctul A luăm un punct C' și considerăm cercul cu centrul în C' și cu raza $C'A$. Ambele cercuri se taie în B . Să se arate că punctele A, B, C, C' sînt așezate pe un cerc căruia i se va determina centrul și raza.

20. Fie cercul O și un punct A în exteriorul cercului, în primul caz și, în interiorul cercului, în al doilea caz. Să se determine punctul B pe cerc, care este cel mai apropiat și cel mai depărtat de punctul A , în ambele cazuri.

21. La un cerc dat să se ducă o tangentă perpendiculară pe o dreaptă dată.

22. La un cerc dat să se ducă o tangentă care să facă cu o dreaptă dată un unghi dat α .

23. Să se construiască un cerc de rază R , trecînd printr-un punct dat A și tangent unei drepte date.

24. Să se construiască un cerc de rază dată, trecînd printr-un punct dat, și tangent la un cerc dat.

25. Se unește un punct fix A cu un punct mobil B de pe cercul dat O . Să se determine figura F descrisă de mijlocul M al segmentului AB .

Indicație: Fie I mijlocul lui OA iar $OB=R=\text{constantă}$. Din triunghiul OAB avem: $IM = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2} = \text{constantă}$. Figura F este un cerc cu centrul în I și de rază $\frac{R}{2}$.

26. Fie un cerc O și un diametru fix AB . Se duce coarda CD paralelă cu acest diametru. Se notează cu M intersecția dreptelor CB și DA ; iar $AC \cap BD = \{N\}$. Ce figură descriu punctele M și N cînd coarda variază?

R. Perpendiculara ridicată în O pe AB .

27. Fie AB și CD două coarde ale unui cerc; $[AB] \equiv [CD]$ și $AB \cap CD = M$. Să se arate că segmentele cuprinse între punctul M și extremitățile coardelor sînt congruente.

28. Care este cea mai mică coardă a unui cerc ce se poate duce printr-un punct din interiorul cercului?

29. Care este cel mai mare și cel mai mic segment de dreaptă care se poate așeza cu extremitățile sale pe două cercuri exterioare?

30. Perpendiculara pe mijlocul razei OB a cercului O intersectează cercul de diametru AB în punctul N . Se cere: a) să se determine arcul BN , b) dacă M este simetricul lui N față de AB , să se arate că $MBNO$ este romb.

R. a) 60° .

III.10. MĂSURA UNGHIURILOR

31. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O . Latura AB corespunde unui arc de 60° , latura CD la un arc de 120° și diagonala $BD=a$, corespunde unui unghi la centru de 120° . a) Să se calculeze unghiurile formate de intersecția diagonalelor. b) Să se calculeze perimetrul triunghiului BCD .

R. 90° ; $3a$.

32. Se dă triunghiul ABC cu înălțimile BB' și CC' ($B' \in AC$ și $C' \in AB$). a) Să se arate că patrulaterul $BCC'B'$ este înscritibil. b) M fiind un punct la mijlocul lui BC , și dacă $m(\angle B) = 60^\circ$, să se arate că triunghiul $MC'B$ este echilateral.

33. Fie M un punct oarecare pe înălțimea AA' a triunghiului ABC . Din M se duc perpendicularele MB' și MC' pe laturile AB și AC . Să se arate că $\angle C \equiv \angle AB'C'$

Indicație: $AC'MB'$ și $CC'MA'$ înscritibile $\angle AMB' \equiv \angle AC'B'$.

34. Fie AC tangenta în A a cercului cu diametrul AB și raza R ($AC=2R$); CB intersectează cercul în D . Să se arate că triunghiul ADC este isoscel.

35. Fie ABC un triunghi înscris în cercul O . Prin mijlocul M al arcului AC , se duce o coardă $MN \parallel AB$, $MN \cap BC = \{I\}$. Se cere să se arate că: a) arcele \widehat{MCN} și \widehat{BNC} sînt egale; b) $MN=BC$.

36. Se dă un unghi $\angle BAC$ înscris în cercul O . Fie MN dreapta care unește mijloacele coardelor AB și AC și care taie arcele AB și AC respectiv în D și E . Se știe că $\widehat{DB} = \frac{\widehat{EAD}}{3}$; $\widehat{AE} = 112^\circ$ și $\widehat{BAC} = 220^\circ$. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului BAC .

R. 70° ; 78° ; 32° .

37. Bisectoarele unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic ABC se intersectează în O , iar prelungirile lor intersectează pe AC și AB , respectiv, în M și N . Cercul de diametru MN intersectează bisectoarele BM și CN în P și Q . Să se arate că arcul $PQ = 90^\circ$.

38. Prin punctele de intersecție A și B ale două cercuri secante se duc două secante oarecare. Să se arate că coardele care unesc noile intersecții ale acestor secante cu cercurile sînt paralele.

Indicație: Se duce coarda comună.

39. Într-un cerc O se ia un unghi la centru AOB , apoi se construiește un alt unghi la centru cu laturile respectiv perpendiculare pe ale primului unghi ($\angle A'OB'$). a) Să se arate în ce caz $\widehat{AB} + \widehat{A'B'} = 90^\circ$ și $ABB'A'$ este trapez isoscel. b) Să se arate că AB și $A'B'$ sînt paralele sau perpendiculare.

Indicație: Perpendicularele duse din O pe AB , $A'B'$ sînt sau perpendiculare sau în prelungire.

40. Se dau două cercuri concentrice O și O' ale căror raze sînt în raportul de $\frac{1}{2}$. Fie un punct A al cercului exterior din care se duc coardele AB și AC care sînt tangente la cercul O' interior, în B' și C' . Să se arate că coarda BC este tangentă la cercul O' și $BCC'B'$ este înscritibil.

Indicație: Se demonstrează că triunghiul ABC este echilateral.

41. Înălțimile CC' și BB' ale triunghiului ABC înscris într-un cerc se intersectează în punctul D . a) Să se construiască cercurile ce au ca punct comun D , iar virfurile triunghiului ABC aparțin respectiv cercurilor construite. b) Să se arate că unghiurile BAC și $B'DC$ sînt egale.

42. Fie triunghiul ABC înscris în cercul O . Unghiul B al triunghiului ABC are măsura de 80° . Bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe diametrul care trece prin C . Să se arate că raportul arcelor BC și AB este $\frac{2}{3}$. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului.

R. 80° ; 40° ; 60° .

43. În cercul O se înscrie triunghiul ABC și fie D punctul diametral opus lui A , H ortocentrul (punctul de întîlnire al înălțimilor triunghiului ABC), iar A' mijlocul laturii BC . Să se arate că H , A' și D sînt coliniare.

Indicație: $BH \parallel CD$; de asemenea $CH \parallel BD$; $HBDC$ paralelogram.

44. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct oarecare M , tangentele duse din B și C la cercurile circumscrise triunghiurilor ABM și ACM se intersectează în punctul N . Să se arate că punctul N aparține cercului circumscris triunghiului ABC .

Indicație: $\angle NBC \equiv \angle MAB$ și $\angle NCB \equiv \angle MAC$; $m(\angle BNC) = 180^\circ - [m(\angle NBC) + m(\angle NCB)] = 180^\circ - m(\angle A)$.

45. În triunghiul ABC , $m(\angle A) = 60^\circ$; bisectoarele interioare BB' , CC' se intersectează în I . Să se demonstreze că patrulaterul $AB'IC'$ este înscritibil.

46. Două cercuri se taie în A și B . Tangentele în A la cele două cercuri intersectează din nou cercurile în punctele C și D . Să se arate că AB este bisectoarea unghiului CBD . *Indicație:* $\angle CAB \equiv \angle ADB$; $\angle ACB \equiv \angle DAB \rightarrow \angle ABC \equiv \angle ABD$.

47. Într-un cerc se duc coardele AB , AC apoi se duc coardele BB' , CC' respectiv paralele cu coardele AC , AB . Să se demonstreze că triunghiul $AB'C'$ este isoscel.

Indicație: Patrulateralele $AB'BC$ și $AC'CB$ sînt trapeze isoscele $\rightarrow \angle AB' = \angle AC' = \angle BC$.

48. Se dă un semicerc AD . Se iau arcele AB și BC a căror măsură este $\pi/5$ radiani. Fie O centrul cercului, iar intersecția dintre CB și OA o notăm cu T . a) Să se arate că triunghiurile TAB și TOC sînt isoscele. b) $[TB] \equiv [OA]$. c) Proiecția lui BC pe raza OA este egală cu jumătatea razei.

Indicație: $m(\angle CTD) = \frac{m(\widehat{CD} - \widehat{AB})}{2}$.

49. Pe prelungirea unei coarde AB a unui cerc O se ia lungimea BC egală cu raza cercului și apoi se duce secanta COE , unde E e punctul cel mai depărtat de C . Să se arate că $m(\angle AOE) = 3m(\angle ACO)$.

50. Prin punctul A al unui cerc se duce o coardă AB și tangenta în punctul B . Diametrul perpendicular pe raza OA întâlnește tangenta și coarda (sau prelungirea ei) respectiv în punctele C și D . Să se demonstreze că $[BC] \equiv [CD]$.

51. Pe un cerc se iau patru puncte oarecare A, B, C, D . Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele arcelor AB, BC, CD, DA . Să se demonstreze că dreptele MP și NQ sînt perpendiculare.

52. Se duce o rază BO perpendiculară pe un diametru al cercului O . Se unește B cu un punct A al diametrului și BA taie cercul în P . Tangenta în P taie prelungirea diametrului în C . Să se demonstreze că $[CA] \equiv [CP]$.

Indicație: Se arată că $\angle APC \equiv \angle CAP$.

53. Într-un cerc O se duce diametrul AB ; din B se construiesc de o parte și de alta a diametrului, două coarde oarecare, care intersectează cercul în C și D . Cunoșcînd că BD intersectează tangenta la cerc dusă în A în punctul E , să se arate că $\angle BCD \equiv \angle AEB$.

Indicație: $\widehat{BD} = \widehat{AB} - \widehat{AD}$.

54. Circumferința unei roți de transmisie este de 810 mm. Cureaua de transmisie este în contact cu roata de-a lungul unui arc ce are lungimea de 200 mm. Să se calculeze măsura unghiului corespunzător acestui arc.

R. $88^\circ 53' 20''$.

55. Pe laturile AB și BC ale unui triunghi ABC , se construiesc în exterior pătratele $ABMN$ și $BCQP$. Fie O_1 și O_2 centrele acestor pătrate și K, L mijloacele laturilor AC respectiv MP . $AP \cap MC = D$. Arătați că: a) $\triangle MBC \equiv \triangle ABP$; b) $AMBD$ inscriptibil; c) O_1LO_2K pătrat.

Indicație: Se arată că $MC \perp AP$, folosind patrulaterul inscriptibil.

III.11. FIGURI ASEMENEA

Segmente proporționale

56. Să se împartă segmentul de 12 cm în părți proporționale cu numerele 2, 5, 6, 8.

57. Se dau trei segmente de lungimi: 4 cm; 7 cm; 9 cm. Să se afle, prin construcție grafică, a patra proporțională prin două metode (a paralelelor și dreptelor ce pleacă din același punct).

58. Să se afle pe cale grafică: $\sqrt{12}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{28}$. Se vor folosi mai multe metode.

59. Să se afle pe cale grafică $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$.

60. Să se împartă segmentul AB în cinci părți egale. (Construcție grafică.)

61. Fie a, b, c segmente date. Să se împartă segmentul AB în părți proporționale cu a, b, c .

62. Pe segmentul $AB=70$ mm, să se găsească un punct M astfel ca: $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{5}$ apoi un punct M' astfel ca: $\frac{M'A}{M'B}=\frac{5}{3}$. Cum sînt aşezate M şi M' faţă de extremităţile segmentului?

63. Se prelungesc medianele BB' , CC' ale triunghiului ABC cu $[B'B'']\equiv[BB']$, $[C'C'']\equiv[CC']$. Să se arate că punctele A , B'' , C'' sînt coliniare.

64. Într-un trapez dreapta care uneşte mijloacele laturilor neparalele, este paralelă cu bazele şi trece prin mijloacele diagonalelor.

65. Să se construiască un triunghi, cunoscînd măsura unghiului A , lungimea bisectoarei unghiului A şi raportul lungimilor laturilor $\frac{AB}{AC}=a$.

66. Să se demonstreze, bazîndu-se pe congruenţe de triunghiuri, că dreapta care uneşte mijloacele a două laturi a unui triunghi este paralelă cu a treia şi egală cu jumătatea ei.

67. Fie ABC un triunghi oarecare şi D un punct situat pe prelungirea lui AC , astfel ca $\angle BAC \equiv \angle CBD$. Să se demonstreze că BD este medie proporţională între AD şi CD .

68. Să se demonstreze că lungimea diametrului EF al cercului înscris într-un trapez isoscel $ABCD$ este medie proporţională între lungimile celor două baze ale acestuia.

Indicaţie: Centrul cercului O este la intersecţia bisectoarelor unghiurilor trapezului.

69. Să se construiască media proporţională între două segmente a şi b de lungime: $a=20$ mm, $b=45$ mm, folosind teorema catetei şi apoi a înălţimii. Să se afle prin calcul media proporţională a acestor lungimi şi să se verifice concordanţa celor trei rezultate.

70. Să se afle, prin desen, valoarea mediei proporţionale a numerelor 37 şi 54 şi să se verifice rezultatul prin calcul.

Indicaţie: Se construieşte grafic media proporţională între 37 mm şi 54 mm şi apoi se măsoară segmentul obţinut.

71. Să se deseneze un dreptunghi oarecare. Apoi să se construiască fără calcul sau măsurători, un pătrat echivalent cu dreptunghiul iniţial.

72. Pe laturile unui romb $ABCD$ se iau punctele M , N , P , Q astfel ca $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND}=\frac{CP}{PD}=\frac{CQ}{QB}=2$. Să se găsească valoarea raportului dintre aria rombului şi aria dreptunghiului $MNPQ$.

R. $\frac{9}{4}$.

III.12. ASEMĂNAREA

73. Pe catetele AB şi AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ şi $ACFG$, $AC \cap BF = \{K\}$ şi $AB \cap DC = \{H\}$. Să se arate că triunghiul AHK este isoscel.

Indicaţie: Se observă că triunghiurile $CAH \sim CDE$ şi $ABK \sim BGF$. Dacă notăm $|AC|=b$; $|AB|=c$

obținem $|AH| = \frac{bc}{b+c}$ și $|AK| = \frac{bc}{b+c}$.

74. Să se arate că mijloacele laturilor unui triunghi oarecare și piciorul uneia din înălțimile triunghiului sînt vîrfurile unui trapez isoscel.

Indicație: Se aplică teorema referitoare la linia mijlocie într-un triunghi și teorema referitoare la mediana corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic.

75. Să se demonstreze că suma distanțelor vîrfurilor unui triunghi la o dreaptă exterioară triunghiului este egală cu suma distanțelor mijloacelor laturilor triunghiului la aceeași dreaptă.

Indicație: Se va aplica teorema referitoare la linia mijlocie în trapez.

76. Fie M și N mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez, iar P și Q mijloacele diagonalelor sale. Să se arate că segmentele MN și PQ au același mijloc.

77. În triunghiul dreptunghic ABC , cu unghiul drept în A , avem $AC = 2AB$. Să se ia pe cateta AC un punct D , astfel ca $m(\angle BDA) = 90^\circ - m(\angle C)$. Să se arate că $DC = 3AD$.

Indicație: Înlocuind pe AC cu valoarea sa din enunțul problemei obținem din asemănarea triunghiurilor ABC și ABD : $\frac{AB}{AD} = \frac{2AB}{AB}$, de unde $AB = 2AD$ și fiindcă prin ipoteză $AC = 2AB$ deducem, ținînd seama de cele de mai sus, că: $AC = 4AD$.

78. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi ABC . Prin vîrfurile B și C ducem paralele la AD . Acestea întîlnesc prelungirea lui AC în M și prelungirea lui AB în N . Să se arate că: $MB \cdot DC = NC \cdot DB$.

79. O paralelă la mediana AD a triunghiului ABC întîlnește respectiv laturile AB , AC , în E și F . Să se demonstreze că: $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$.

Indicație: Ducînd $GE \parallel BC$ se obține $\triangle AEG \sim \triangle ABC$ (fig. III.11).

80. Produsul lungimilor a două laturi AB , AC ale unui triunghi ABC este egal cu produsul lungimii diametrului cercului circumscris triunghiului prin lungimea înălțimii AA' , dusă la vîrfurile A .

Indicație: $\triangle ADC \sim \triangle ABA'$ (fig. III.12).

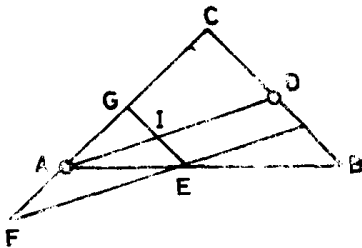


Fig. III.11

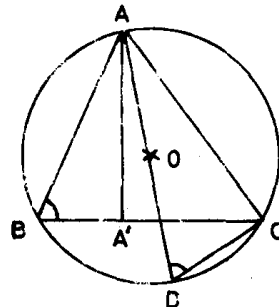


Fig. III.12

81. Se dă un punct M pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce MP

paralelă la AB și MQ paralelă cu CD ($P \in BC$ iar $Q \in AD$). Să se demonstreze că:

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1.$$

$$\text{Indicație: } \begin{cases} \text{triunghiul } MPC \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{MC}{AC}, \\ \text{triunghiul } AMQ \sim \triangle ACD \rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC} \end{cases}$$

Adunăm membru cu membru egalitățile de mai sus și obținem 1.

82. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy , se consideră un punct fix A . O secantă variabilă ce trece prin A taie pe Ox în M și pe Oy în N . Să se arate că suma: $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ are aceeași valoare, oricare ar fi poziția secantei.

Indicație: Ducem din A perpendicularele AP și AQ pe Ox și Oy . Triunghiurile AQN și MON sînt asemenea, deci $\rightarrow \frac{QA}{OM} + \frac{OQ}{ON} = 1$. Sau, vom scrie că suma ariilor triunghiurilor OAN și OAM este egală cu aria triunghiului OMN .

83. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a . Pe diagonala AC se ia punctul P , astfel încît $PC = \frac{AC}{4}$. Notăm $PB \cap CD = \{E\}$, O centrul pătratului, OU perpendiculara din O pe BC și $BP \cap OU = \{M\}$.

a) Să se determine CE . b) Să se arate că triunghiul BCM este isoscel.

Indicație: Dreapta OU este paralelă cu AB , ambele fiind perpendiculare pe BC . Triunghiurile PAB și POM sînt asemenea. Scriind proporționalitatea laturilor omoloage, avem: $\frac{OM}{AB} = \frac{PM}{PB} = \frac{PO}{PA} = \frac{1}{3} \rightarrow OM = \frac{a}{3}$. Pe de altă parte triunghiurile OPM și PEC sînt congruente; patrulaterul $ECMO$ este un paralelogram.

84. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc. Din centrul O al cercului ducem $OD \parallel BC$, $D \in AC$. Să se determine lungimile segmentelor AD și DC , cunoscînd că lungimea ℓ_3 a laturii triunghiului ABC este de $12\sqrt{3}$ cm.

$$\text{R. } 8\sqrt{3}; 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

85. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în A . Cercul ce are ca diametru latura oblică taie latura opusă AD în punctele M și N . Să se arate că fiecare din produsele $MA \cdot MD$ și $NA \cdot ND$ este egal cu produsul bazelor trapezului.

Indicație: Triunghiurile MDC și MBA sînt dreptunghice în D și A ; $m(\angle DCM) = m(\angle AMB)$, ca unghiuri cu laturi perpendiculare $\rightarrow \triangle MDC \sim \triangle MBA$. Analog: $\triangle NDC \sim \triangle NBA \rightarrow ND \cdot NA = DC \cdot AB \rightarrow MA \cdot MD = NA \cdot ND = AB \cdot DC$.

86. Se dă un paralelogram $ABCD$. Fie F un punct pe prelungirea laturii AB , iar $FD \cap AC = \{E\}$. Să se determine lungimea segmentului BF știind că: $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$ și $BA = a$.

$$\text{Indicație: } \triangle AEF \sim \triangle CED \rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{DC}. \text{ Inlocuind primul raport cu } \frac{m}{n}, \text{ iar pe } AF = a + BF,$$

$$\text{cunoscute, obținem: } \frac{m}{n} = \frac{a + BF}{a} \rightarrow \frac{m - n}{n} = \frac{BF}{a}.$$

$$\text{R. } BF = \frac{a(m - n)}{n}.$$

87. În trapezul dreptunghic $ABCD$, avînd ca baze AB baza mică și CD baza mare, fie E mijlocul înălțimii AD și $[AD] \equiv [DC]$. Să se arate că, dacă BE este perpendiculară pe EC atunci aria trapezului $ABCD$ este egală cu $10 \cdot AB^2$.

Indicație: $\angle ABE \equiv \angle DEC$ ca avînd laturile perpendiculare \rightarrow triunghiurile ABE și DEC sînt asemenea. E este mijlocul lui AD și $DC=AD$ prin ipoteză, deci $\frac{AE}{2AE} = \frac{AB}{AE}$ de unde: $AE=2AB \rightarrow DC=AD=2AE=4AB$, $AD=4AB$. Acum este suficient să înlocuim în formula ariei trapezului.

88. Să se arate că paralela EF dusă la bazele unui trapez $ABCD$, prin punctul M de întîlnire al diagonalelor, este împărțită în două părți, de lungimi egale, de acest punct.

Indicație: Se folosește asemănarea triunghiurilor formate.

89. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic mediana și înălțimea duse din vîrfurile unghiului drept formează între ele un unghi a cărui măsură este egală cu diferența măsurilor unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

90. Fie triunghiul ABC și $DE \parallel BC$; ($D \in AB$; $E \in AC$) și înălțimea AA' ($A' \in BC$) și $AA' \cap DE = \{F\}$. Paralela din F la AB și paralela din A' la AC se intersectează în P . Să se arate că punctele B, P, E sînt coliniare.

91. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$ se duce mediana AM ($M \in BC$). Fie D un punct oarecare pe BM ; N mijlocul lui AD și P simetricul punctului M în raport cu N . $PD \cap AC = \{O\}$ și $PD \cap AB = \{Q\}$. Să se arate că $[QD] \equiv [DB]$; $\triangle ODC$ este isoscel; $OQ = 2AP$.

92. Să se arate că dreapta care unește două din picioarele înălțimilor unui triunghi dat formează un alt triunghi asemenea cu primul.

Indicație: Se va ține seama că picioarele celor două înălțimi sînt pe același cerc cu două vîrfuri ale triunghiului dat și se va deduce egalitatea măsurilor unghiurilor celor două triunghiuri.

93. Se dau două cercuri secante în punctele P și Q . În primul cerc O_1 , se înscrie un triunghi ABC . Dreptele AP , BP , CP întîlnesc din nou cercul al doilea O_2 respectiv în punctele A' , B' , C' . Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC . Justificați (v. fig. III.13.).

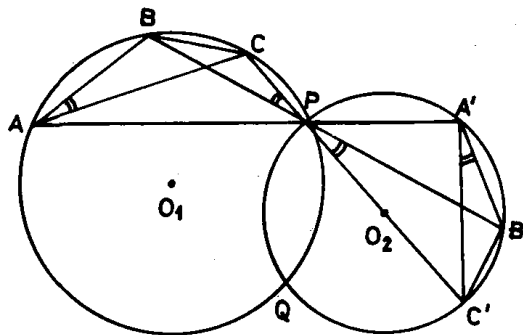


Fig. III.13

94. Pe laturile Ox și Oy ale unui unghi, se iau punctele A și B , respectiv C și D astfel încît $OA \cdot OB = OD \cdot OC$. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

Indicație: $\triangle OCA \sim \triangle OBD$; din $m(\angle OAC) = m(\angle ODB)$, rezultă că $ABCD$ este inscriptibil.

95. În dreptunghiul $ABCD$, $AB=2AD$. Pe latura DC se ia punctul M și pe latura AD punctul N astfel încât $AN=2DM$. Să se arate că $AM \perp BN$.

Indicație: $\triangle ANB \sim \triangle ADM$; din congruența unghiurilor celor două triunghiuri, rezultă că unghiul dreptelor AM și BN este de 90° .

96. Se prelungesc în același sens laturile AB și DC , ale unui pătrat de latură "a" cu lungimile $BE = \frac{a}{2}$ și $CF=a$. Să se demonstreze că $AF \perp CE$. Să se arate că punctul lor de intersecție M , se află pe cercul circumscris pătratului.

Indicație: a) Se va proceda ca la problema precedentă; b) Se observă că $m(\angle CMA)=90^\circ \rightarrow M$ se află pe cercul de diametru AC .

97. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $m(\angle A)=90^\circ$; $m(\angle B)=90^\circ$, iar intersecția diagonalelor se notează cu O . Paralela dusă prin O la baze se intersectează cu AB în E . Să se arate că EO este bisectoarea unghiului DEC .

Indicație: $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ (din proporționalitatea laturilor și teorema lui Tales) rezultă că $\triangle ADE \sim \triangle BEC$. Se observă că $m(\angle DEO)=m(\angle OEC)$ (se poate aplica și reciproca teoremei bisectoarei).

III.13. RELAȚII METRICE

98. Triunghiul isoscel ABC , $AB=AC=8$ cm și înălțimea $AD=6,4$ cm, este înscris într-un cerc O . a) Să se calculeze raza cercului. b) Să se determine raza cercului dacă $AB=a$ și $AD=b$. c) Să se determine aria triunghiului ABC .

$$R. a) r=5 \text{ cm}; b) r=\frac{a^2}{2b}; c) b\sqrt{a^2-b^2}.$$

99. Catetele AB și AC ale unui triunghi ABC sînt respectiv de 15 și 20 de unități de lungime. Să se determine mărimea înălțimii AP duse din vârful unghiului drept pe ipotenuză precum și cele două segmente PB și PC determinate de aceasta pe ipotenuză.

$$R. AP=12; PB=9; PC=16.$$

100. Catetele unui triunghi dreptunghic au 8 și 15 unități de lungime. Cît de mare este raza cercului înscris în acel triunghi?

$$R. 3.$$

101. Într-un triunghi isoscel obtuzunghic ABC (AB și AC sînt congruente), baza $BC=32$ m, iar laturile egale sînt de 20 m. Din punctul A se duce o perpendiculară pe AB ($AE \cap BC = \{E\}$). Să se calculeze lungimea segmentelor AE și CE .

$$Indicație: AD^2 + DE^2 = AE^2, \text{ dar } AE^2 = BE \cdot DE, \text{ deci } BE \cdot DE = AD^2 + DE^2.$$

$$R. 15 \text{ m și } 7 \text{ m.}$$

102. Trebuie frezată o piesă pătratică cu latura de 32 mm. Care este cel mai mic diametru pe care trebuie să-l aibe o bucată rotundă de fier pentru acest scop?

$$R. \approx 45 \text{ mm.}$$

103. Diametrul unei birne este de 12 cm. Se poate ciopli din ea o grindă pătratică cu latura de 10 cm?

$$R. \text{Nu.}$$

104. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt de 8 dm și 18 cm. Să se determine raza cercului circumscris.

R. 41 cm.

105. Să se afle aria cercului înscris într-un triunghi echilateral ABC cu latura de 6 cm.

R. $3\pi \text{ cm}^2$.

106. Razele a două cercuri sînt de 27 cm și 13 cm, iar distanța dintre centrele lor este de 50 cm. Să se determine lungimea unei tangente exterioare și a unciă interioare (comune).

R. tg.ext.=48 cm; tg.int.=30 cm.

107. Intr-un cerc O cu raza de 10 m se duce o coardă MN lungă de 16 m și diametrul AB este perpendicular pe această coardă. Să se calculeze: a) distanța de la centrul cercului la coarda MN ; b) lungimile celor două segmente ale diametrului determinate de coardă.

R. a) 6 m; b) 4 m; 16 m.

108. Să se determine aria unui paralelogram știind că una dintre laturile sale este de 51 cm, iar diagonalele sînt de 40 cm și 74 cm.

R. 1 224 cm^2 .

109. Fundul circular al unui butoi este format din 4 scînduri de aceeași lățime. Raza cercului fiind de 30 cm, să se afle aria fiecărei scînduri.

R. două scînduri a câte $450\sqrt{3} \text{ cm}^2$, alte două scînduri de câte 900 cm^2 .

110. Arcul descris din vîrful A al unui unghi drept al unui triunghi dreptunghic ABC , cu o rază egală cu cateta cea mai mică $AB=c$, taie ipotenuza BC în D . Se dau lungimile segmentelor $BD=p$, $DC=q$. Să se determine mărimile $b=AC$ și $c=AB$ ale celor două catete. Să se verifice apoi rezultatul aflat, aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul ABC (fig. III.14).

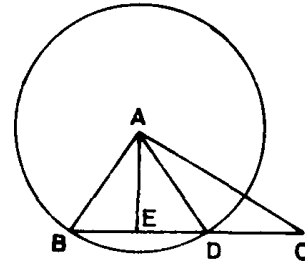


Fig.III.14

Indicație: $\triangle ABD$ este isoscel și deci AE înălțimea este și mediană, $BE=ED=\frac{p}{2}$, $EC=\frac{p}{2}+q$. În $\triangle ABC$ aplicînd teorema

înălțimii: $\frac{p^2+2pq}{4}=AE^2$. Apoi din $\triangle ABE$ deducem: $c^2=\frac{p^2+pq}{2}$; și din triunghiul dreptunghic AEC ,

$$c^2=\frac{p^2+3pq+2q^2}{2}.$$

111. Perimetrul unui dreptunghi $ABCD$ este de $18\frac{2}{3}$ cm. Raportul dintre dimensiunile laturilor dreptunghiului este $\frac{3}{4}$. Din vîrful A al dreptunghiului se duce o perpendiculară pe diagonala BD care intersectează pe BD în O și pe BC în F . Să se determine:

a) perimetrul $\triangle BOF$; b) valoarea raportului $\frac{OF}{OA}$; c) aria $AFCD$.

Indicație: $AB^2=BD \cdot BO$.

R. a) 7,2 cm; b) $\frac{9}{16}$; c) $15\frac{1}{3} \text{ cm}^2$.

III.14. POLIGOANE

112. Se dă un triunghi oarecare ABC . Ducem înălțimea AD ($D \in BC$) iar din D ducem o perpendiculară pe AC , care întâlnește bisectoarea unghiului DAC în O . Să se arate că triunghiul DOM (M fiind piciorul bisectoarei) este isoscel (fig. III.15).

113. Pe cercul circumscris unui triunghi echilateral ABC se ia un punct oarecare M . Să se demonstreze că cel mai mare dintre segmentele MA , MB , MC este egal cu suma celorlalte două.

Indicație: Luăm pe MC punctul D astfel ca $[MB] \equiv [MD]$; $\triangle DMB$ este echilateral. Se compară $\triangle AMB$ și $\triangle BDC$ (fig. III.16). $m(\angle ABM) = m(\angle BCD) = 60^\circ - m(\angle ABD) \rightarrow [DC] \equiv [AM]$.

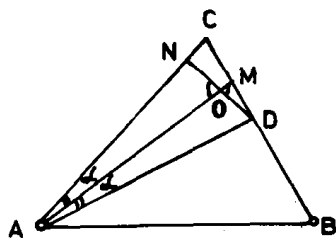


Fig. III.15

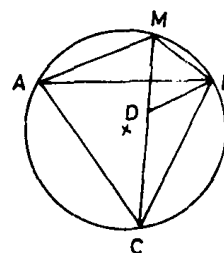


Fig. III.16

114. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic: a) lungimea medianei relative la ipotenuză este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei; b) dacă un unghi ascuțit are 30° , cateta opusă lui este egală cu jumătate din ipotenuză.

115. Lungimea laturii unui triunghi echilateral este egală cu 10 cm. Să se calculeze lungimea razei unui cerc a cărui arie este a patra parte din aria cercului în care se poate înscrie triunghiul dat.

$$R. \frac{5}{2\sqrt{3}} \text{ cm.}$$

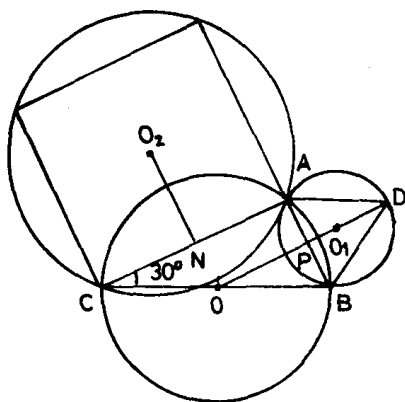


Fig. III.17

116. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\angle C) = 30^\circ$ și fie O centru cercului circumscris acestui triunghi. Cateta AB este latura unui triunghi echilateral ABD , înscris în cercul O_1 , secant cu cercul O în A și B . Cateta AC este latura pătratului înscris în cercul O_2 secant cu cercul O în A și C . Să se demonstreze că înălțimea triunghiului echilateral ABD are lungimea egală cu apotema pătratului din figură, iar latura pătratului este congruentă cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul O (fig. III.17).

Indicație: Patrulaterul $ACOD$ este un paralelogram $\rightarrow AD = R$; unde R este raza cercului O , iar

$AP = \frac{R}{2}$. În triunghiul dreptunghic ADP avem: $DP = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Dar $\triangle BDP \cong \triangle BOP$, deci: $DO = 2DP = AC =$ latura pătratului din figură. Însă și $NO_2 = \frac{AC}{2} \rightarrow DP = NO_2$, iar pentru mărimea laturii pătratului se observă că subîntinde un arc de 120° în cercul inițial adică este tocmai latura triunghiului echilateral înscris în cercul O .

117. Ce diametru trebuie să aibă un copac, pentru ca prin cioplire să se poată scoată din el un stîlp prismatic cu baza un pătrat a cărui latură să fie de 3 dm ?

R. $3\sqrt{2} \approx 4,23$ dm.

118. Ce diametru trebuie să aibă un copac, pentru ca prin cioplire să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un triunghi echilateral, a carui latură să fie 4 dm ?

R. $\approx 4,62$ dm.

119. Prin vîrfurile unui triunghi ABC se duc paralele la fiecare latură. Fie A', B', C' punctele opuse respectiv lui A, B, C . Se unește B cu B' și C cu C' ; $BB' \cap AC = \{E\}$ și $CC' \cap AB = \{D\}$. Să se arate că triunghiul CEB este echivalent cu triunghiul BCD .

Indicație: Se arată că triunghiurile CEB și BDC au aceeași înălțime și au bază comună. Pe de altă parte patrulateralele $ABCB'$ și $ACBC'$ sînt paralelograme.

120. Să se calculeze latura unui triunghi echilateral știind că diferența dintre raza cercului circumscris și a celui înscris este de 24 mm.

R. $48\sqrt{3}$ mm.

121. Un triunghi echilateral este tăiat prin paralele duse la laturi la $\frac{1}{3}$ din înălțimea socotită de la vîrf. Să se demonstreze că figura obținută în interiorul triunghiului este un hexagon regulat și să se afle aria acestui hexagon, știind că lungimea laturii triunghiului dat este de 120 mm.

R. $4\,152\text{ mm}^2$.

122. Să se calculeze aria unui triunghi cu laturile avînd lungimile de 65 cm, 40 cm și 87 cm.

Indicație: Se aplică de două ori teorema lui Pitagora pentru aflarea înălțimii.

R. $1\,224\text{ cm}^2$.

123. Capătul unei tije cilindrice cu diametrul de 48 mm trebuie cioplit astfel încît secțiunea să fie pătratul cu latura cea mai mare posibilă. Să se calculeze latura pătratului.

R. ≈ 34 mm.

124. Unui cerc cu raza de 16 cm i se circumscrie un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat. Să se determine lungimile laturilor acestor poligoane cu o precizie de 1 mm.

Indicație: Pentru aflarea laturii triunghiului se vor uni punctele de contact ale laturilor triunghiului cu cercul și se vor folosi proprietățile liniei mijlocii.

R. 55,3 cm; 32 cm; 18,4 cm.

125. Într-un cerc cu raza avînd lungimea de 4 cm se înscriu un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat. Să se afle raportul dintre suma lungimilor laturilor

acestor poligoane și suma lungimilor celor trei apoteme. Să se arate ca acest raport nu depinde de raza cercului.

$$R. \ell_3 + \ell_4 + \ell_6 = R(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1), \quad a_3 + a_4 + a_6 = R\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \text{ Valoarea raportului este totdeauna 2.}$$

126. Lungimea laturii unui triunghi echilateral este de 6 cm. Să se găsească aria triunghiului și raza cercului circumscris.

$$R. 15,57 \text{ cm}^2; 3,46 \text{ cm}.$$

127. O sală trebuie pardosită cu plăci în formă de hexagon regulat cu latura de 12 cm. Sala are 7,48 m lungime și 3,25 m lățime. Să se determine numărul de plăci necesare pentru pardosire.

$$R. 650 \text{ de plăci.}$$

128. O tablă de oțel în formă de hexagon regulat cu latura de 60 cm trebuie vopsită pe ambele părți. Să se calculeze cantitatea de vopsea necesară, dacă pentru $6,5 \text{ cm}^2$ se consumă 1,5 g de vopsea.

$$R. 4,312 \text{ kg.}$$

129. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$), $m(\angle B) = 60^\circ$ se duce AM mediană, ($M \in BC$). Din M se duc perpendicularele pe AM și pe BC astfel ca $MN \cap AC = \{N\}$ și $ME \cap AC = \{E\}$. a) Ce fel de triunghiuri sînt AMN și MEN ? b) Să se arate că $NE = \frac{AC}{3}$.

130. În triunghiul ABC se duc perpendiculare din A pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor B și C și obținem punctele E, D, N, M . Să se arate că aceste puncte sînt coliniare.

Indicație: Se vor observa dreptunghiurile ce se formează.

131. Elementele poligoanelor regulate înscrise în cerc (hexagon, triunghi, pătrat)

	latura	apotema	aria	aria
triunghi	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}$
pătrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$	l_4^2
hexagon	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}$

III.15. TRIGONOMETRIE

132. Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30° , 45° și 60° sînt prezentate în tabelul de mai jos.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

133. Pe un teren înclinat trebuie să se planteze pomi care să aibă între ei o distanță de 5 m. La ce distanță trebuie săpate gropile pentru sădirea pomilor, dacă panta are o înclinare de 31° față de orizontală ?

R. 5,83 m.

134. Un coș de fabrică înalt de 30 m lasă o umbră de 45 m. Să se afle înălțimea soarelui deasupra orizontului, în momentul cînd s-a măsurat umbra.

R. $\approx 33^\circ 30'$.

135. Cîtă tablă este necesară pentru confecționarea unui acoperiș cu două pante al unei hale dreptunghiulare de 30 m lungime și 10 m lățime, știind că panta acoperișului este de 40° și că pentru încheierea tablei se mai adaugă 5% material.

Indicație: Fiecare pantă formează un dreptunghi (fig. III.18, pag.144) cu dimensiunile $a=30$ m și b , care se poate calcula din Δ dreptunghic ABC (hașurat), în care avem: $BC=5$ m și unghiul $ACB=40^\circ$.

$$R. 2 \cdot 195,6 + \frac{5}{100} (2 \cdot 195,6) \approx 411 \text{ m}^2.$$

136. Un vagonet încărcat are masa de 300 kg. Cu ce forță trebuie împins vagonetul pe un plan înclinat cu 17° față de sol pentru ca vagonetul să se urnească din loc ?

R. 8,76 N.

137. Dintr-un punct aflat la distanța $a=86,6$ m de centrul bazei unui turn vizăm turnul sub unghiul $22^\circ 30'$. Să se calculeze înălțimea turnului.

R. 35,8 m.

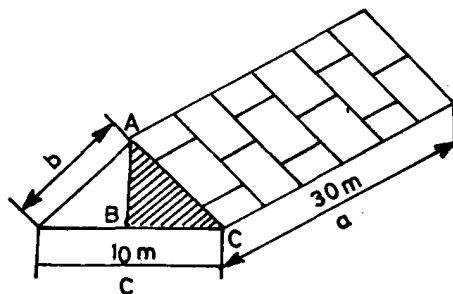


Fig.III.18

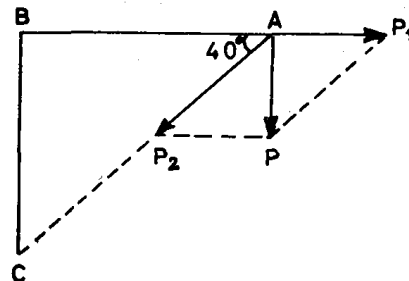


Fig.III.19

138. O cale ferată se ridică la fiecare 30 m de șine cu o cotă de 1 m. Să se afle unghiul de urcare.

R. $\approx 2^\circ$.

139. Un elicopter se află la 1 700 m deasupra unei ținte a cărei poziție o semnalează aeroportul. În acel moment observatorul citește unghiul direcției elicopterului cu orizontul de 35° . Să se afle distanța (în linie orizontală) de la aeroport la elicopter.

R. 2 427,6 m.

140. În capătul A al unei macarale de perete este atârnat un corp P cu greutatea de 900 N. Barele AB și AC ale macaralei formează un unghi de 40° (fig. III.19). Să se determine efortul din bare.

Indicație: Forța P se descompune în două componente, după direcțiile barelor, P_1 (forța ce întinde bara AB) și P_2 forța ce comprimă bara AC).

R. $P_1 = P \operatorname{ctg} 40^\circ = 1\,073\text{ N}$; $P_2 = 1\,400\text{ N}$.

141. Să se afle lungimea proiecției unui segment $AB = a$ pe o dreaptă $x'x$, care face cu AB un unghi dat α (Aplicație $a = 21\text{ m}$, $\alpha = 25^\circ$.)

R. $A'B' = 21 \cos 25^\circ = 21 \cdot 0,906 = 19,03\text{ m}$.

142. O scară de piatră este formată din trepte care au lățimea $l = 27\text{ cm}$ și înălțimea $a = 18\text{ cm}$. Să se calculeze unghiul pe care îl face scara cu direcția orizontală.

R. $\approx 33^\circ 30'$.

143. Într-un trapez isoscel, diferența lungimilor bazelor este de 2 cm, iar linia mijlocie are lungimea de 6 cm. Latura neperalelă face cu baza un unghi de 60° . Să se calculeze lungimea bazelor trapezului și aria sa.

R. 7 cm; 5 cm; $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

144. Un cerc cu raza R este circumscris unui pentagon regulat. Să se afle latura, apotema și aria pentagonului.

Indicație: Se folosește triunghiul dreptunghic care are ipotenuza R, iar catete apotema poligonului și jumătatea laturii.

R. Notînd cu l_5 , a_5 , A_5 elementele cerute, obținem:

$l_5 = 2R \sin 36^\circ$; $a_5 = R \cos 36^\circ$; $A_5 = 5R^2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ$.

145. Două terenuri în formă de dreptunghi au fost inundate parțial, așa cum se vede în figura III.20, a și b. Bazele fiind inaccesibile, s-a putut măsura la primul teren lățimea de 180 m, care se vede din A sub unghiul de $32^\circ 30'$. La terenul al doilea s-a putut măsura lungimea de 160 m, care este văzută tot din punctul A sub unghiul de 34° . Să se afle ariile celor două terenuri.

R. $50\,862,60\text{ m}^2$; $17\,254,40\text{ m}^2$.

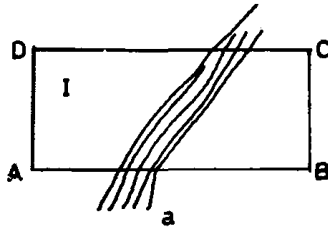


Fig.III.20

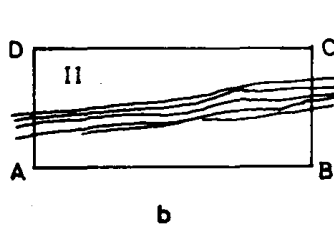
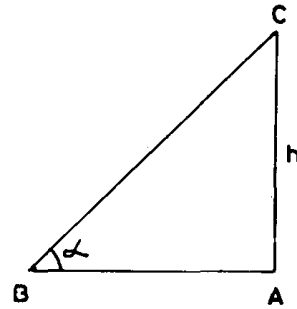


Fig.III.21



R. $h=4,836$ m; $k=1,908$ m.

146. O scîndură cu lungimea de 42,6 dm este sprijinită pe un prag înalt; $h=180$ cm, spre a servi ca plan înclinat pentru rostogolirea pe ea a unui butoi greu, care trebuie ridicat peste prag. Să se determine unghiul ce-l face scîndura cu pavajul orizontal al curții.

147. O scară BC de lungime dată l este rezemată de o podea orizontală AB și de un perete vertical AC (fig. III.21). Se cunoaște unghiul α pe care scara BC îl face cu orizontala AB . Se cere să se afle înălțimea $AC=h$ pe care o putem atinge cu această scară, precum și distanța $AB=k$ a extremității B a scării de la piciorul A al zidului. (Aplicație numerică: $l=5,20$ m; $\alpha=68^\circ 30'$.)

148. Un drum în linie dreaptă este înclinat față de orizontala AB cu unghiul α . Se cere să se calculeze lungimea acestui drum și înclinarea sa α deasupra orizontalei, cînd se cunoaște $AB=589$ m; $h=121,5$ m (fig. III.22).

R. $\alpha \approx 11^\circ 30'$; $L=601,4$ m.

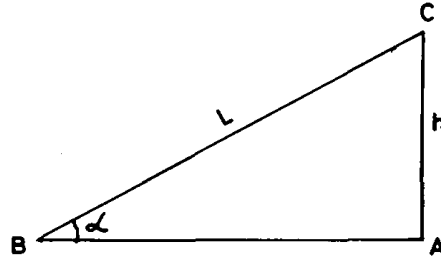


Fig.III.22

III.16. ARII

149. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct arbitrar pe latura BC , ($M \in BC$). Fie ME și MF distanțele de la punctul M la laturile AB și AC . Să se arate că suma $ME+MF$ este constantă și egală cu înălțimea triunghiului dat (fig. III.23).

Indicație: Să unim pe M cu A și să scriem că aria $\Delta(CMA) + \text{aria } \Delta(BMA) = \text{aria } \Delta(ABC) \Rightarrow \frac{AC \cdot MF}{2} + \frac{AB \cdot ME}{2} = \frac{AC \cdot BH}{2}$, unde H este piciorul perpendicularei pe AC din B .

Observație. Considerațiile de mai sus rămîn valabile și în

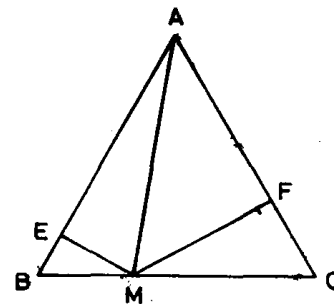


Fig.III.23

cazul triunghiului isoscel, cînd $[AB] \equiv [AC]$, atunci valoarea constantei este egală cu una dintre cele două înălțimi ce se pot duce din vîrfurile unghiurilor egale ale triunghiului.

150. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$ de latură l . Se construiește pe fiecare latură a sa, în exterior, cîte un triunghi echilateral. Se obține în modul acesta un poligon cu 12 laturi în formă de stea. Se cere să i se afle aria. Să se afle apoi latura unui alt hexagon care are aria egală cu aria poligonului cu 12 laturi.

Indicație. Aria poligonului în formă de stea se compune din aria hexagonului de latură 1 și ariile a șase triunghiuri echilaterale de aceeași latură.

Observații. Latura noului hexagon este cît latura unui pătrat înscris în același cerc în care se poate înscrie hexagonul $ABCDEF$, ceea ce ne permite să-l construim cu rigla și compasul.

R. Aria poligonului cu 12 laturi este $3l^2\sqrt{3}$.

151. Să se arate că aria unui hexagon regulat este dublul ariei triunghiului echilateral înscris în același cerc cu el. Presupunînd că latura triunghiului echilateral este de 3 cm, cît este de mare aria pătratului înscris în același cerc ?

R. $A_4 = 6 \text{ cm}^2$.

152. Se dă un octogon regulat $ABCDEFGH$. Să se calculeze aria cuprinsă între acest octogon și pătratul $BDFH$, presupunînd că se cunoaște raza R a cercului circumscris octogonului.

Indicație. Pentru a înscrie un octogon într-un cerc, înscriem în prealabil un pătrat $BDFH$ și prelungim apotemele acestuia pînă taie cercul. Se obțin astfel 4 puncte care împreună cu vîrfurile pătratului determină vîrfurile octogonului regulat.

R. $2(\sqrt{2}-1)R^2$.

153. Se împart laturile unui pătrat $ABCD$ cu latura l în cîte patru părți egale și se taie colțurile pe la primele diviziuni; se obține un octogon (fig. III.24). a) Să i se calculeze aria și perimetrul. b) Cît este mare înălțimea ce pleacă din vîrf unghiului obtuz al unui triunghi arătat în figură prin RPM unde R este mijlocul laturii PQ a octogonului

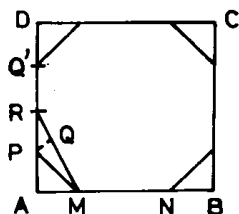


Fig. III.24

Indicație: Cele patru triunghiuri tăiate de la colțuri sînt dreptunghice isoscele egale. Deci este suficient să calculăm, de exemplu, aria triunghiului dreptunghic isoscel PMA cu catetele egale cu $\frac{l}{4}$. Apoi perimetrul

căutat va fi: $P = 4MN = l(2 + \sqrt{2})$. Pentru calculul înălțimii PQ ne vom folosi de aria triunghiului RPM . Aria unui triunghi de felul lui RPM se află, luînd ca bază, de exemplu, RP și ca înălțime pe MA . Aceași arie se poate afla luînd

ca bază pe MR și ca înălțime pe PQ . $RM = \sqrt{AR^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{l\sqrt{5}}{4}$. Prin compararea ariilor $\Rightarrow PQ = \frac{1}{4\sqrt{5}}$.

R. a) $\frac{7l^2}{8}$; $l(2 + \sqrt{2})$; b) $\frac{l}{4\sqrt{5}}$.

154. Pe o tarla, s-a obținut, folosindu-se îngrășămintă chimice, un spor de recoltă de 360 kg de porumb la hectar. În prealabil s-a făcut experiența pe o tarla ce avea formă de trapez isoscel, cu laturile $AB = 70 \text{ m}$, $AC = BD = 280 \text{ m}$ și $CD = 406 \text{ m}$.

Care a fost sporul de porumb obținut pe această ultimă tarla ?

Indicație: Fie AE și BF înălțimile trapezului duse din A și B pe baza mare CD ; $CE+FD=406-70=336$ m. Cum $CE=FD \Rightarrow$ că fiecare din acestea au o lungime de $\frac{336}{2}=168$ m. $AE^2=280^2-168^2=(280-160)(280+168)=112 \cdot 448$. Observăm că $448=4 \cdot 112$, astfel că putem scrie: $AE^2=112 \cdot 112 \cdot 4$; $AE=224$.

R. 1919,232kg porumb.

155. a) Să se afle perimetrul și aria unui romb, $ABCD$, ale cărui diagonale sînt $AC=60$ cm și $BD=80$ cm. Să se afle distanța dintre laturile paralele ale rombului.

b) Fie A mulțimea ale cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.m.c. ai numerelor ce reprezintă diagonalele și distanța cerută mai sus. Fie B și C mulțimile ale căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă diagonala mare și diagonala mică. Să se determine $C_A B = A - B$. Să se determine $(A \cap B) \cup C$ și $(A \cup C) \cap B$.

R. a) $P=200$ cm; 48cm; b) $\{3\}$; $\{2;3;5\}$; $\{2;5\}$.

156. Un teren de sport este format dintr-un dreptunghi $ABCD$ și două semicercuri cu diametrul cît lățimea dreptunghiului. Lungimea dreptunghiului este de 172m, iar lungimea unui semicerc este de 329,70 m. Cîtă sămînță de iarbă este necesară pentru a însămînța tot terenul dacă la 1 m pătrat se folosesc 12g de sămînță?

R. 848 862 g.

157. a) Să se calculeze aria unui cerc O , în care o coadă AB are lungimea de 8cm și săgeata sa CD e lungă de 3 cm. b) Fie $\{m,n,p\}$ trei puncte distincte pe OC și $\{a,b,c\}$ trei puncte pe DC . Să se pună în evidență proprietatea comună a acestor puncte.

R. a) $\frac{625\pi}{36}$ cm². b) Toate punctele sînt egal depărtate de A și B .

158. Distanța dintre centrele O_1 și O_2 a două cercuri de raze egale este egală cu raza R a cercurilor. Să se calculeze aria comună a celor două cercuri în funcție de R . Aplicație: $R=6$ cm.

Indicație: Fie C și C_1 cele două cercuri $C \cap C_1 = \{A, B\}$. Fie I punctul unde coarda comună taie linia centrelor O_1, O_2 . Cum ariile segmentelor de cerc O_1AB și O_2AB sînt egale, problema revine la a calcula una din ele. Aria sectorului circular AO_1B este a treia parte din aria cercului: rezultă: $A_{\text{segm}} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$, iar aria comună celor două cercuri este $2A_{\text{segm}} = R^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. În particular, dacă $R=6$ cm; $2A = (24\pi - 18\sqrt{3})$ cm².

159. Să se împartă prin cercuri concentrice, un cerc cu raza r în patru părți echivalente (de aceeași arie) (fig.III.25).

Indicație: Să notăm cu x, y, z razele OE, OD, OB ale celor trei cercuri concentrice cerute. Ariile acestor cercuri sînt: $\pi x^2, \pi y^2, \pi z^2$. Se vor studia relațiile dintre ele.

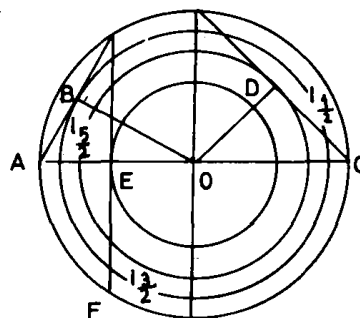


Fig.III.25

160. Se dă un triunghi dreptunghic cu catetele c și b iar ipotenuza a . Să se afle ariile triunghiurilor ABD și BDC obținute prin ducerea bisectoarei BD a unghiului ascuțit B .

$$\text{Indicație: } \text{Aria } ABD = \text{aria } ABC - \text{aria } BDC = \frac{bc}{2} - \frac{ac(a-c)}{2b} = \frac{b^2c - ac(a-c)}{2b} = \frac{c(b^2 - a^2 + ac)}{2b}.$$

161. Într-un cerc cu raza de 6,5 m se duce un diametru AB , pe care se ia distanța $AM=4$ m, iar din M se ridică o perpendiculară care întâlnește cercul într-un punct N . Să se calculeze aria triunghiului NAB .

R. 39cm^2 .

162. Să se construiască un hexagon regulat cu latura de 2 cm și pe fiecare latură a lui să se construiască, în afară, câte un pătrat. Se unesc vîrfurile pătratelor necomune cu hexagonul și se obține un poligon cu 12 laturi. Să se arate că acest poligon este regulat și să se calculeze aria.

Indicație: Aria cerută se compune din aria hexagonului cu latura de 2 cm, la care se adaugă aria a șase pătrate egale, avînd latura de câte 2 cm și aria a șase triunghiuri echilaterale avînd latura de 2 cm.

$$\text{R. } 12(2+\sqrt{3})\text{cm}^2.$$

163. Latura BC a unui triunghi ABC cu aria de 240 cm^2 , se împarte în 6 părți egale astfel: BM, MN, NP, PD, DE și EC . Latura AC se împarte în 4 părți egale, astfel: AF, FG, GH, HC . Să se afle aria patrulaterului $GHEP$.

R. 50 cm^2 .

164. Să se calculeze apăsarea exercitată de abur asupra pistonului unei mașini, știind că diametrul pistonului este de 9 cm și că presiunea medie este de $29,4 \cdot 10^4\text{ N/m}^2$.

R. $1\,871\text{ N}$.

165. O persoană, care face 150 de pași pe minut, a parcurs diagonala unei piețe publice, în formă de pătrat, în 40 secunde. Care este aria pieței? Care ar fi latura unei piețe de aceeași arie cu aceasta, avînd însă forma unui hexagon regulat? (Se va socoti că la 125 de pași corespunde 1hm.)

$$\text{R. } 3200\text{ m}^2; \frac{80}{\sqrt{3\sqrt{3}}}\text{ m}.$$

166. Fie D și d diagonalele unui romb de latură l , ce are un unghi de 150° . Să se arate că în acest romb există relația: $l^2 = D \cdot d$.

167. Laturile consecutive ale unui paralelogram au lungimile de 5 cm și 6 cm iar aria lui este de 24 cm^2 . a) Să se afle cu cît la sută crește aria acestui paralelogram, dacă laturile consecutive ale acestui paralelogram cresc fiecare cu câte 5 cm. b) Să se arate că diagonala paralelogramului inițial este egală cu una din laturile paralelogramului.

R. 267% prin adaos.

III.17. PROBLEME ȘI EXERCIIU RECAPITULATIVE

1. Care este unghiul a cărui suplement este de n ori mai mare decît complementul său.

Cazuri particulare: $n=4, n=5$

$$\text{R. } \frac{90(n-2)}{n-1}; 60^\circ; 67^\circ 30'.$$

2. Dintre cele trei unghiuri ale unui triunghi ABC , al doilea îl întrece pe cel dintâi cu 40° și al treilea pe cel de-al doilea cu aceeași cantitate. Se cer măsurile unghiurilor triunghiului.

$$R. m(\angle A)=20^\circ; m(\angle B)=60^\circ; m(\angle C)=100^\circ.$$

3. Unul din unghiurile unui triunghi are măsura de n° , iar diferența celorlalte unghiuri este de m° . Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului. Caz particular: $n^\circ=40^\circ$; $m^\circ=18^\circ$.

$$R. m(\angle A)=40^\circ; m(\angle B)=79^\circ; m(\angle C)=61^\circ.$$

4. Laturile unui triunghi au lungimile de 3 m, 4 m, 6 m. Perimetrul unui alt triunghi asemenea cu primul este de 26 m. Să se determine lungimile laturilor acestui triunghi.

$$R. 6 \text{ m}, 8 \text{ m}, 12 \text{ m}.$$

5. Lungimea unui dreptunghi este cu un metru mai mare decât lățimea lui. Micșorând amândouă dimensiunile cu câte un metru, aria dreptunghiului scade cu 12 metri pătrați. Se cer dimensiunile dreptunghiului.

$$R. 6 \text{ m}; 7 \text{ m}.$$

6. Să se calculeze dimensiunile unui dreptunghi știind că, dacă mărim baza cu 2 cm și micșorăm înălțimea cu 1 cm, aria se mărește cu 2 cm^2 , iar dacă micșorăm baza cu 1 cm și mărim înălțimea cu 1 cm, aria sa rămâne neschimbată.

$$R. 6 \text{ cm}; 5 \text{ cm}.$$

7. Cât de mare trebuie să fie înălțimea unui dreptunghi, pentru ca aria lui să crească cu 16 m^2 , dacă mărim baza cu o cantitate egală cu înălțimea?

$$R. 4 \text{ m}.$$

8. Se dau două dreptunghiuri. Baza unuia are lungimea de 5 cm, iar a celuilalt de 4 cm. Suma ariilor lor este de 42 cm^2 . Dacă mărim baza primului dreptunghi de două ori, iar baza dreptunghiului al doilea cu 1 cm, fără să schimbăm înălțimile lor, suma ariilor dreptunghiurilor obținute este cu 33 cm^2 mai mare decât suma ariilor dreptunghiurilor inițiale. Să se afle mărimea înălțimii fiecăruia din aceste dreptunghiuri.

$$R. 6 \text{ cm}; 3 \text{ cm}.$$

9. Să se determine dimensiunile unui dreptunghi cunoscând mărimea $2p$ a perimetrului său și raportul $\frac{m}{n}$ dintre lungimile bazei și înălțimii sale.

$$R. \frac{pm}{m+n}; \frac{pn}{m+n}.$$

10. Două laturi omoloage a două poligoane asemenea au lungimile de 15 m și 5 m, iar diferența dintre perimetrele lor este de 60 m. Să se determine perimetrele celor două poligoane.

$$R. 30 \text{ m}; 90 \text{ m}.$$

11. Raportul dintre lungimile b și c ale celor două catete AC și AB ale unui triunghi dreptunghic este $\frac{5}{6}$, iar ipotenuza BC are lungimea de 122 cm. Să se afle lungimea segmentelor determinate de înălțimea AD pe ipotenuză.

$$R. 72 \text{ cm}; 50 \text{ cm}.$$

12. Raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este $\frac{3}{4}$, iar lungimea ipotenuzei este de 175 cm. Să se afle lungimile celor două catete și diferența dintre

cele două segmente determinate pe ipotenuză de înălțimea ce pleacă din vârful unghiului drept.

R. 140 cm; 105 cm; 49 cm.

13. Să se înscrie un pătrat $EFGH$ într-un triunghi ABC , a cărui bază $BC=10$ cm iar înălțimea este de 6 cm astfel ca vîrfurile E și F ale pătratului să fie pe latura BC a triunghiului iar vîrfurile G și H pe laturile AC și AB .

R. $l_4=3,75$ cm.

14. Un trapez are bazele de lungime 8 m și 26 m; înălțimea are lungimea de 3 m. La o distanță de 2 m de baza mare se duce o paralelă EF la baza mare, care determină două trapeze. Să se afle ariile celor două trapeze.

R. 40 m^2 ; 11 m^2 .

15. Distanța cea mai mare dintre punctele a două cercuri concentrice este de a cm, iar distanța cea mai mică este de b cm. Să se determine razele celor două cercuri. Caz numeric $a=18$ cm; $b=10$ cm.

R. 14 cm; 4 cm.

16. Dacă între mulțimile A , B , C avem relația $A \subset B \subset C$, să se arate că:

a) $A \cup (B \cap C) = B \cup (A \cap C)$; $B \cap (A \cup C) = C \cap (A \cup B)$; b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

c) $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$.

17. Să se determine numărul laturilor pe care trebuie să le aibă un poligon pentru ca suma unghiurilor lui să fie de patru ori mai mare decît aceea a unui alt poligon, care are un număr de laturi de două ori mai mic decît primul.

R. 6 laturi.

18. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 15 m. Să se afle ipotenuza presupunînd: 1) că a doua catetă este cu 5 m mai scurtă decît ipotenuza; 2) că ea este $\frac{4}{5}$ din ipotenuză.

R. 25 m.

19. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu catetele avînd lungimea de 3 cm și 4 cm. Se duce bisectoarea unghiului drept A care taie ipotenuza în D . Să se calculeze lungimile segmentelor BD și DC .

R. $\frac{20}{7}$ și $\frac{15}{7}$ cm.

20. Într-un triunghi isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, înălțimea dusă din A pe baza BC este de 4 m, iar înălțimea dusă din vârful B pe AC este de 4,8 m. Să se determine lungimile laturilor triunghiului.

R. 5 m; 6 m.

21. Se dă triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, cu baza $BC=8$ cm și înălțimea $AD=3$ cm. Din piciorul D al înălțimii duse din A se duc $DE \parallel AB$ și $DF \parallel AC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Diagonalele paralelogramului $AFDE$ se taie în O . a) Să se arate că înălțimea BM dusă din B pe AC este de patru ori mai mare decît distanța OH de la O la latura AC .

b) Să se calculeze lungimea lui OH .

Indicații: a) Se folosește proprietatea liniei mijlocii a triunghiului; b) Se folosește asemănarea triunghiurilor AHO și ACD .

R. b) $OH = \frac{6}{5}$.

22. Un trapez $ABCD$ are bazele $AB=24$ m, $CD=15$ m, iar înălțimea $h=6$ m. Se cere:
a) înălțimea triunghiului CED format din baza mică a trapezului cu lungimea laturilor neparalele ale acestuia; b) să se deducă în ce raport trebuie să fie bazele unui trapez pentru ca înălțimea triunghiului considerat să fie un sfert din înălțimea trapezului.

R. a) 10 m; b) $\frac{1}{5}$.

23. Perimetrul unui triunghi este $\frac{11}{13}$ din perimetrul unui triunghi asemenea cu el. Diferența dintre două laturi omoloage este de 1 m. Să se determine lungimile acestor laturi.

R. 6,5 m și 5,5 m.

24. Raportul dintre lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic este 3:2, iar înălțimea împarte ipotenuza în două segmente, din care unul are lungimea cu 2 m mai mare decât celălalt. Să se determine lungimea ipotenuzei.

R. 5,2 m.

25. Perimetrul unui dreptunghi este 40 m. Știind că lungimea este cu 5 m mai mare decât lățimea, să se calculeze lungimea dreptunghiului.

R. 12,5 m.

26. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu p , iar diferența laturilor neegale este egală cu d . Să se determine laturile dreptunghiului. Aplicație numerică: $p=60$, $d=20$.

R. 25; 5.

27. Lungimile laturilor unui patrulater oarecare sînt proportionale cu numerele $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}$ și 2. Perimetrul unui patrulater asemenea cu el este de 75 m. Să se determine lungimile laturilor patrulaterului al doilea.

R. 18; 9; 12; 36.

28. Laturile unui patrulater au lungimile de 10 dm, 20 dm, 25 dm. Într-un patrulater asemenea cu el, latura cea mai mare adăugată la cea mai mică ne dă 28 dm. Să se determine mărimile laturilor celui de-al doilea patrulater.

R. 8 dm, 12 dm, 16 dm, 20 dm.

29. Una din bazele unui trapez este egală cu 10 m, înălțimea este de 4 m, iar aria de 32 m^2 . La o distanță de 1 m de baza dată, se duce o paralelă cu ea între cele două baze. Se cere lungimea acestei paralele.

R. 9 m.

30. Raza unui cerc este de 25 cm; două coarde paralele sînt de 14 cm și 40 cm. Să se determine distanța dintre ele. Se vor considera două cazuri: a) coarde de aceeași parte a centrului și b) opuse față de centru.

R. 9 cm; 39 cm.

31. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2 . Înălțimea lui este de 60 dm, iar una din dimensiunile dreptunghiului de bază este de $\frac{1}{2}$ din cealaltă. Să se afle dimensiunile bazelor acestui paralelipiped.

R. 2 m; 4 m.

32. Să se construiască triunghiul ABC cînd se cunosc: a) înălțimea $AD (D \in BC)$; b) distanța DE a punctului D la latura AC ; c) ortocentrul H al triunghiului.

33. Să se arate că: $12012_3 + 12302_4 + 11034_5 + 1555_6 = 1774_{10}$.

34. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic, știind că o catetă are lungimea egală cu 27 m, iar cealaltă este cu 9 m mai mică decât ipotenuza.

$$R. A = 486 \text{ m}^2.$$

35. Un trapez are baza mare de 32 m, baza mică de 24 m și înălțimea de 15 m. Să se calculeze aria triunghiului format din baza mică și prelungirea laturilor neparalele.

$$R. A = 540 \text{ m}^2.$$

36. Într-un trapez cu baza mare de 35 m, baza mică de 20 m și înălțimea de 12 m se duce o dreaptă lungă de 31 m, paralelă cu bazele, limitată de laturile neparalele. Să se calculeze distanța de la această dreaptă la baza mare.

$$R. 3,20 \text{ m}.$$

37. Se dă triunghiul dreptunghic ABC (unghiul drept în A) în care măsura unghiului C este de 60° . În punctul C se duce dreapta (d) perpendiculară pe BC . Prelungirea laturii AB întâlnește această dreaptă în C' iar perpendiculara în B pe AB întâlnește dreapta d în C'' . Segmentul CC' are lungimea de $12\sqrt{3}$ cm. Să se afle: aria patrulaterului $C'BC''B'$ (B' fiind simetricul lui B față de dreapta d).

$$R. 1728\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

38. În triunghiul ABC , latura $AC = 12,5$ cm, iar înălțimea $AD = 10$ cm. Pe latura AB se ia un punct M astfel încât să avem $BM:MA = \frac{1}{4}$. Prin M se duce paralela la AC și perpendiculara pe BC care determină pe BC , respectiv, punctele N și P . Fie P' simetricul lui P față de N . Paralela la MP' dusă prin P taie dreapta MN în Q . a) Să se arate că patrulaterul $MPQP'$ este paralelogram. b) Să se calculeze lungimile laturilor și diagonalele paralelogramului $MPQP'$. c) Prelungirea dreptei NM întâlnește tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC , în punctul T . Să se arate că triunghiurile ATM și ABC sînt asemenea.

$$R. b) MP = QP' = 2; PQ = P'M = \sqrt{13}; PP' = 3; MQ = 5.$$

39. Fie triunghiul dreptunghic ABD , $m(\angle A) = 90^\circ$, în care sînt date AD de lungime 15 cm și tangenta unghiului B de $3/4$. Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei întâlnește paralela dusă prin B la cateta AD în C și ipotenuza în I . Paralela dusă prin I la AD întâlnește pe AB și CD respectiv în M și N . Să se afle lungimile laturilor și diagonalelor trapezului $ABCD$. b) Să se arate că $[MI] \equiv [IN]$.

$$R. BC = 80/3 \text{ cm}; AB = 20 \text{ cm}; BD = 25 \text{ cm};$$

$$CD = 5\sqrt{139}/3 \text{ cm}; AC = 33\frac{1}{3} \text{ cm}.$$

40. Într-un trapez $ABCD$ raportul dintre lungimile bazei mici și bazei mari este de $1/3$, iar înălțimea este de 6 cm. Laturile neparalele prelungite se întîlnesc în punctul F . Să se afle distanța de la acest punct la fiecare bază.

$$R. 3 \text{ cm}; 9 \text{ cm}.$$

41. Fie paralelogramul $ABCD$ în care $AB=2 \cdot BC$ și $m(\angle A)=60^\circ$. Notăm cu M mijlocul laturii CD . Dreapta AM intersectează diagonala DB în E . a) Să se demonstreze că triunghiul BCM este echilateral. b) Să se arate că $ABDM$ este un trapez înscris în cercul de diametru AB . c) Să se arate că triunghiurile ADB și AMB sînt dreptunghice congruente. d) Dacă $DB=5\sqrt{3}$ cm, să se afle perimetrul triunghiului DEM .

R. d) $\frac{5}{3}(3+2\sqrt{3})$ cm.

42. Fie cercul de centru O și rază R în care se construiește diametrul CD și perpendiculara în P (mijlocul lui OD) pe CD intersectează cercul în A și B . a) Să se arate că coarda AD este egală ca lungime cu raza R . b) Să se arate că $AP=\frac{BC}{2}$. c) Să se arate că $AD+PD=PC$. d) Să se calculeze raportul $\frac{BC}{AD}$. e) Să se arate că $(\sin \angle PCB)^2 + (\sin \angle PDA)^2 = 1$. f) Dacă M este mijlocul lui BC și E este proiecția lui P pe AD , atunci punctele M , P și E sînt coliniare.

R. d) $\frac{BC}{AD}=2$.

43. Se dă ecuația: $(5x-6)^{371} \cdot (6x-7)^{370} \cdot (7x-8)^{369} = 1$ și mulțimea $A = \{2; 3; 1; 4\}$. Care din valorile lui x , $x \in A$ sînt soluții ale ecuației date ?

44. Se consideră un triunghi ABC în care $AB+AC=12$ cm și $m(\angle BAC)=48^\circ$. Fie D simetricul punctului B față de dreapta AC și E simetricul punctului C față de dreapta AB . a) Să se afle lungimea liniei frînte EAD . b) Să se afle măsura unghiului EAD . c) Cîte grade trebuie să aibă unghiul ACB pentru ca semidreptele AE și AD să fie în prelungire ?

R. 12 cm; 144° ; 60° .

45. Prin vîrfurile A al unui triunghi isoscel $[AB] \equiv [AC]$ se duce o dreaptă (D) care taie pe BC în M și cercul circumscris triunghiului în N . Să se arate că: a) triunghiurile ABM și MCN sînt asemenea; b) AB este medie geometrică a segmentelor AM și AN ;

c) $\frac{AM}{NA} = \left(\frac{CM}{CN}\right)^2$ și $\frac{AM \cdot AN}{CN^2} = \left(\frac{MB}{MN}\right)^2$.

46. Se consideră triunghiul oarecare ABC . Fie M un punct oarecare în interiorul segmentului BC . Perpendicularele în B și C respectiv pe BC taie perpendiculara dusă în A pe AM respectiv în B' și C' . Să se arate că triunghiurile ABC și $B'MC'$ sînt asemenea.

47. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB=c$ cm și $AC=b$ cm. Notăm cu O mijlocul laturii BC . Paralelele la AO duse respectiv prin B și C întîlnesc perpendiculara din A pe AO respectiv în B' și C' .

a) Să se arate că AC este bisectoarea unghiului OCC' iar AB bisectoarea unghiului OBB' .

b) Să se arate că AB' este medie proporțională între segmentele CC' și BB' . Care

triunghiuri formate sînt asemenea între ele ?

c) Să se calculeze perimetrul patrulaterului $B'BCC'$ în cazul în care $AB=12$ cm și $AC=18$ cm.

R. c) 59,2 cm.

48. Se dă $f(x)=8:\left(\sqrt{\frac{245}{5}}\cdot\frac{4}{7}-x\right)$. Să se determine mulțimea M , unde $M=\{x|x\in\mathbb{Z} \text{ și } f(x)\in\mathbb{Z}\}$.

R. $M=\{+12; +8; +6; +5; +3; -12; 0\}$.

49. În triunghiul ABC , măsurile unghiurilor sînt proporționale cu numerele 2, 3, 13.

a) Să se calculeze măsurile unghiurilor și să se construiască triunghiul știind că latura $AB=12$ cm. b) În acest triunghi se duce bisectoarea unghiului ABC și înălțimea din A , care se întîlnesc în punctul D . Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ADB . c) Fie F simetricul punctului A față de dreapta BC . Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABF . d) Să se arate că triunghiul ABC este echivalent cu triunghiul BCF .

R. a) $20^\circ; 30^\circ; 130^\circ$; b) $15^\circ; 60^\circ; 105^\circ$;

c) echilateral; $l=12$ cm.

50. Din punctul P exterior cercului (O) , se duc tangentele PA și PB astfel că triunghiul PAB este echilateral. a) Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului $PAOB$ și să se exprime perimetrul lui în funcție de raza R a cercului (O) . b) Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului PAB este egal cu cercul (O) și apoi să se facă construcția grafică a întregii figuri (folosind numai compasul și rigla negradată).

R. $60^\circ; 120^\circ; 2R(\sqrt{3}+1)$.

51. Se consideră două cercuri tangente-exterioare în A . Notăm cu O_1 și O_2 centrele celor două cercuri și cu R și r razele lor ($R>r$). Fie apoi B și C punctele de contact ale unei tangente comune exterioare și O mijlocul segmentului BC . Paralela dusă prin O_2 la BC taie raza O_1B în D . a) Să se arate că patrulaterul BCO_2D este dreptunghi și să se deducă apoi că avem $BC=2\sqrt{Rr}$. b) Să se arate că triunghiurile ABC și OO_1O_2 sînt dreptunghice și asemenea între ele. c) Folosind asemănarea precedentă să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC în funcție de razele R și r ale celor două cercuri. d) Aplicație numerică $R=9, r=4$.

R. d) $AB=\frac{36\sqrt{13}}{13}, AC=\frac{24\sqrt{13}}{13}; BC=12$.

52. Se dă $f(x)=\frac{9}{x+1}, x\in\mathbb{Z}$. Să se determine mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}|f(x)\in\mathbb{Z}\}$.

R. $A=\{-10; -4; -2; 0; 2; 8\}$.

53. Fie M un punct pe diagonala AC a trapezului $ABCD$ (AB baza mare) și MP, MN paralele duse la AB , respectiv AD . ($N\in DC$ și $P\in BC$.) a) Să se arate că unghiurile CNP și ABD sînt congruente. b) Paralela din N la BC taie pe BD în R . Să se arate că punctele B, N și mijlocul Q al segmentului RP sînt coliniare. c) Care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$ astfel ca să aibă loc relația $NP=\frac{2}{3}DB$?

R. c) $\frac{MC}{MA}=2$.

54. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care $m(\angle ABC) = 150^\circ$ și diagonala BD este perpendiculară pe AB . Fie E proiecția lui C pe AD și F intersecția laturii BC cu cercul circumscris triunghiului DEC , având centrul O . b) Să se arate că punctele E, O, F sînt coliniare. c) Să se arate că BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului DEC . d) Să se demonstreze că $BD^2 = BF \cdot AD$. e) Dacă $AB = 2a$, ($a > 0$), să se calculeze perimetrul patrulaterului $BDEF$.

R. e) $2a(\sqrt{3} + 1)$.

55. Fie mulțimile M, N, P, Q între care există relațiile: $M \subset N$; $N \subset P$; $P \subset Q$; $Q \subset M$. Să se arate că $M = N = Q$.

56. Mulțimea M are ca elemente divizorii numărului de 2 cifre (cel mai mic) $x \in \mathbb{N}$ egal cu $\frac{4}{7}$ din răsturnatul său, iar mulțimea N are ca elemente divizorii numărului de 2 cifre $y \in \mathbb{N}$ egal cu $\frac{2}{9}$ din răsturnatul său. Să se determine $(M \cap N)$.

R. 4.

57. Într-un romb latura este medie proporțională (geometrică) a diagonalelor. Să se afle măsura unghiului ascuțit.

R. 30° .

58. a) Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic isoscel raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$. b) Reciproc, dacă într-un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$, triunghiul este isoscel. Demonstrați. c) Fie b și c catetele, iar a ipotenuza unui triunghi dreptunghic $b = c$. Raportul $\frac{b+c}{a}$ poate fi mai mare decît $\sqrt{2}$? De ce? Să se înlocuiască în propoziția următoare punctele prin: "egal", "cel puțin egal", "cel mult egal". Într-un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este ... cu $\sqrt{2}$.

59. Într-un cerc cu diametrul BC se duce o rază $OA \perp BC$ (O este centrul cercului) și se ia un punct oarecare M situat pe același cerc. Să se spună care linie frîntă are lungimea mai mare: BAC sau BMC ?

60. Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M și N situate de o parte și de alta a lui BC . Cum trebuie alese punctele M și N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cît mai mare? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

61. Se dau segmentele AB și CD . Să se determine un punct M , astfel încît:

$$m(\angle AMB) = m(\angle CMD) = 90^\circ. \text{ Discuție.}$$

Indicație: Se consideră semicercurile care au ca diametru segmentele date.

62. Fie mulțimile: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x+2} \in \mathbb{Z}\}$. $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{8}{x-2} \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine $(M \cup P) \cap P$.

R. $M \cup P = \{0, 1, 4, 6, 10, 3\}$, $(M \cup P) \cap P = \{0, 1, 4, 3, 6, 10\}$.

63. Să se arate că dacă un triunghi are măsurile unghiurilor proporționale cu numerele 5, 4, 9 atunci triunghiul este dreptunghic.

Indicație: se ține seamă că dacă suma a două unghiuri dintr-un triunghi este egală cu măsura unghiului al treilea, triunghiul este dreptunghic.

64. În paralelogramul $ABCD$, M și N sînt mijloacele laturilor opuse AD și BC . Să se arate că BM și ND împart diagonală AC în trei părți egale.

Indicație: se aplică proprietatea liniei mijlocii în triunghi.

65. Se dă triunghiul ABC în care $m(\angle CAB) = 60^\circ$. Înălțimile BB' și CC' se intersectează în H , iar bisectoarea unghiului CAB intersectează cele două înălțimi BB' și CC' în O și E . Să se demonstreze că $\triangle OEA$ este echilateral.

66. În dreptunghiul $ABCD$, bisectoarea unghiului B și diagonală ce pleacă din acest vîrf, fac între ele un unghi de 15° . Bisectoarea întâlnește diagonală AC în P , latura DC în E iar pe AD în M . Să se arate că $\triangle DEM$ este isoscel.

67. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Fie E piciorul perpendicularei dusă din A pe diagonală BD . Se prelungește AE cu segmentul $[EF] \equiv [AE]$. Să se arate că $\triangle AFB$ este isoscel și $\triangle DBF$ este triunghi dreptunghic.

68. Se dă triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$. Se prelungește BA cu segmentul $[AM] \equiv [AB]$. Pe latura AC se ia un punct D astfel ca $AD = \frac{AC}{3}$. Fie O mijlocul lui BC . Să se arate că: a) $MC \perp BC$; $\triangle AOD \sim \triangle DCM$; c) M, D, O sînt coliniare.

IV. CLASA a VIII-a

ALGEBRA

IV.1. SUME ALGEBRICE

1. $(-7ab) + (6ab) + (-2ab) + (-3ab) + (-ab)$. R. $-7ab$.
2. $(-7a^2b) + (8a^2b) + (-2a^2b) + (a^2b)$. R. 0.
3. $(-10a^2b) + (-5a^3) + (-12a^2b) + (5a^3) + (21a^2b)$. R. $-a^2b$.
4. $2ab^3 + (-7ab^3) + (+3ab^3) + (-ab^3)$. R. $-3ab^3$.
5. $2ab^4 + (-3ab^4) + (-5a^2b^3) + (-3ab^4) + (+3a^2b^3)$. R. $-4ab^4 - 2a^2b^3$.
6. $\left(-\frac{3}{4}ab\right) + \left(+\frac{2}{3}a^2b\right) + (+ab) + \left(-\frac{5}{6}a^2b\right) + \left(-\frac{1}{2}ab\right)$. R. $-\frac{1}{4}ab - \frac{1}{6}a^2b$.
7. $7ax^2 - 3by + 5a - 2ax^2 - 7a$. R. $5ax^2 - 3by - 2a$.

$$8. a^3 + 2ab^2 - a^2b + ab^2 - 2a^2b - b^3.$$

$$R. a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3.$$

$$9. x^3 - ax^2 + a^2x + ax^2 - a^2x + a^3.$$

$$R. x^3 + a^3.$$

$$10. \frac{3}{5}a + 2ay - \frac{7}{2}ay + 4a.$$

$$R. \frac{23}{5}a - \frac{3}{2}ay.$$

$$11. \frac{3}{2}a^2b + 4b^2x - 5a^2b - \frac{5}{2}b^2x.$$

$$R. \frac{3}{2}b^2x - \frac{7}{2}a^2b.$$

$$12. 2,3m^2n - 5an + 4m^2n - 1,7an.$$

$$R. 6,3m^2n - 6,7an.$$

$$13. 0,7ax - 0,04ax - 0,2ax - 0,16ax.$$

$$R. 0,3ax.$$

$$14. \frac{0,5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + x^2 + \frac{0,3}{4}x + 5.$$

$$R. \frac{2,5}{2}x^2 - \frac{5,7}{4}x + 5.$$

$$15. \frac{2}{0,5}bxy - \frac{0,3}{2}x^2y - 0,7x^2y - \frac{7}{2}bxy.$$

$$R. 0,5bxy - 0,85x^2y.$$

$$16. \frac{1}{0,2}x + 0,3x - \frac{0,5}{2}x - 0,13x - 0,02x.$$

$$R. 4,9x.$$

$$17. 0,3y - \frac{0,7}{2}y + \frac{3}{0,2}x - \frac{5}{4}x + y.$$

$$R. \frac{1,9}{2}y + \frac{11}{0,8}x.$$

$$18. \frac{5}{3}ax + \frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}ax - \frac{3}{2}ax.$$

$$R. 0.$$

$$19. \frac{2}{5}by - \frac{5}{2}by + by + 1,1by.$$

$$R. 0.$$

$$20. 7a^2b - 11\frac{2}{3}a^2b + 3\frac{1}{2}a^2b - 2\frac{5}{6}a^2b.$$

$$R. -4a^2b.$$

$$21. 0,27ab^2 + 0,23ab^2 - \frac{2}{5}ab^2 + \frac{1}{2}ab^2.$$

$$R. 0,6ab^2.$$

$$22. -1,25a^3 + \frac{3}{4}a^3 + 2,5a^3 - \frac{2}{3}a^3.$$

$$R. 1\frac{1}{3}a^3.$$

$$23. 3(a+b)^2 + 7(a+b)^2 + (a+b)^2.$$

$$R. 11(a+b)^2.$$

$$24. 4(a-b)^2 + 2(a-b)^2 + (a-b)^2.$$

$$R. 7(a-b)^2.$$

$$25. 5(a-b)^3 + 7(a-b)^3 + (a-b)^3.$$

$$R. 13(a-b)^3.$$

$$26. 2(a+b)^3 + 7(a+b)^3 + (a+b)^3.$$

$$R. 10(a+b)^3.$$

$$27. 15a^3b^2 - (+8a^3b^2).$$

$$R. 7a^3b^2.$$

$$28. 0,75a - (-1,25a).$$

$$R. 2a.$$

$$29. -4a^2 - (-2,5a^2).$$

$$R. -1,5a^2.$$

30. $-0,2x^a - (+0,05x^a)$. R. $-0,25x^a$.

31. $6,3a^3b^2c - \left(+\frac{11}{2}a^3b^2c \right)$. R. $0,8a^3b^2c$.

32. $-21x^2 - (-7x^2 + 2) - 8 + 10 + 14x^2$. R. 0.

33. $(a + 2b - 6a) - (3b - 6a + 6b)$. R. $a - 7b$.

34. $a - [b - (c - d)]$. R. $a - b + c - d$.

35. $(x + y - z) - (x - y + z) + (-x + y + z) + (x + y - z)$. R. $2(2y - z)$.

36. $4x^3 - 2x^2 + x + 1 - (3x^3 - x^2 - x - 7) - (x^3 - 4x^2 + 2x + 8)$. R. $3x^2$.

37. $5a + \{3b + [6c - 2a - (a - c)]\} - [9a - (7b + c)]$. R. $-7a + 10b + 8c$.

38. $x + (y - x) - (y - z)$. R. z .

39. $(a + b - c) - (-b + 3c)$. R. $a + 2b - 4c$.

40. $44x + 48y - (6z + 3y - 7x) + 4z - [48y - 8x + 2z - (4x + y)]$. R. $63x - 2y - 4z$.

41. $(5a^2 - 3ax + x^2) - 4a^2 + 5ax + (3a^2 - 7ax + 5x^2) - 7x^2$. R. $4a^2 - 5ax - x^2$.

42. $(6x^2 - 3x + 8) - (4x^2 - 3x + 1) - (2x^2 + 7)$. R. 0.

43. $(a - b) - (b + c - d) + (b + c - d) + (2b - a)$. R. b .

44. $\left(\frac{4}{5}ab + \frac{1}{7}bc - \frac{2}{3}ac \right) - \left(-\frac{4}{5}ab + \frac{3}{14}bc - \frac{1}{5}ac \right)$. R. $ab - \frac{1}{14}bc - \frac{7}{15}ac$.

45. $\left(\frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{2}{3}x^2 \right) - \left(-\frac{3}{4}a^2x + \frac{1}{3}ax^2 - \frac{5}{8}x^2 \right)$. R. $\frac{5}{4}a^2x - \frac{1}{12}ax^2 + \frac{31}{24}x^2$.

46. Un elev depune la C.E.C. o sumă C în cele trei luni consecutive de la începutul anului. În luna I scoate a lei, în a II-a b lei și în a III-a c lei. Ce sumă i-a mai rămas după trei luni ?

R. $C - a - b - c$.

47. Să se exprime că într-un triunghi o latură este mai mare ca diferența celorlalte două.

R. $a > b - c$ sau $b > c - a$ sau $c > a - b$.

48. Suma măsurilor unui triunghi fiind de 180° , să se exprime măsura unghiului C , cunoscând măsurile celorlalte două A și B .

$$R. m(\angle C) = 180^\circ - m(\angle A) - m(\angle B).$$

49. Insemnând cu $2p$ perimetrul unui triunghi ale cărui laturi sînt a, b, c , să se exprime valoarea laturii b în funcție de perimetru și celelalte două laturi.

$$R. 2p - (a + c) = 2p - a - c.$$

50. Un elev are o sumă de bani C din care cheltuiește într-o zi a lei, în altă zi 28 lei și în alta o sumă cît diferența dintre cele două zile. Să se exprime suma rămasă.

$$R. C - a - 28 - (a - 28) = C - 2a.$$

IV.2. ÎNMULȚIREA UNUI POLINOM CU UN MONOM

$$51. (m - n + p) \left(-\frac{5}{6}a \right).$$

$$52. (-5b^2 + 2bc^2 - 4cd) \cdot \frac{1}{2}b^2c^3.$$

$$53. (-2a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4)(-4ab).$$

$$54. 13a^3x^3(-4a^2x + 5a^3x^3 - 3ax^2).$$

$$55. \frac{1}{2}mn^3 \left(\frac{5}{3}m^2 - \frac{2}{3}m^2n + \frac{3}{4}mn^2 \right).$$

$$56. (6a + 2b - 8c)7a.$$

$$57. (-5a^2 + 3ab - 8b^2)(-9ab).$$

$$58. (4a^3 - 5ax - 1) \cdot 7ax^2.$$

$$59. (ax - 5b - 2ab)3a^2b.$$

$$60. (2a^3b^2 - 4ab^2c + 3x - 2a) \cdot abx.$$

$$61. (4m - 2x - 3ab + 9mn)2a^2m^3b.$$

$$62. 2ab^2xy^3(2ax^2y - 3bxy^2 + axyz - 5ab^2).$$

$$63. (a - b + cn - an^2bc)3a^2b^3cn^2.$$

IV.3. ÎNMULȚIREA A DOUĂ POLINOAME

$$64. (x^2 - 3x - 7)(x - 2).$$

$$R. x^3 - 5x^2 - x + 14.$$

$$65. (a^2 - 3x - 7)(a^2 - 1).$$

$$R. a^4 - 3a^2x - 8a^2 + 3x + 7.$$

$$66. (a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)(a + 2b).$$

$$R. a^5 + 32b^5.$$

67. $(a^m - b^p - 2c^n)(2a^m - 3b)$. R. $2a^{2m} + 2a^m b^p - 4a^m c^n - 3a^m b - 3b^{p+1} + 6bc^n$.
68. $\left(\frac{5}{2}x + 1\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$. R. $\frac{5x^2}{2} + \frac{13x}{3} + \frac{4}{3}$.
69. $(x^2 + y^2 - xy)(y^2 + x^2 + xy)$. R. $x^4 + x^2 y^2 + y^4$.
70. $(a + b - c)(a - b + c)$. R. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$.
71. $(a + 4b - c)(a - 4b + c)$. R. $a^2 - 16b^2 + 8bc - c^2$.
72. $(a^4 + a^3b + a^2b^2)(a - b)$. R. $a^2(a^3 - b^3)$.
73. $(a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3)(a - x)$. R. $(a - x)^4$.
74. $(5a^2 + ab - 3b^2)(3a^2 - 2ab + b^2)$. R. $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$.
75. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$. R. $a^6 - b^6$.
76. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$. R. $x^6 - a^6$.
77. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$. R. $a^6 - b^6$.
78. $(y^4 - 2y^3 + y^2 - 4y - 11)(y^2 - 2y + 3)$. R. $y^6 - 4y^5 + 8y^4 - 12y^3 + 10y^2 - 33y$.
79. $(3x^3 - 8x^2 + 4x - 4)(2x^2 - 4x - 1)$. R. $6x^5 - 28x^4 + 37x^3 - 16x^2 + 12x + 4$.
80. $(4x^2 - 12xy + 9y^2)(2x + 3y)(4x^2 + 12xy + 9y^2)(2x - 3y)$. R. $64x^6 - 432x^4y^2 + 972x^2y^4 - 729y^6$.
81. $[2x - y - (x + 2y)][3x - 2y - (2x - 3y)]$. R. $x^2 - 2xy - 3y^3$.
82. $3(x - y)^2(x + y) - 3(x + y)^2(x - y)$. R. $6y(y^2 - x^2)$.
83. $(2a - b)[(4a + b)a + b(a + b)]x^2$. R. $x^2(8a^3 - b^3)$.
84. $(a - b)^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)(a - b)^2 + 3(a - b)(a + b)^2$. R. $8a^3$.

IV.4. ÎMPĂRȚIREA UNUI POLINOM CU MONOM

Să se efectueze următoarele împărțiri:

85. $(8ab^4 - 6a^2b^3 + 4a^3b^2) : 2ab$. R. $4b^3 - 3ab^2 + 2a^2b$.
86. $(6a^2x^3y^2 - 12a^4x^2y^3 - 9a^3x^2y^3) : (-3a^2x^3y^2)$. R. $-2x + 4a^2y + 3axy$.

87. $(3a^4x^2 - 5a^3x^3 + 6a^2x^4) : 2a^4x^4$. R. $\frac{3}{2x^2} - \frac{5}{2ax} + \frac{3}{a^2}$
88. $-(6b^5 + 4b^3 - 5ab^2) : 4b^3$. R. $-\left(\frac{3}{2}b^2 + 1 - \frac{5}{4}\frac{a}{b}\right)$
89. $(-5x^3y^2 - 6x^2y^2 - x^4y^4) : (-x^2y^3)$. R. $\frac{5x}{y} + \frac{6}{y} + xy$
90. $(4a^3b^3 - 6a^3b^2 + 2a^2b) : 2a^2b$. R. $2ab^2 - 3ab + 1$
91. $(4a^7x^5 - 24a^6x^6 + 36a^5x^7) : (4ax)$. R. $a^4x^4(a - 3x)^2$
92. $(25a^2 - 10a + 1) : (5a - 1)$. R. $5a - 1$
93. $(8a^4b^2 - 6a^3b^3 + 4a^2b^4 - 2a^2b^2) : (-2a^2b^2)$. R. $-4a^2 + 3ab - 2b^2 + 1$
94. $-(15a^4x^2 - 20a^3x^3 + 5a^2x^4) : (-5a^2x^2)$. R. $3a^2 - 4ax + x^2$
95. $(4m^3 + 6m^2 - m) : \left(-\frac{1}{2}m\right)$. R. $-8m^2 - 12m + 2$
96. $\left(-4m^5n^2 - \frac{4}{9}m^4n^5 + \frac{2}{3}m^3n^6\right) : \frac{2}{3}m^3n^2$. R. $-6m^2 - \frac{2}{3}mn^3 + n^4$
97. $\left(\frac{3}{4}a^6x^3 + \frac{6}{5}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3$. R. $\frac{5}{4}a^5 + 2a^2x - \frac{3}{2}x^2$
98. $(p^4 + 4p^3 - 6p^2 - 8p) : (-0,2p)$. R. $-5p^3 - 20p^2 + 30p + 40$

IV.5. ÎMPĂRȚIREA A DOUĂ POLINOAME

99. $(6a^4 + a^2x - 15x^2) : (2a^2 - 3x)$. R. $3a^2 + 5x$
100. $(6x^2 - 2xy^2 - 28y^4) : (2x + 4y^2)$. R. $3x - 7y^2$
101. $(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$. R. $2x^2 - 5x - 7$
101. $(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$. R. $2x^2 + 5x - 7$
102. $(3a^5 + 5a^4b - 33a^3b^2 + 14a^2b^3) : (a^2 + 7ab)$. R. $3a^3 - 16a^2b + 79ab^2 - 539b^3$, rest $3773ab^4$
103. $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2)$. R. $a^2 - 4ab + 6b^2$
104. $(14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4) : (2a^2 - 3ab + 2b^2)$. R. $7a^3 - 3a^2b - ab^2$

105. $(6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7) : (2a^2b^2 - 3ab^3 + 4b^4)$.
R. $3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3$.
106. $(10a^5b - 21a^4b^2 - 56ab^5 - 3a^2b^4 - 10a^3b^3) : (8b^3 - 3ab + 5a^2b)$.
R. $2a^3 - 3a^2b - 7ab^2$.
107. $\left(x^4 - \frac{13}{6}x^3 + x^2 + \frac{4}{3}x - 2\right) : \left(\frac{4}{3}x - 2\right)$.
R. $\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.
108. $(27x^5 - 9x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 14x + 6) : (9x^3 - 6x^2 + 8x - 6)$.
R. $3x^2 + x - 1$.
109. $(a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4) : (a^2 - 2ab + 3b^2)$.
R. $a^2 + 2ab + 3b^2$.
110. $(12 - 22x + 2x^2 - 9x^4 + 27x^5) : (9x^3 + 8x - 6x^2 - 6)$.
R. $3x^2 + x - 2$.
111. $(3x^2 - 14x + 15) : (x - 3)$.
R. $3x - 5$.
112. $(4x^5 - 5ax^4 - 20a^2x^3 - 5a^3x^2 + 6a^4x) : (x^3 - 2ax^2 - 3a^2x)$.
R. $4x^2 + 3ax - 2a^2$.
113. $(x^5 + a^5) : (x + a)$.
R. $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$.
114. $(x^5 - a^5) : (x - a)$.
R. $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$.
115. $(x^6 - 7^6) : (x + 7)$.
R. $x^5 - 7x^4 + 7^2x^3 - 7^3x^2 + 7^4x - 7^5$.
116. $(x^5 + 1) : (x - 1)$.
R. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; rest 2.
117. $(6x^5 - 28x^4 + 37x^3 - 16x^2 + 12x + 4) : (3x^3 - 8x^2 + 4x - 4)$.
R. $2x^2 - 4x - 1$.
118. $(15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4) : (3a^2 + b^2 - 2ab)$.
R. $5a^2 + ab - 3b^2$.

IV.6. EXERCITII PENTRU APLICAREA FORMULELOR DE CALCUL PRESCURTAT

119. $\{[3x^2y^2 - 3x^2 : (-3) - x^2 + 2y^2] \cdot (3y^2x^2 - 2y^2)\}^2 + 72x^4y^8 - 17y^8 : (9x^4y^4 - y^4)$
R. $x^4y^4 + y^4$.
120. $\{[(12x^2y - 8)(3x^2y + 2) : 4 + 4 - x^2]^2 + 18x^6y^2 - 2x^4\} : (9x^4y^2 - x^2) - 9x^4y^2 - 1$.
R. $x^2 - 1$.
121. $\left[\left(\frac{4x^2}{9} - 1\right) : \left(\frac{2x}{3} + 1\right) - \frac{2x}{3} - x^2 + 2x\right] : [-(x - 1)]$.
R. $x - 1$.
122. $\{[(36x^4 - 100x^2y^2) : (12x^3 + 20x^2y)]^2 + 30xy - 26y^2\} : (3x - y)$.
R. $3x + y$.

123. $\left\{ \left[(0,625x^2 - 4) \left(\frac{5x^2}{8} + 4 \right) - \frac{24x^4}{64} \right]^2 + \frac{x^4}{2} - 256 \right\} : \frac{x^4}{8^2}.$ **R.** $\frac{x^4}{64}.$
124. $[(6x^3 - 9x^2)(2x^2 + 3xy) : 3x^3 + 9y^2 - 4xy + y^2 - 1] : (2x - y + 1) + y.$ **R.** $2x - 1.$
125. $\left\{ \left[\left(\frac{2a}{5} - 1 \right) \left(\frac{2a}{5} + 1 \right) : 0,04 : (2a - 5) \right]^2 - 25 \right\} : (a + 5) : a^2.$ **R.** $\frac{4}{a}.$
126. $\{[(a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3) : (a^2 - b^2)(a^2 - ab)]^2 + 2a^6b^2 - 2a^4b^4\} : (a^4 - a^2b^2).$ **R.** $a^2(a^2 + b^2).$
127. $\{[(x^5 - a^5) : (x - a) - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - 2a^4] : (x - a) - ax^2 - a^2x\} : (x + a).$ **R.** $x^2 - ax + a^2.$
128. $\{[(3 - 6x^2 + 4x^4 - x^6) : (3 - 3x^2 + x^4)(1 + x^2)]^2 - x^2\} : (1 - x - x^4).$ **R.** $1 - x^4 + x.$
129. $\{[(3x^4 + 12x^3y + 12x^2y^2) : 3x^2 - 2xy - 4y^2]^3 - 12x^4y^2 - 6x^5y\} : (x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2).$ **R.** $x(x + 2y).$
130. $\{[(16x^3 - 2) : (2 + 4x + 8x^2)]^3 - 8x^3 + 28x^2 - 14x + 2\} : (4x - 1).$ **R.** $4x - 1.$
131. $\{[(20x^2y^4 - 45) : 5 : (2xy^2 + 3)]^2 - 4x^2y^4 + 9x^2 + 4y^4 - 9\}^3 : (3x - 2y^2)^3 + 54x^2y^2 - 36xy^4.$ **R.** $27x^3 - 8y^6.$
132. $\{[(1 - x^3)(1 + x) : (x^2 + x + 1)]^2 + 4x^2 + x^5 + x^3\} : (x^3 + x^2 + 1).$ **R.** $1 + x^2.$
133. $\{[(a^3 - 2a^2 + 2a - 4) : (a^2 + 2)]^2 + a^3 + 5a^2 + 16a + 4\} : (a + 2)^2(a - 2) + 4.$ **R.** $a^2.$
134. $[(18a^4x + 3a^2x^2 - 45x^3) : (6a^2x - 9x^2) \cdot (3a^2 - 5x)]^2 + 450a^4x^2 - 80a^8 - 624x^4.$ **R.** $(x^4 + a^8).$
135. $\{[(24x^4 - 3x) : (6x^2 - 3x) + 2x] : (2x + 1)\}^3 - 6x(2x + 1) : (2x + 1) - 2x.$ **R.** $(2x - 1)^2.$
136. $[(2x + 54x^4) : (2x + 6x^2) - 3x] \cdot (1 - 3x)^3 : (1 - 3x)^6 - \frac{1}{1 - 3x}.$ **R.** $0.$
137. $\left\{ \left[(27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3) : (9a^2 + 6ab) - \frac{4b^2}{3a} \right] \cdot (3a + 4b)^2 - 108a^2b - 144ab^2 \right\} : (3a + 4b) - 12ab.$ **R.** $(3a - 4b)^2.$
138. $\{[(15 - 3x^3 + 5x^2 - 9x) : (5 - 3x) \cdot (x^2 - 3)]^2 + 18x^4 - 80\}^3 - x^{24} - 3x^{16}.$ **R.** $3x^8 + 1.$
139. $\{[(1 + 2m^2 - m + m^4 - m^3) : (1 + m^2 - m) + 2m]^2 - 1\} : (m^2 + 2m + 2) + 1.$ **R.** $(m + 1)^2.$
140. $\{[(9a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1) : (3a^2 - 2a + 1) - 3a^2]^2 - 4a^2\}^3 + 12a - 48a^2 : (1 - 4a) + 4a.$ **R.** $(1 + 4a)^2.$

141. $\{ \{ [16x^2 - (3x+5y)^2] : (7x+5y) \}^3 + 15x^2y - 75xy^2 \} : (x-5y) + 5xy.$ **R.** $(x+5y)^2.$
142. $[4(x+2)^2 - 9(x-2)^2](x^3 - 1000) : [(10-x)^2(5x-2)] - 10x.$ **R.** $-(x+10)^2.$
143. $[(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3) : (x^2 - x)^2(x^2 - x)^2 - (x^2 + x)^3] : (3x^2 + 1) + x^4 + x^2.$ **R.** $(x^2 + x)^2.$
144. $\{ [(x+6)^3 - (x-6)^3] : (x^2 + 12) - 4(3x-2)^2 \} : (5-3x) + 4x^2 + 5.$ **R.** $(2x+3)^2.$
145. $\{ [(x+2)^2(x^3+8)(x^2-2x+4)(x-2)] : (x^4-4) \} : (x^2-2x+4)^2.$ **R.** $(x+2)^2.$
146. $[(x-1)(x^3-1)(x^2+x+1) - (x^3+1)^2 + 5x^3 - 6x^2 + 12x - 8]$ **R.** $(x-2)^3.$
147. $\{ [(2x/3 - 0,5)^3 + 2x^2/3 - x/2] : (4x^2/9 + x/3 + 1/4) \} \cdot \frac{4x+3}{6} + 1/4.$ **R.** $\frac{4x^2}{9}.$
148. $\left[(3,375x^3 - 8) : \frac{9x^2 + 12x + 16}{4} \cdot \frac{3x+4}{2} \right] + 4 - 3x^2 + x^2.$ **R.** $(3x/2 - x)^2.$
149. $[x^4 + 4 + y^2 + 4x^2 + 2x^2y + 4y - (x^2 - 2 - y)^2] : (2+y) - x^2 + x^3 + 3x + 1.$ **R.** $(x+1)^3.$
150. $\{ x^2/36 + 1 + y^2 + x/3 - xy/3 - 2y - [(0,1(6)x - 1 - y)^2] \} : \frac{x-6}{3}.$ **R.** $2.$
151. $[(x+y-2)(x+y+2)+4](x+y) - (x-y)^3 + x^3 + 12xy^2 + 8y^3 - 2y^3.$ **R.** $(x+2y)^3.$
152. $\{ [(2x+y - \sqrt{2})(2x+y + \sqrt{2}) + 2 - 2(2x+y) + 1] - (2x+y+1)^2 \} : (2x+y).$ **R.** $-4.$
153. $[(x^2 + 2x\sqrt{2} + 2)(x + \sqrt{2}) - 3x^2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 6x^2 + 6x + 8] : (x+2)^2$ **R.** $x+2.$
154. $\left\{ \left[\left(\frac{x-y}{2} \right)^2 - (x-y) + 1 \right] \cdot \frac{4}{(x-y-2)^2} - 4(x-y)^2 \right\} : (1+2x-2y) - 2y + x^2.$ **R.** $(1-x)^2.$
155. $\{ [(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)]^4 : (x^4 + 1) + x^8 - 1 \} : (x^8 + x^4).$ **R.** $x^4 + 3.$
156. $(a+x)^4 - (a-x)^4.$ **R.** $8ax(a^2 + x^2).$
157. $(a^6 + b^2)^2 - 4a^6b^6.$ **R.** $(a^3 + b)^2(a^3 - b)^2.$
158. $4a^6b^4 - (a^6 + b^4)^2.$ **R.** $-(a^3 + b^2)(a^3 - b^2)^2.$
159. $x^4 + x^2y^2 + y^4.$ **R.** $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$

$$160. 3x^4y^4 - x^8 - y^8. \quad \text{R. } (x^2y^2 + x^4 - y^4)(x^2y^2 - x^4 + y^4).$$

$$161. x^8 + x^4 + 1. \quad \text{R. } (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

$$162. 3x^6 - x^{12} - 1. \quad \text{R. } (x^3 + x^6 - 1)(x^3 - x^6 + 1).$$

$$163. \{[(a^6 + 3a^4x^2 - a^3x^3 - 3a^5x - 1)] : [(a^2 - ax)^3 - 1]\} \cdot (a^2 - ax)^2 + 2(a^2 - ax) + 1. \quad \text{R. } (a^2 - ax + 1)^2.$$

$$164. 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2. \quad \text{R. } (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

$$165. \left\{ \left[\left(\frac{\sqrt{588} + 13\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - x^3 \right) : (x^2 + 3x + 9) \right]^3 - 8x^2 \right\} : (27 + x^2).$$

$$166. a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd. \quad \text{R. } (ab - cd + ac + bd)(ab - cd - ac - bd).$$

$$167. a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 + 4abcd. \quad \text{R. } (ac + bd + bc - ad)(ac + bd - bc + ad).$$

$$168. [(x^{m-1} : x^{n-1} \cdot x^{m+n})^3 : x^{6m} - x^6] : (x^2 - 1) - x^2. \quad \text{R. } (x^2 + 1)^2.$$

$$169. (x^{m+2} : x^{m+1} \cdot x^{m-1}) : x^m \cdot x^2 [x - 8] : (x - 2) + 2x^{m+1} : 2x^m - (x + 2)^2. \quad \text{R. } 0.$$

$$170. \text{ Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: } P_1(x) = 6x^6 + 12x^5 - 24x^4 - 48x^3; \quad P_2(x) = 8x^5 + 48x^4 + 96x^3 + 64x^2. \quad \text{R. } 2x^2(x + 2)^2.$$

$$171. \text{ Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: } P_1(x, y) = 280x^4y - 280x^3y^2 + 70x^2y^3; \quad P_2(x, y) = 336x^3y^2 - 42y^5. \quad \text{R. } 14y(2x - y).$$

$$172. \text{ Să se afle cel mai mic multiplu comun al polinoamelor: } x^2 + 2x + 1; x^2 - 1; x + 1. \quad \text{R. } x^3 + x^2 - x - 1.$$

$$173. \text{ Aceeași întrebare pentru polinoamele: } x^3 - 2x^2 + 2x - 1; x^3 + 2x^2 + 2x + 1; x^3 + 1; x^3 - 1; x^2 - 1. \quad \text{R. } x^6 - 1.$$

IV.7. DESCOMPUNEREA IN FACTORI

Să se descompună în factori expresiile:

$$174. 5a^2b + 15a - 5. \quad \text{R. } 5(a^2b + 3a - 1).$$

$$175. 8a^3 - 12a^2b^2 + 4a^2c. \quad \text{R. } 4a^2(2a - 3b^2 + c).$$

$$176. a^3b + a^2b^3 + a^2b. \quad \text{R. } a^2b(a + b^2 + 1).$$

$$177. -10a^3 - 6ab + 2a. \quad \text{R. } -2a(5a^2 + 3b - 1).$$

178. $2m^3 - 4m^5 + 6m^2n + 2m^2$. R. $2m^2(m - 2m^3 + 3n + 1)$.
179. $54a^8b^5 - 42a^5c^3 - 24a^4b^7$. R. $6a^4(9a^4b^5 - 7ac^3 - 4b^7)$.
180. $a^2(a+x) + x^2(a+x)$. R. $(a+x)(a^2+x^2)$.
181. $2p(p-q) + 3q(p-q)$. R. $(p-q)(2p+3q)$.
182. $a(x+1) - 2x(x+1)$. R. $(x+1)(a-2x)$.
183. $2(p-1)^2 - 4q(p-1)$. R. $2(p-1)(p-2q-1)$.
184. $mn(m^2+n^2) - n^2(m^2+n^2)$. R. $n(m^2+n^2)(m-n)$.
185. $4m^2(n^2-2) + 2mn(n^2-2)$. R. $2m(n^2-2)(2m+n)$.
186. $9(b^3+b^2-b) + b^3+b^2-b$. R. $10b(b^2+b-1)$.
187. $2(p-q)^2 - 5q(q-p)$. R. $(p-q)(2p+3q)$.
188. $a(b-1) + c(1-b) - b + 1$. R. $(a-c-1)(b-1)$.
189. $a(2-x^2) + b(x^2-2) - 2 + x^2$. R. $(a-b-1)(2-x^2)$.
190. $(4a-5b)(3m-2p) + (4b-a)(3m-2p)$. R. $(3m-2p)(3a-b)$.
191. $(4a+5b)(3p-2m) - (4b+a)(3p-2m)$. R. $(3p-2m)(3a+b)$.
192. $(5a-2b)(3m+3p) - (2a-7b)(2m+3p)$. R. $(2m+3p)(3a+5b)$.
193. $(2a-5b)(2p+3m) + (3a-7b)(2p+3m)$. R. $(2p+3m)(5a-12b)$.
194. $(7a-3x)(5c-2d) - (6a-2x)(5c-2d)$. R. $(5c-2d)(a-x)$.
195. $ac+ad+bc+bd$. R. $(a+b)(c+d)$.
196. $ac-ad+bc-bd$. R. $(a+b)(c-d)$.
197. $x^3+x^2z+2xz^2+2z^3$. R. $(x^2+2z^2)(x+z)$.
198. $x^3-x^2z+2xz^2-2z^3$. R. $(x-z)(x^2+2z^2)$.
199. $x^3+x^2z-2xz^2-2z^3$. R. $(x^2-2z^2)(x+z)$.
200. a^3+2a^2+2a+4 . R. $(a+2)(a^2+2)$.
201. a^3-2a^2+2a-4 . R. $(a^2+2)(a-2)$.
202. $12x^2y-20y^4+3x^2-5y^3-3x^2y^2+5y^5$. R. $(4y-y^2+1)(3x^2-5y^3)$.
203. $(m^2+4m)^2-4$. R. $(m^2+4m+2)(m^2+4m-2)$.
204. $9-(m+6m)^2$. R. $(3+6m+m^2)(3-6m-m^2)$.
205. $(2a-3b)^2-4b^2$. R. $(2a-5b)(2a-b)$.

206. $9a^2 - (2a + 3b)^2$. R. $(a - 3b)(5a + 3b)$.
207. $16c^2 - (3c + 5d)^2$. R. $(c - 5d)(7c + 5d)$.
208. $(5c - 3d)^2 - 25d^2$. R. $(5c - 8d)(5c + 2d)$.
209. $9(5m - 4p)^2 - 64m^2$. R. $(23m - 12p)(7m - 12p)$.
210. $100m^2 - 9(3m - 2p)^2$. R. $(m + 6p)(19m - 6p)$.
211. $16(n + q)^2 - (39 - n)^2$. R. $(5n + 4q - 39)(3n + 4q + 39)$.
212. $(n + 3q)^2 - 4(q - n)^2$. R. $(5q - n)(q + 3n)$.
213. $m^8 - 6m^4y^3 + 9y^6$. R. $(m^4 - 3y^3)^2$.
214. $4p^{12} - 20p^6z^5 + 25z^{10}$. R. $(2p^6 - 5z^5)^2$.
215. $a^2 + 6a + 9$. R. $(a + 3)^2$.
216. $-30ab^2 + 25b^4 + 9a^2$. R. $(5b^2 - 3a)^2$.
217. $-6a^2b^3 + 1 + 9a^4b^6$. R. $(3a^2b^3 - 1)^2$.
218. $3x + 18x^3y^3 + 27x^5y^6$. R. $3x(1 + 3x^2y^3)^2$.
219. $9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1$. R. $(3x^2 - 2x + 1)^2$.
220. $x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25$. R. $(x^2 + 3x + 5)^2$.
221. $4x^6 - 20x^5 + 25x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 9$. R. $(2x^3 - 5x^2 - 3)^2$.
222. $16 - 4x^2 - 4a^2 + a^2x^2$. R. $(2 - a)(2 + a)(2 - x)(2 + x)$.
223. $3x^2 - 12 + x^2 - 4$. R. $4(x - 2)(x + 2)$.
224. $x^4 - 9x^2 - x^2 + 9$. R. $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.
225. $25a^2 - a^4 - 25b^2 + a^2b^2$. R. $(a - b)(a + b)(5 - a)(5 + a)$.
226. $9a^4 + 45a^2 - 4a^2 - 20$. R. $(3a - 2)(3a + 2)(a^2 + 5)$.
227. $36x - 4xy^2 + 9 - y^2$. R. $(4x + 1)(3 - y)(3 + y)$.
228. $a^2b^2 - 36a^2 + b^4 - 36b^2 - b^2 + 36$. R. $(a^2 + b^2 - 1)(b - 6)(b + 6)$.
229. $a^3b^2 - 100a - a^2b^3 + 100b + a^2b^2c - 100c$. R. $(a - b + c)(ab - 10)(ab + 10)$.
230. $4a - 16ac^2 - a^2 + 4a^2c^2 - 4 + 16c^2$. R. $-(a - 2)^2(1 - 2c)(1 + 2c)$.
231. $3a^6x^{10} + 30a^4x^5y^2 + 75a^2y^4$. R. $3a^2(a^2x^5 + 5y^2)^2$.
232. $36a^{n+2} + 16a^{n-2}b^2 + 48a^nb$. R. $4a^{n-2}(3a^2 + 2b)^2$.
233. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$. R. $(x + y + z)(x + y - z)$.
234. $9 - y^2 - 6yz - 9z^2$. R. $(3 + y + 3z)(3 - y - 3z)$.
235. $25z^2 - 4x^2 + 12xy - 9y^2$. R. $(5z + 2x - 3y)(5z - 2x + 2y)$.

236. $4y^2 - 20yz + 25z^2 - 36$. R. $(2y-5z+6)(2y-5z-6)$.
237. $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$. R. $(a+b)^2(a-b)$.
238. $4a^2m^2 - 64a^2n^2 - m^2 + 16n^2$. R. $(2a-1)(2a+1)(m-4n)(m+4n)$.
239. $3x^5 - 192x - 4x^4 + 256$. R. $(3x-4)(x^2-8)(x^2+8)$.
240. $28x^3 - 8x^2y - 7x + 2y$. R. $(2x+1)(2x-1)(7x-2y)$.
241. $2ac + a^2 + c^2 - b^2$. R. $(a+c-b)(a+c+b)$.
242. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. R. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.
243. $6a^3b + a^2 - 6ab^3 - b^2$. R. $(a+b)(a-b)(6ab+1)$.
244. $8a^3 - 12a^2b - 8a^2 + 12ab + 2a - 3b$. R. $(2a-1)^2(2a-3b)$.
245. $4a^2 - 24a^3 + 48a^4 - 32a^5 - (1-2a)^3$. R. $(2a+1)(2a-1)(1-2a)^3$.
246. $a^2 - (a+b)^2 - 2a^2 - ab$. R. $-(a+b)(2a+b)$.
247. $4x^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2a^2b^2 + b^4$. R. $(2x-a^2)(2x+a^2)$.
248. $x^4 + y^4 - (x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 - (x-y)^2$. R. $2xy(xy+1)$.
249. $4x^4 - y^2 - 4x^2 + 1$. R. $(2x^2-1-y)(2x^2-1+y)$.
250. $4x^3 - 12x^2 + 12x - y^2(x-1)^3$. R. $(2-y)(2+y)(x-1)^3$.
251. $a^4 - b^2(2a-b)^2$. R. $(a-b)^2(a^2+2ab-b^2)$.
252. $a^4 - 16c^2(c-a)^2$. R. $(a-2c)^2(a^2+4ac-4c^2)$.
253. $(a-2b)^2 + 2b(a-2b) + b^2$. R. $(a-b)^2$.
254. $(2a-b)^2 - 2b(b-2a) + b^2$. R. $4a^2$.
255. $(m^2+1)^2 - 4m^2$. R. $(m+1)^2(m-1)^2$.
256. $36m^2 - (m^2+9)^2$. R. $-(m+3)^2(m-3)^2$.
257. $(p+q)^3 - 3(p+q)^2(p-q) + 3(p+q)(p-q)^2 - (p-q)^3$. R. $8q^3$.
258. $ac^2 - ab^2 + b^2c - c^3$. R. $(c+b)(c-b)(a-c)$.
259. $(a-b)(a^2-c^2) - (a-c)(a^2-b^2)$. R. $(a-b)(a-c)(c-b)$.
260. $a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4 + a^4b^2c^2 - a^4c^4$. R. $a^2c^2(b+c)(b-c)(a^2+b^2)$.
261. $a^2 - ab - b - 1$. R. $(a+1)(a-b-1)$.
262. $4(n-2)^2 + 9 + 12(n-2)$. R. $(2n-1)^2$.

IV.8. SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR ALGEBRICE

La începutul acestui capitol se impune, din nou, următoarea recomandare: la toate exercițiile cu fracții algebrice (adică avînd litere la numitor) se va preciza, în primul rînd, mulțimea valorilor cu care se pot efectua operațiile, astfel ca fracțiile să aibă sens.

Să se simplifice:

$$263. \frac{2x^4 - 8x^3y + 8x^2y^2}{x^4 - 2x^3y}. \quad \text{R. } \frac{2(x-2y)}{x}.$$

$$264. \frac{20a^5x^2 + 16a^3bx^2}{75a^4b + 120a^2b^2 + 48b^3}. \quad \text{R. } \frac{4a^3x^2}{3b(5a^2 + 4b)}.$$

$$265. \frac{25ab^2 + 15b^2 - 30bc}{20a^3b + 12a^2b - 24a^2c}. \quad \text{R. } \frac{5b}{4a^2}.$$

$$266. \frac{65x^3y - 60x^2y^2}{39x^2y^3 - 36xy^4}. \quad \text{R. } \frac{5x}{3y^2}.$$

$$267. \frac{12x^5 - 27x^3y^2}{8x^3y - 12x^2y^2}. \quad \text{R. } \frac{3x(2x+3y)}{4y}.$$

$$268. \frac{72a^2b^2c + 16ab^3c - 24ab^2c}{27a^5c^2 + 6a^4bc^2 - 9a^4c^2}. \quad \text{R. } \frac{8b^2}{3a^3c}.$$

$$269. \frac{3x^4c + 5x^3yc - y^2x^3c^2}{2xy^2c^2 - 3x^2y^2c - 5xy^3c}. \quad \text{R. } \frac{-x^2}{y^2}.$$

$$270. \frac{12x^2 - 8xy - 4x(3x - 2y)}{9x^2 + 4y^2 - 12xy}. \quad \text{R. } 0.$$

$$271. \frac{y+5}{7y+xy+35+5x}. \quad \text{R. } \frac{1}{x+7}.$$

$$272. \frac{14x^2 - 7ax + 2xy - ay}{4x^3 - 4ax^2 + a^2x}. \quad \text{R. } \frac{7x+y}{x(2x-a)}.$$

$$273. \frac{ax-6+3x-2a}{ax+6-3x-2a}. \quad \text{R. } \frac{a+3}{a-3}.$$

$$274. \frac{1\frac{1}{8}a^4b^2 - 0,125a^4b^2 - b^2}{a^2b - b}. \quad \text{R. } b(a^2+1).$$

$$275. \frac{3ac^2 + 3bc^2 - 3ab^2 - 3b^3}{6ac^2 + 6bc^2 - 6ab^2 - 6b^3}. \quad \text{R. } \frac{1}{2}.$$

$$276. \frac{\left(\frac{2xy}{3} - 2y^2\right)\left(2xy + \frac{2x^2}{3}\right)}{4xy}. \quad \mathbf{R.} \frac{x^2}{9} - y^2.$$

$$277. \frac{4\left(\frac{3x^2}{4} + 1\frac{1}{2}xy + 0,75y^2\right)}{3x+3y}. \quad \mathbf{R.} x+y.$$

$$278. \frac{18x^4 - 8x^6 : 4x^2 - 1}{(2x-1)(4x^2+1)}. \quad \mathbf{R.} 2x+1.$$

$$279. \frac{\left[(4x^4 - 7x : 14x^2)\left(4x^4 + \frac{1}{2x}\right)\right]^2 - \frac{1}{16x^4}}{32x^{10} - 1}. \quad \mathbf{R.} 8x^6.$$

$$280. \frac{4a^4 - 2a^4 : a^2 - 2a^2 + 1 - b^2}{2a^2 - b - 1}. \quad \mathbf{R.} 2a^2 + b - 1.$$

$$281. \frac{(x^2y + xy^2)^2 - (x+y)^2}{x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + (x+y)^2}. \quad \mathbf{R.} xy - 1.$$

$$282. (x^2 - y^2) : (xz - yz - xy + y^2). \quad \mathbf{R.} (x+y) : (z-y).$$

$$283. \frac{(x^3 - x^2 - 9x + 9)(x^2 - 3x + xy - 3y)}{(x^2 - 4x + 3)(x+y)}. \quad \mathbf{R.} x^2 - 9.$$

$$284. \frac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{(x+y+z)a + (x+y+z)z}. \quad \mathbf{R.} \frac{x+y-z}{a+z}.$$

$$285. \frac{243a^6b^6 - 125b^9a^3}{9a^3b^6(9a^2 + 15ab + 25b^2)}. \quad \mathbf{R.} 3a - 5b.$$

$$286. \frac{[(0,04x^2 - 0,25y^2) : (0,2x + 0,5y)]^2}{2x - 5y} 10. \quad \mathbf{R.} \frac{x}{5} - \frac{y}{2}.$$

$$287. \frac{\sqrt{0,3y^2 + 5y^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{y} - 9y^2 + (2+3y)3y}{2+3y}. \quad \mathbf{R.} 2.$$

$$288. \frac{x^2+y^2+z^2-2xz+2xy-2yz}{x^2-y^2-z^2+2yz}. \quad \text{R. } \frac{x+y-z}{x-y+z}.$$

$$289. \frac{(x+b)^2-(a+c)^2}{(a+x)^2-(b+c)^2}. \quad \text{R. } \frac{x-a+b-c}{x+a-b-c}.$$

$$290. \frac{(ax-x)(x-a)}{a^3x-ax^3-a^2x+x^3}. \quad \text{R. } \frac{-1}{a+x}.$$

$$291. \frac{a^2x^2-x^2b^2+2a^2x-2b^2x+a^2-b^2}{(a-b)(x+1)}. \quad \text{R. } (x+1)(a+b).$$

$$292. \frac{-a^2-ab-ac-bc}{ab+b^2+a(a+b)}. \quad \text{R. } \frac{-(a+c)}{a+b}.$$

$$293. \frac{\left[\left(\frac{3}{5}a-0,625b\right)\left(\frac{5}{8}b+0,6a\right)\right]^2 + \frac{9a^2b^2}{32} - \frac{626b^4}{64^2}}{\left(\frac{3a}{5} - \frac{b}{8}\right)\left(\frac{9a^2}{25} + \frac{b^2}{64}\right)}. \quad \text{R. } \frac{24a+5b}{40}.$$

$$294. \frac{\left(20\frac{1}{25}x^2 - \sqrt{401,6016}\right)\frac{y^2}{501}}{\frac{xy^2-y^2}{5}}. \quad \text{R. } \frac{x+1}{5}.$$

$$295. \frac{\frac{4a^3b^4}{19} : \frac{2}{133ab^2} - 10a^4b^6 - 1}{2a^2b^3+1}. \quad \text{R. } 2a^2b^3-1.$$

$$296. \frac{[(2ab-c)(2ab+c)]^2+8a^2b^2c^2-2c^4}{2ab-c}. \quad \text{R. } (2ab+c)(4a^2b^2+c^2).$$

$$297. \frac{(6x^2y^2-15x^2:5x)(2xy^2+1)}{12x^3y^4-3x}. \quad \text{R. } 1.$$

$$298. \frac{3a^2x^2+3b^2-6abx+9a^2x-9ab}{(a^3x^3-ab^2x)(ax-b+3a)}. \quad \text{R. } \frac{3}{ax(ax+b)}.$$

$$299. \frac{2a^3+3a^2b-2a-3b}{2a^2-2a+3b(a-1)}. \quad \text{R. } a+1.$$

$$300. \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab}\right)a^6b^2 - a^6 - a^5b}{a^4b}. \quad \text{R. } a+b.$$

$$301. \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{ab} + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}(a+b+x) + \frac{x^2+1}{ab}}{abx-ab}. \quad \text{R. } \frac{x-1}{a^2b^2}.$$

$$302. \frac{4a^2y^4 - 4ay^3 + y^2 + (2ay-1)^2}{(y^4-1)(2ay-1)^2}. \quad \text{R. } \frac{1}{y^2-1}.$$

$$303. \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^5 - 2x^3 + x}. \quad \text{R. } \frac{1}{x(x+1)}.$$

$$304. \frac{x^2 + 4 - 4x}{x^3 + 2 - 2x^2 - x}. \quad \text{R. } \frac{x-2}{x^2-1}.$$

$$305. \frac{ax+1-a-x}{ax-1-a+x}. \quad \text{R. } \frac{a-1}{a+1}.$$

$$306. \frac{xy^3 + 2x^2y^2 + x^3y + xy^2(x+y)^2}{xy^2 - x - y(1-y^2)}. \quad \text{R. } \frac{xy(x+y)}{y-1}.$$

$$307. \frac{a^2 - b^2 + ac - bc}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}. \quad \text{R. } \frac{a-b}{a+b-c}.$$

$$308. \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{a^2 + 2ab - c^2 + b^2}. \quad \text{R. } -\frac{a-b-c}{a+b+c}.$$

$$309. \frac{0,125x^2a^2 - a^2 - \frac{x^2b^2}{8} + b^2}{(a+b)(0,125x^2-1)}. \quad \text{R. } a-b.$$

$$310. \frac{ax^2 - a\sqrt{0,0256} + \frac{4b}{25} - x^2b}{(0,4+x)(a-b)}. \quad \text{R. } x - \frac{2}{3}.$$

$$311. \frac{ax^2 + 0,1(6)x^2 - a - \frac{1}{6}}{(x-1)\left(a + \frac{1}{6}\right)}. \quad \text{R. } x+1.$$

312. $\frac{2(x^2+y^2)-4xy+6(x-y)^2}{2(x^2-y^2)(x-y)}.$ **R.** $\frac{4}{x+y}.$
313. $\frac{4x^2+12x+9-2b^2x-3b^2}{2x+3-b^2}.$ **R.** $2x+3.$
314. $\frac{a^3-a^2b-4a+4b}{(a^2-b^2)(a-2)}.$ **R.** $\frac{a+2}{a+b}.$
315. $\frac{4x^2-1}{y(2x+1)-4x-2}.$ **R.** $\frac{2x-1}{y-2}.$
316. $\frac{x^3+bx^2+ax+ab}{x^2-ax+bx-ab}.$ **R.** $\frac{x^2+a}{x-a}.$
317. $\frac{a^4 : 25 - 0,04b^4 - (a^2b^2 - b^4) : 25}{(a^3 - a^2b) : 5}.$ **R.** $\frac{a+b}{5}.$
318. $\frac{\frac{17}{12}x^2 - 1,41(6) - x^2 + 1}{\frac{x-1}{12}}.$ **R.** $5(x+1).$
319. $\frac{ac+ad+bc+bd-a(c+d)}{ac^2-ad^2+bc^2-bd^2}.$ **R.** $\frac{b}{(a+b)(c-d)}.$
320. $\frac{a^2x-a^2-b^2x+b^2}{ax-a+bx-b}.$ **R.** $a-b.$
321. $\frac{a^3-2a^2+9a-18+6a(a-2)}{a^2-2a+3a-6}.$ **R.** $a+3.$
322. $\frac{7+x^3-7x^2-x}{(x-1)(x-7)}.$ **R.** $x+1.$
323. $\frac{(1-ab)^2-(a-b)^2}{a^3b^2-a^5b^2}.$ **R.** $\frac{1-b^2}{a^3b^2}.$
324. $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}.$ **R.** $\frac{1}{3a^2-b^2}.$

$$325. \frac{a^5 - ba^4 - ab^4 + b^5}{a^4 - ba^3 - a^2b^2 + ab^3}. \quad \text{R. } \frac{a^2 + b^2}{a}.$$

$$326. \frac{x^3 + x^2y - x - y}{(x^2 + 2xy + y^2)(x-1)}. \quad \text{R. } \frac{x+1}{x+y}.$$

$$327. \frac{a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + 2ab)(a-b)}. \quad \text{R. } a+b.$$

$$328. \frac{xy(a^2 - b^2) + abx^2 - aby^2}{abx^2 + aby^2 + xy(a^2 + b^2)}. \quad \text{R. } \frac{ax-by}{ax+by}.$$

$$329. \frac{2x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4x^2yz + 2x^2z^2 + 4x^3z}{x^3 - xy^2 - xz^2 - 2xyz}. \quad \text{R. } \frac{2x(x+y+z)}{x-y-z}.$$

$$330. \frac{2(x^2 + y^2) + 4xy - 2z^2}{4z(z+2x) + 4x^2 - 4y^2}. \quad \text{R. } \frac{x+y+z}{2(x-y+z)}.$$

$$331. \frac{2ax^3 + a^2x^2 + x^4 - b^4}{x^2(2b^2 - a^2) + x^4 + b^4}. \quad \text{R. } \frac{x^2 + ax - b^2}{x^2 + b^2 - ax}.$$

$$332. \frac{2b^2 + a^2 - 3ab + ac - 2bc}{2bc + a^2 - b^2 - c^2}. \quad \text{R. } \frac{a-2b}{a+b-c}.$$

$$333. \frac{\frac{x^2(x^2 + a^2)^2}{x^{10} - a^{10}} - \frac{x^{12} + a^{12}}{x^2 - a^2}}{x^4 + a^4}. \quad \text{R. } \frac{1}{a^2}.$$

$$334. \frac{x^3 + y^3}{2(x+y)}. \quad \text{R. } \frac{x^2 - xy + y^2}{2}.$$

$$335. \frac{a^3 + b^3 + (a+b)^3}{2(a+b)}. \quad \text{R. } \frac{2(a^2 + b^2) + ab}{2}.$$

$$336. \frac{(x^2 - y^2)(x^3 - y^3)}{(x-y)(x^3 + y^3)}. \quad \text{R. } \frac{x^3 - y^3}{x^2 - xy + y^2}.$$

$$337. \frac{3x^3 + 24}{2x+4-5(x+2)}. \quad \text{R. } -x^2 + 2x - 4.$$

338. $\frac{x^2-3xy+xz+2y^2-2yz}{x^2-y^2+2yz-z^2}$. R. $\frac{x-2y}{x+y-z}$.
339. $\frac{a^3-3a^2b-b^3+3ab^2+x(a-b)^3}{(1+x)(a^2-2ab+b^2)}$. R. $a-b$.
340. $\frac{a^3x^3+b^3x^3+27(a^3+b^3)}{(x+3)(a+b)}$. R. $(x^2-3x+9)(a^2-ab+b^2)$.
341. $\frac{a^3x^2+b^3x^2+3abx^2(a+b)+(a+b)^3}{a^2x^2+2abx^2+b^2x^2+(a+b)^2}$. R. $a+b$.
342. $\frac{8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3-1}{(2a-3b)^2+2a-3b+1}$. R. $2a-3b-1$.
343. $\frac{a^5+b^5-a^2b^3-a^3b^2}{(a-b^2)(a^2+ab+b^2)}$. R. $a+b$.
344. $\frac{27a^3x+54a^2bx+36ab^2x+8b^3x-(3a+2b)^3}{(x^2-1)(3a+2b)^2}$. R. $\frac{3a+2b}{x+1}$.
345. $\frac{8ax^3+ay^3+8bx^3+by^3}{4x^2-2xy+y^2}$. R. $(2x+y)(a+b)$.
346. $\frac{(x^3-1-3x^2+3x)(x-1)^2(x-1)-1}{(x-1)^3+1}$. R. $(x-1)^3-1$.
347. $\frac{a^3x-a^3y-3a^2x^2+3a^2xy+3ax^3-3ax^2y+x^3y-x^4}{(x-y)(a-x)^2}$. R. $a-x$.
348. $\frac{0,125x^3-1+\frac{x^3y}{8}-y}{0,25(x^2+2x+4)(y+1)}$. R. $\frac{x-2}{2}$.
349. $\frac{0,027x^3+8-\frac{27x^3y^3}{1000}-8y^3}{(0,09x^2-0,6x+4)(y^2+y+1)}$. R. $(1-y)\left(\frac{3x}{10}+2\right)$.
350. $\frac{6a^2b^2-3a^3b-3ab^3+(a-b)(a^3-b^3)}{(b-a)(a^2+b^2-2ab)}$. R. $b-a$.

$$351. \frac{x^3y^2 - x^5y^2 + y^2(1-x^2)}{[(1-xy)^2 - (x-y)^2](x^2-x+1)}.$$

$$R. \frac{y^2(x+1)}{1-y^2}.$$

$$352. \frac{x^4 + ax^3 - a^2x^4}{x^4 - a^4x^4 + 2ax^3 + a^2x^2}.$$

$$R. \frac{x}{x+a+a^2x}.$$

$$353. \frac{a^2+2a+2}{(a+1)^4-1} \cdot \frac{a^2}{a+2}.$$

$$R. \frac{a}{(a+2)^2}.$$

$$354. \frac{x^2+6x+5}{x^3+5x^2-x-5}.$$

$$R. \frac{1}{x-1}.$$

$$355. \frac{x^4-7x^2+6}{(x^2-6)(x+1)}.$$

$$R. x-1.$$

IV.9. OPERAȚII CU FRAȚII ALGEBRICE

$$356. \frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b} + \frac{3a^2+b^2}{2ab}.$$

$$R. \frac{a^2-b^2}{2ab}.$$

$$357. \frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} + 2.$$

$$R. \frac{(a+b)^2}{ab}.$$

$$358. \left(\frac{a+b}{a^2b} + \frac{a-b}{ab^2} + \frac{2ab}{a^2b^2} \right) \cdot \frac{a}{a+b}.$$

$$R. \frac{a+b}{ab^2}.$$

$$359. \frac{1}{(a-b)^2} - \frac{b}{(b-a)^3}.$$

$$R. \frac{a}{(a-b)^3}.$$

$$360. \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-2} + \frac{2x}{x^2+4x+4}.$$

$$R. \frac{x^2-20x-28}{(x+2)^2(x-2)}.$$

$$361. \frac{1}{p-3} - \frac{3}{2p+6} - \frac{p}{2p^2-12p+18}.$$

$$R. \frac{-2p^2+15p-45}{2(p-3)^2(p+3)}.$$

$$362. \frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ac}.$$

$$R. \frac{2(ab+bc+ca)}{abc}.$$

$$363. \left(\frac{c^2-b^2-a^2}{2ab} + 1 \right) \cdot \frac{2a}{a+c-b}.$$

$$R. \frac{c-a+b}{b}.$$

$$364. \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2xy} - 1. \quad \text{R. } \frac{(a+x+y)(a-x-y)}{2xy}.$$

$$365. \frac{[(2a-3)(2a+3)]^2 + 72a^2 - 82}{8} : \frac{4a^2 + 1}{4} : \frac{2a-1}{2} - 2a. \quad \text{R. } 1.$$

$$366. \left(\frac{2a-1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a^2+8}{12} \right) : \frac{a+1}{6} + \frac{a^2+a}{2}. \quad \text{R. } \frac{(a+1)^2}{2}.$$

$$367. \left(\frac{4a^3 - 8a^2}{8a^2} - \frac{a^2-4}{4a} \right) : \frac{a-2}{2} + 0,5. \quad \text{R. } \frac{a-1}{a}.$$

$$368. \left(\frac{4a^2-16}{6} : \frac{a+2}{3} - \frac{a-4}{4} \right) : \frac{4}{7a-12}. \quad \text{R. } 1.$$

$$369. \left\{ \frac{[(2a-3)(2a+3)]^2 + 72a^2 - 85}{8} : \frac{2a^2+1}{4} - 3a^2 + 1 \right\} : \frac{1}{(a+1)^2}. \quad \text{R. } \frac{a-1}{a+1}.$$

$$370. \left[\frac{(19^2 : 21^3) \cdot (21^2 : 19^3) \cdot 399}{4} - a^2 \right] : \left(\frac{1}{2} + a \right) + a. \quad \text{R. } \frac{1}{2}.$$

$$371. \left[\frac{(3^2 \cdot 5^6 \cdot a^2) : (5^4 \cdot b^2 \cdot 3^4)}{5^2} - \frac{3^2}{b^2} \right] : \left(\frac{a}{3b} - \frac{3}{b} \right) - \frac{3}{b}. \quad \text{R. } \frac{a}{3b}.$$

$$372. \left(0,1(6)x^2 - \frac{a^2}{6} \right) : \frac{x-a}{3} + \frac{a-x}{2}. \quad \text{R. } a.$$

$$373. \frac{25x^2 - 7x : 28x^3}{5x - \frac{1}{2x}} - \frac{10x^2 - 1}{2x} - \frac{1}{x}. \quad \text{R. } 0.$$

$$374. \left\{ \frac{\left[4x^2 - 1,1(3) + \frac{2}{15} \right] : (2x+1)}{2x} + \frac{1}{2x} - x^2 \right\} : (1-x) - x. \quad \text{R. } 1.$$

$$375. \frac{6x^2 - 4x^2 : 6x^3 + \frac{2}{3x} + 3x^2 - 1}{6x-2} - \frac{2x-2}{4}. \quad \text{R. } x+1.$$

376. $\left[\left(\frac{72x^3 - 2x}{48x^2 + 8x} \right)^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8} \right] : \frac{(6x-1)}{4} - \frac{3x}{2}$. **R.** $\frac{1}{4}$.
377. $\left(\frac{4x^2 - 8xy}{x} + \frac{2x^4 - 8x^3y + 8x^2y^2}{x^4 - 2x^3y} \right) : \frac{x-2y}{x} - 4x$. **R.** 2.
378. $\left(\frac{65x^3y - 60x^2y^2}{39x^2y^2 - 36xy^3} \cdot \frac{5x}{3y^2} - 1 \right) : \frac{5x-3y^2}{3y^2} - \frac{5x}{3y^2}$. **R.** 1.
379. $\left[\frac{x^2 + xy}{2x} + \frac{4(3x^2 + 3xy + 0,75y^2)}{2x+y} \right] \cdot \frac{2}{13x+7y}$. **R.** 1.
380. $\left(\sqrt{\frac{27 \cdot 8a^3}{3^4 \cdot 2^2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2a} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^2} \right) : \left(\frac{a-x}{2} \right) - 2x - a$. **R.** a.
381. $\left[\frac{ax^2 + x^2 - 4a - 4}{4a+4} \cdot \frac{16}{x+2} - x^2(x-2) \right] : (x^2 - 4) + x$. **R.** 2.
382. $\left[\left(\frac{\sqrt{343}}{11} \cdot \frac{\sqrt{847}}{7} \right)^2 - \frac{x^2}{25} \right] : \left(7 + \frac{x}{5} \right) + \frac{x}{5}$. **R.** 7.
383. $\left(\frac{a^2x - a^2y - b^2x + b^2y}{4(ax - ay + bx - by)} \cdot \frac{a-b}{4} - 1 \right) : \left(\frac{a-b}{4} + 1 \right) - \frac{a-b}{4}$. **R.** -1.
384. $\left[\left(\frac{a^2x^2 - 4a^2 + x^2 - 4}{a^2x^2 + x^2} \cdot \frac{x}{x+2} \right)^2 - 1 \right] : \left(\frac{x-1}{x} \right) + \frac{4}{x}$. **R.** 0.
385. $\left[\frac{a^4 + 2a^3 + a^2}{(a+1)^2} - 9 \right] \cdot \frac{1}{3a-9} - \frac{a}{3}$. **R.** 1.
386. $\left[\left(\frac{9a^2 - x^2 - 2x - 1}{3a - x - 1} - 3a \right)^2 + 2(x+1) + 1 \right] : (x+2)$. **R.** x+2.
387. $\left(\frac{b^2 - 2b + 1 - 4a^2}{2a + b - 1} + 2a \right)^2 + 2(b-1) + 1 - b^2$. **R.** 0.

$$388. \frac{4a^2 - 4ax + x^2 - (2b+x)^2}{2a+2b} \cdot \frac{1}{a-x-b} - 2. \quad \text{R. } 0.$$

$$389. \left(\frac{x^2 + 3x - x^4 - 3x^3}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{1-x} \right)^2 + 2(x+1)+1 : (x+2)^2 - 1. \quad \text{R. } 0.$$

$$390. \left[\left(\frac{3x^2 - 2xy - y^2}{3x+y} \right)^2 - (x-y)^2 + x^2 + y^2 \right] : (x^2 + y^2)^2. \quad \text{R. } 9 \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$391. \frac{1}{b^3 c^2 a} + \frac{1}{c^3 a^2 b} + \frac{1}{a^3 b^2 c}. \quad \text{R. } \frac{a^2 c + b^2 a + c^2 b}{a^3 b^3 c^3}.$$

$$392. \frac{a-b-c}{bc} + \frac{b+c+a}{ca} + \frac{c+a-b}{ab}. \quad \text{R. } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

$$393. \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} + \frac{b^2 + bc + c^2}{bc} + \frac{c^2 + ac + a^2}{ac} - 1. \quad \text{R. } \frac{(b+c)(a+b)(c+a)}{abc}.$$

$$394. \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2} + \frac{a^2 - ab - b^2}{ab} + \frac{a^2 - ab - b^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}. \quad \text{R. } \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

$$395. \frac{a+2b}{a+b} - \frac{(3a+2b)b}{(a+b)^2}. \quad \text{R. } \frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

$$396. \frac{7}{2n-m} - \frac{6}{m+2n} - \frac{12m}{4n^2 - m^2}. \quad \text{R. } \frac{1}{2n-m}.$$

$$397. \frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1}. \quad \text{R. } \frac{10(x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

$$398. \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{a^2 - b^2}. \quad \text{R. } \frac{a+b}{a-b}.$$

$$399. \frac{ax}{a^2 - x^2} + \frac{a-x}{a+x} + \frac{a+x}{a-x}. \quad \text{R. } \frac{2(a^2 + x^2) + ax}{a^2 - x^2}.$$

$$400. \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}. \quad \text{R. } \frac{2y}{y-x}.$$

$$401. \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a-b}{a^2 + ab}. \quad \text{R. } \frac{4}{a+b}.$$

$$402. \frac{1}{x-y} + \frac{x+2y}{x^2-xy} + \frac{x-y}{x^2}. \quad \text{R. } \frac{3x^2+y^2}{x^2(x-y)}.$$

$$403. \frac{a+x}{a-x} + \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} - \frac{a-x}{a+x}. \quad \text{R. } \frac{a^2+4ax+x^2}{a^2-x^2}.$$

$$404. \frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy+y^2} - \frac{x^2}{x^2+xy}. \quad \text{R. } \frac{y}{x}.$$

$$405. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}} (a+b)^2. \quad \text{R. } (a+b)^3.$$

$$406. \left[\left(\frac{a}{2} - 1 \right)^2 + a \right] \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right). \quad \text{R. } \frac{a^4}{16} - 1.$$

$$407. \left[\left(\frac{2a}{b} - \frac{b}{2a} \right)^2 + 2 \right] \left(\frac{ab}{16a^4 + b^4} \right). \quad \text{R. } \frac{1}{2ab}.$$

$$408. \left[\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{3}{ax^2} \right)^2 - \frac{a^4x^2}{4} \right] \cdot \frac{x}{a^3x^3-3} : \frac{3}{a^2x^3}. \quad \text{R. } -1.$$

$$409. \frac{1-a}{3b^2} \frac{b^3}{1-a^2} + 1-a - \frac{b}{3(1+a)}. \quad \text{R. } 1-a.$$

$$410. \frac{x+y}{4y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} (2xy-2y^2). \quad \text{R. } \frac{x^2+y^2}{2y}.$$

$$411. \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a-4b} \right) \frac{4}{a^2+ab}. \quad \text{R. } -\frac{3a}{a^2+b^2}.$$

$$412. \left[\left(\frac{a}{m+1} - d + \frac{a}{m-1} \right) (m^2-1) - 2am \right] : (m+1). \quad \text{R. } -d(m-1).$$

$$413. -\frac{b^2-a^2}{a} \cdot \left(-\frac{b^2+a^2}{5a+5b} \right). \quad \text{R. } \frac{(b-a)(b^2+a^2)}{5a}.$$

$$414. \left(\frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{a^2-ab} + \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{a^2-b^2}{2a^2-a-3b}. \quad \text{R. } \frac{b}{a}.$$

$$415. \left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1 \right). \quad \text{R. } \frac{1}{a}.$$

$$416. \left(m+1 - \frac{1}{1-m} \right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1} \right). \quad \text{R. } -m.$$

$$417. \left(a - \frac{1}{1-a} \right) : \frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}. \quad \text{R. } a-1.$$

$$418. \left(\frac{4c^2+21}{2-2c} - 6 \right) : \frac{2cn+3n-4c-6}{2-2c^2}. \quad \text{R. } \frac{(2c+3)(1+c)}{n-2}.$$

$$419. \left(\frac{2ab+4b-3a-6}{2-2b^2} \right) : \left(\frac{4b^2+21}{2+2b} - 6 \right). \quad \text{R. } \frac{a+2}{(1-b)(2b-3)}.$$

$$420. \frac{3x^2y^3-12x^2y^5}{3(1-4y^2)} - x^2y^3 + \frac{0,04x^2-1}{\frac{x}{5}+1}. \quad \text{R. } \frac{x}{5}-1.$$

$$421. \left[\frac{3}{2} \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{6} \right) : (2a+b) - 0,125 \right] : 0,25a^2. \quad \text{R. } \frac{1}{2a^2}.$$

$$422. \frac{\left(\frac{5x}{2a} - \frac{4x}{3a} + \frac{x}{a} \right) 6a}{9ax}. \quad \text{R. } \frac{13}{9a}.$$

$$423. \left(\frac{4a}{9b^3} - \frac{5b}{6a^3} + \frac{c}{10a^2b^2} \right) \left(\frac{90a^3b^3}{40a^4-75b^4+9abc} \right). \quad \text{R. } 1.$$

$$424. \left(\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2} + 2ab^2 - \frac{3}{2ab} \right) \cdot \frac{10a^2b^2}{5a^2b(1+4a^2b^3)+c^2}. \quad \text{R. } 1.$$

$$425. \frac{\frac{6-a^2}{6a} + \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a} \right)}{12a^2b^3} + 2. \quad \text{R. } 2.$$

$$426. \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] : \frac{(a+b)^2}{ab}. \quad \text{R. } \frac{1}{ab}.$$

$$427. \left[\frac{p-q}{pq} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right] : \left[\frac{p^2+q^2}{pq} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right]. \quad \text{R. } \frac{-(p+q)}{p^2+q^2}.$$

$$428. \left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{16}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2} \right) : \frac{4a^2-4}{3}. \quad \text{R. } 13\frac{1}{3}.$$

$$429. \left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1} \right) : \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}. \quad \text{R. } \frac{1-3a}{2(1+3a)}.$$

$$430. \left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2} \right) : \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} + \frac{2ax}{a^2-x^2} \right). \quad \text{R. } 5.$$

$$431. \left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab} \right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b} \right). \quad \text{R. } \frac{1}{a+b}.$$

$$432. \left(\frac{a^2}{a+n} - \frac{a^3}{a^2+n^2+2an} \right) : \left(\frac{a}{a+n} - \frac{a^2}{a^2-n^2} \right). \quad \text{R. } \frac{a(n-a)}{n+a}.$$

$$433. \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1} \right) : \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4a}{a^2-1} \right). \quad \text{R. } \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^2.$$

$$434. \left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2} + \frac{b}{3b-2a} \right) : \left(1 - \frac{2a-3b}{2a+3b} \right). \quad \text{R. } \frac{b}{2(3b-2a)}.$$

$$435. \left(\frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{2-p} + \frac{1}{p+2} \right) : \left(p-2 + \frac{10-p^2}{p+2} \right). \quad \text{R. } \frac{1}{2-p}.$$

$$436. \left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2} \right) : \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a} \right). \quad \text{R. } \frac{2a(b-2a)}{b+2a}.$$

$$437. \left(\frac{8+a^3}{x^2-y^2} : \frac{4-2a+a^2}{x-y} \right) : \left(x + \frac{xy+y^2}{x+y} \right). \quad \text{R. } \frac{a+2}{(x+y)^2}.$$

$$438. \left(x - \frac{4xy}{x+y} + y \right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} - \frac{2xy}{x^2-y^2} \right). \quad \text{R. } x-y.$$

$$439. \left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a+b} \right) : \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{b^2+ab} \right). \quad \text{R. } \frac{b}{b-a}.$$

$$440. \left(\frac{3a+2}{3a^2+1} - \frac{18a^3-a-9}{9a^4-1} + \frac{3a-2}{3a^2-1} \right) : \frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}. \quad \text{R. } \frac{1}{a+5}.$$

$$441. \left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} - \frac{4x^2}{x^2-1} \right) : \left[-2 \left(\frac{1}{x^3+x^2} - \frac{1-x}{x^2} - 1 \right) \right]. \quad \text{R. } \frac{2(x+1)}{1-x}.$$

$$442. \left(\frac{1+2n}{4+2n} - \frac{n}{3n-6} + \frac{\frac{2}{3}n^2}{4-n^2} \right) \frac{24-12n}{6+13n}. \quad \text{R. } \frac{2}{2+n}.$$

$$443. \left[\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{2b^2}{b^2-a^2} \right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad \text{R. } \frac{2}{a}.$$

$$444. \left(\frac{5}{2a+3} + \frac{2}{3-2a} + \frac{2a+9}{4a^2-9} \right) : \frac{8}{4a^2+12a+9}. \quad \text{R. } a+1,5.$$

$$445. \left(\frac{1}{2a-b} + \frac{3b}{b^2-4a^2} - \frac{2}{2a+b} \right) : \left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} + 1 \right). \quad \text{R. } -\frac{1}{4a}.$$

$$446. \left(\frac{1}{p-2q} + \frac{6q}{4q^2-p^2} - \frac{2}{p+2q} \right) : \left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2} + 1 \right). \quad \text{R. } -\frac{1}{2p}.$$

$$447. \left[\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab} \right) \right] : \frac{b}{a-b}. \quad \text{R. } \frac{a}{a+b}.$$

$$448. \left(a - \frac{4ab}{a+b} + b \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2} \right). \quad \text{R. } a-b.$$

$$449. \left(\frac{a^2+b^2}{ab} - 2 \right) : \left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right). \quad \text{R. } \frac{2}{b}.$$

$$450. \left[\frac{(a+b)^2+2b^2}{a^3-b^3} - \frac{1}{a-b} + \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad \text{R. } \frac{1}{ab}.$$

$$451. 2 \frac{a^2x - ax^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^3 + a^2x}{a^2 + 2ax + x^2} + \frac{ax^2 - x^3}{a^2 - x^2}. \quad \text{R. } a+x.$$

$$452. \frac{1}{x^2 - ax + a^2} + \frac{1}{x^2 + ax + a^2} + \frac{2ax}{x^4 + a^2x^2 + a^4}. \quad \text{R. } \frac{2}{x^2 - ax + a^2}.$$

$$453. 1 - \frac{8}{a^2 - 4} \left[\left(1 - \frac{a^2 + 4}{4a} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad \text{R. } \frac{a-2}{a+2}.$$

$$454. \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1-a^2}{1+a^2} \right) : \left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a} \right). \quad \text{R. } \frac{a}{1+a^2}.$$

$$455. \left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a} \right) \cdot \frac{b-a}{a^2+b^2} + \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2} \right) : \frac{2+a}{1-2a}. \quad \text{R. } -\frac{2+b}{2b}.$$

$$456. \frac{4a^2}{a^4 + a^3 + a + 1} : \left(\frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a+1} \cdot \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a^2 - 2a + 1} \right). \quad \text{R. } \frac{(a-1)^2}{a^2 - a + 1}.$$

$$457. \frac{a-2n}{a^3 + n^3} - \frac{a-n}{a^2n - an^2 + n^3} - \frac{1}{an + n^2}. \quad \text{R. } -\frac{2}{n(a+n)}.$$

$$458. \frac{1}{n-x} - \frac{3nx}{n^3 - x^3} + \frac{x-n}{n^2 + nx + x^2}. \quad \text{R. } 0.$$

$$459. \frac{a}{b+x} - \frac{bx}{b^2+x^2} + \frac{x^2}{b^2-x^2} - \frac{2bx^3}{b^4-x^4}. \quad \text{R. } \frac{a-x}{b+x}.$$

$$460. \left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-3a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^2+1}{1-a}. \quad \text{R. } \frac{1}{a^2+a+1}.$$

IV.10 VALOAREA NUMERICĂ A UNEI EXPRESII ALGEBRICE

$$461. \text{ Se dau expresiile: } E_1 = \frac{1 - \frac{3x^2}{1-x^2}}{1 + \frac{x}{1+x}}; E_2 = \left(\frac{2x^3 + 2x}{4x^2} - 1 \right) \cdot \frac{2x-2}{x^2-x}.$$

a) Să se calculeze valorile lui E_1 și E_2 pentru $x = \frac{1}{4}$.

b) Să se calculeze valoarea lui E_1 pentru $x = 1,41(6)$.

c) Să se calculeze media proporțională a valorilor lui E_1 și E_2 aflate la a).

$$\text{R. a) } E_1 = \frac{2}{3}; E_2 = 9; \text{ b) } E_1 = \frac{22}{3}; \text{ c) media proporțională a lui } E_1 \text{ și } E_2 \text{ este } \sqrt{6}.$$

462. Se dau expresiile:

$$a = 4x^2 + (8x^3 - 1) \cdot \left(\frac{2x + 4x^2}{4x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{2x - 1} \right) \text{ și } b = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă. 2) Să se arate apoi că: $ab - a + b + 1 = 0$, pentru orice valoare a lui x pentru care a și b au sens.

$$\text{R. } -2x - 1; \frac{x + 1}{x}.$$

463. Se dau expresiile:

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}; B = \frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2} - 1}; C = x - \frac{1 - 2x^2}{1-x} + 1.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă. b) Să se calculeze media lor aritmetică.

c) Să se calculeze valoarea numerică a mediei aritmetice găsite pentru:

$$x = \frac{1,5 - \frac{1}{4}}{\sqrt{1,5625}} \cdot 1,1(6).$$

$$\text{R. a) } A = \frac{1+x}{1-x}; B = \frac{x+1}{x-1}; C = \frac{x^2}{1-x}; \text{ b) } \frac{x^2}{3(1-x)}; \text{ c) } -\frac{49}{18}.$$

$$464. \text{ Se dă expresia: } \frac{x^4 - y^4}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^3 + xy^2}{x+y}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă și apoi să se calculeze valoarea numerică pentru:

$$x = \left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 \cdot \frac{1}{8} \right) : \frac{7}{16} \text{ și } y = \frac{8}{5} \sqrt{\frac{225}{4 \cdot 096}}.$$

$$\text{R. } \frac{x-y}{x}; \frac{3}{4}.$$

465. Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$\frac{2(7,125+x) - \frac{1}{21} \sqrt{7 \cdot 056}}{\left(3x + 1\frac{7}{8} \right) : 3} \text{ pentru } x = \frac{\left(\frac{5}{8} \cdot 3 + 3\frac{5}{8} \right) : \frac{4}{19}}{2^2 \cdot 3^2 - 5^2}.$$

$$\text{R. } 5.$$

PROBLEME PENTRU CLASELE a VIII-a și a IX-a.

IV.11. VALOAREA ABSOLUTĂ A UNUI NUMĂR REAL

470. Să se reprezinte grafic funcțiile: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2x-1| + 2|x|$; $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{|x|}{x}$.

471. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-1| + 3, g(x) = |2x-1| + |x|$. Să se calculeze $f(\mathbb{R}) \cap g(\mathbb{R})$.

472. Dacă $a \leq x \leq b$, să se arate că $|x| \leq \max(|a|, |b|)$.

473. Să se găsească regiunea din plan în care se află punctele $M(x,y)$ știind că $|x-y| = |x| + |y|$.

474. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, să se arate că $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow |xy| = xy$.

475. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $x+2|2x-3|=3$; b) $|2x+1| + |x|=1$; c) $2|3x-2| + 3|3-2x|=13$;
d) $|x-1| + |x-2| = |x-3|$; e) $|x^2-1| + |x-3|=2$.

IV.12. INECUAȚII

476. Să se găsească punctele din plan pentru care

- a) $3x-y+6 \geq 0$; b) $2x-y < 2$; c) $3x > y$; d) $x+y-4 \geq 0$; și $x-y \leq 0$;
e) $2x-y-2 \geq 0$ și $x+2y \geq 1$; f) $x+y \geq 1$; $2x+3 \leq 3$; $x+2y=4$;
g) $x-2y+1 \leq 0$; $2x-y-1 < 0$; $x-y+1 \geq 0$; h) $x-y \geq 0$; $2x-y-1 \leq 0$; $x+y \geq 2$.

477. Să se rezolve sistemele de inecuații:

- a) $2x > 5x-3$; $4(x-1) \leq (2x+1)$; b) $(x-1)(x-3) \geq (x-1)(x+2)$; $(x-2)(x-3) \leq (x+2)(x+3)$;
c) $\frac{x-2}{2} + \frac{x+3}{3} \geq \frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}$; $(x-1)^2 > (x-2)^2$; d) $x-2 > 2(x-5)$; $\frac{x-1}{x+1} \geq 2$;
e) $\frac{x-m}{x-2} \geq 1$; $\frac{x-m}{x-1} \leq 2$.

IV.13. ECUAȚII DE GRADUL II

Să se rezolve următoarele ecuații :

478. $7x^2 + 21x - 28 = 0$.

R. $x_1 = 1, x_2 = -4$.

479. $25x(x+1) = -4$.

R. $x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = -\frac{4}{5}$.

$$480. 4(x^2-1)=4x-1. \quad \mathbf{R.} \ x_1=\frac{3}{2}, \ x_2=-\frac{1}{2}.$$

$$481. \frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2, \ (x \neq -2, \ x \neq 0). \quad \mathbf{R.} \ x_1=x_2=2.$$

$$482. \frac{2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}, \ (x \in \mathbf{R} - \{-1, 2\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \ x_2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

$$483. \frac{x+8}{x-8} - \frac{24}{x-4} = 2, \ (x \in \mathbf{R} - \{4, 8\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1=12, \ x_2=-8.$$

$$484. \frac{x}{x-6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x+6}{6-x}, \ (x \in \mathbf{R} - \{6\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1=18, \ x_2=-3.$$

$$485. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+13}{x+1}, \ (x \in \mathbf{R} - \{-1, 1, 2\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1=5, \ x_2=\frac{6}{3}.$$

$$486. \frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}, \ (x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1=-2, \ x_2=-8\frac{1}{2}.$$

$$487. \frac{x+36}{x^3-1} = \frac{x+6}{x-1} - \frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}, \ (x \in \mathbf{R} - \{1\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1=2, \ x_2=-\frac{7}{9}.$$

$$488. \frac{x+11}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2(x+7)}{x+1} - 4, \ (x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1=4, \ x_2=5.$$

$$489. \frac{(x-12)^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{x(x-9)}{18} = \frac{(x-14)^2}{2} + 5. \quad \mathbf{R.} \ x_1=18, \ x_2=15,8.$$

$$490. \frac{x}{2x-1} + \frac{25}{4x^2-1} = \frac{1}{27} - \frac{13}{1-2x}, \ \left(x \in \mathbf{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \right). \quad \mathbf{R.} \ x_1=13, \ x_2=\frac{2}{1} \text{ nu are sens.}$$

$$491. \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} + \frac{3x^2}{4(x-2)(x-5)} = 0, \ (x \in \mathbf{R} - \{2, 5\}). \quad \mathbf{R.} \ x_1=-\frac{14}{3}, \ x_2=2 \text{ nu are sens.}$$

$$492. ax^2-2(a-1)x+m=0, \ m \in \mathbf{R}, \ m \neq 0. \text{ Pentru ce valori ale lui } m \text{ ecuația: a) nu are soluții; b) are soluții.}$$

$$\mathbf{R.} \text{ a) } m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right); \text{ b) } \left(-\infty, \frac{1}{2} \right) \text{ două soluții, } m=1/2 \text{ o soluție.}$$

$$493. \sqrt{3}x^2-2\sqrt{2}=0.$$

$$494. 36x^2=\sqrt{5}+1.$$

495. $144x^2=1$.

496. $2x^2-(2-\sqrt{2})^2=0$.

497. $6x^2+a^2+b^2=2ab; (x-1)^2-25=0$.

498. Să se arate că următoarele ecuații nu au rădăcini pe mulțimea numerelor reale:

$3x^2+5x+20=0, x^2-x+1=0, 4x^2-x+5=0$.

Să se rezolve ecuațiile:

499. $x^2-(m+n)x+mn=0$.

R. $x_1=m, x_2=n$.

500. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

R. $x_1=a+b, x_2=a-b$.

501. $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0 \ (m, n \neq 0)$.

R. $x_1=\frac{m}{n}, x_2=\frac{n}{m}$.

502. $m^2x^2+(pm-qm)x-pq=0, \ (m \neq 0)$.

R. $x_1=\frac{q}{m}, x_2=-\frac{p}{m}$.

503. $x^2-4bx+4b^2-a^2=0$.

R. $x_1=2b+a, x_2=2b-a$.

504. $x^2-2a^2bx+a^4b^2-a^2b^4=0$.

R. $x_1=ab(a+b), x_2=ab(a-b)$.

505. $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0, \ (a \neq 0)$.

R. $x_1=\frac{a^2+1}{a}, x_2=\frac{a^2-1}{a}$.

506. $x^2-2a^2bx+a^2b^2(a^2-4b^2)=0$.

R. $x_1=ab(a+2b), x_2=ab(a-2b)$.

507. $c^2x^2-2acx+a^2-4b^2=0, \ (c \neq 0)$.

R. $x_1=\frac{a+2b}{c}, x_2=\frac{a-2b}{c}$.

508. $(m^2-n^2+x)^2=4m^2x$.

R. $x_1=(m+n)^2, x_2=(m-n)^2$.

509. $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$.

R. $x_1=(a+b)^2, x_2=(a-b)^2$.

510. $\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)(x-b)}=x, \left(x \neq \frac{a+b}{2}, ab > 0\right)$.

R. $x_1=+\sqrt{ab}, x_2=-\sqrt{ab}$.

511. $4a^2x^2-4abx+b^2-1=0, \ (a \neq 0)$.

R. $x_1=\frac{b+1}{2a}, x_2=\frac{b-1}{2a}$.

512. $(a^2-4b^2)x^2+2(a^3+2b^3)x+a^4-b^4=0, \ (a^2-4b^2 \neq 0)$.

R. $x_1=\frac{b^2-a^2}{a+2b}, x_2=-\frac{a^2+b^2}{a-2b}$.

513. $\frac{a}{x}+\frac{a-1}{x-1}=2, \ (x \in \mathbb{R}-\{0,1\})$.

R. $x_1=a, x_2=\frac{1}{2}$.

$$514. (a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0, (a \neq b, a \neq -b). \quad \text{R. } x_1 = \frac{1}{a-b}, x_2 = \frac{1}{a+b}.$$

$$515. \frac{x-a}{a} = \frac{2a}{x-a}, (a \neq 0, x \in \mathbb{R} - \{a\}). \quad \text{R. } x_1 = a(1 + \sqrt{2}), x_2 = a(1 - \sqrt{2}).$$

$$516. \frac{m}{n}x^2 - m^2x + m = \frac{x}{n}, (m, n \neq 0). \quad \text{R. } x_1 = mn, x_2 = \frac{1}{m}.$$

$$517. (a-b)x^2 + (b-c)x + c - a = 0, (a \neq b). \quad \text{R. } x_1 = 1, x_2 = \frac{c-a}{a-b}.$$

IV.14. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL ECUAȚIEI DE GRADUL II

Etapele de rezolvare a problemelor cu ajutorul ecuației de gradul doi sînt:

- 1) Alegerea necunoscutei. 2) Punerea problemei în ecuație.
- 3) Rezolvarea ecuației. 4) Verificarea soluțiilor și interpretarea lor (dacă ele convin problemei respective sau nu).

Problemă rezolvată O asociație de tractoriști trebuie să însămînțeze 200 ha într-un anumit număr de zile. Însămînțind cu 5 ha în plus pe zi, au terminat însămînțarea cu 2 zile mai devreme. În cîte zile și-au propus inițial să termine însămînțatul și cîte hectare au fost însămînțate pe zi?

Rezolvare. 1) Alegem necunoscuta x = numărul de ha propuse a fi însămînțate pe zi. În acest caz, numărul de zile în care ar fi trebuit să fie terminată însămînțarea este $\frac{200}{x}$.

2) În problemă se arată că lucrînd 5 ha în plus pe zi, numărul zilelor în care s-a făcut lucrarea este mai mic cu 2 decît cel planificat. Obținem astfel ecuația

$$\frac{200}{x+5} = \frac{200}{x} - 2,$$

în care expresiile din cele două părți sînt definite pe $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$.

3) Rezultă $200x = 200(x+5) - 2x(x+5)$, ecuație ale cărei rădăcini sînt $x_1 = 20$, $x_2 = -25$.

4) Ambele rădăcini verifică ecuația? Ținînd seama că x = numărul hectarelor, din cele două soluții, 20 și -25, nu putem admite decît pe cea pozitivă, $x = 20$.

Probleme propuse ce se rezolvă cu ajutorul ecuației de gradul doi.

1. Două automobile pornesc în același timp din orașul A spre orașul B . Distanța dintre aceste două orașe este de 560 km. Primul automobil are viteza cu 10 km/oră mai mare decît al doilea și din această cauză ajunge cu o oră mai devreme în B . Să se afle vitezele celor două automobile.

$$\text{R. } v_1 = 80 \text{ km/h; } v_2 = 70 \text{ km/h.}$$

2. O gospodărie agricolă de stat trebuia să însămînțeze 400 ha într-un anumit număr de zile. Însămînțînd pe zi cu 10 ha mai mult, lucrarea s-a terminat cu 2 zile mai

devreme. Cîte ha trebuiau însămînțate zilnic?

R. $x_1=40, x_2=-50$ nu convine problemei.

3. Două familii pot termina seceratul unui lan, în 12 zile. Dacă ar lucra fiecare dintre ele singură, una din ele ar termina lucrul cu 10 zile mai repede decît cealaltă. În cîte zile ar putea secera lanul, singură, fiecare familie?

R. $x_1=20, x_2=30$.

4. Salariul săptămînal al unui muncitor era de 800 lei. După două măriri succesive cu același procent, salariul a devenit 1 058 lei. Cu ce procent s-a mărit salariul de fiecare dată?

R. 15%.

5. Prețul de cost al unei piese era de 100 lei. După două reduceri succesive ale prețului cu același procent, prețul piesei a devenit 77,44 lei. Cu ce procent a scăzut prețul de cost de fiecare dată.

R. 12%.

6. Un grup de elevi și-a propus să facă o excursie de 20 km într-un anumit număr de ore. Dar făcînd, în medie, cu 1 km mai mult pe oră, ei au ajuns la destinație cu o oră mai devreme. Cu ce viteză și-au propus să meargă acești elevi?

R. 4 km; -5 km nu convine problemei.

7. Un grup de copii ar putea amenaja un teren de sport într-un anumit număr de zile, un alt grup de copii ar putea realiza același lucru cu 5 zile mai devreme. Lucrînd împreună, au amenajat terenul în 6 zile. În cîte zile ar fi terminat amenajarea fiecare grup, dacă ar fi lucrat singur?

R. 10 zile; 15 zile.

8. Să se afle un număr pozitiv, știind că $\frac{2}{3}$ din număr micșorat cu 2 și înmulțit cu $\frac{3}{5}$ din același număr mărit cu 3, este egal cu 1 482.

R. 60.

9. Numărătorul unei fracții este cu 3 mai mic decît numitorul. Dacă se adună această fracție cu inversa ei se obține $\frac{29}{10}$. Să se calculeze termenii acestei fracții.

R. $\frac{2}{3}$.

10. Numitorul unei fracții este cu 2 mai mare decît numărătorul. Dacă adunăm această fracție cu inversa ei obținem $\frac{34}{15}$. Să se calculeze termenii acestei fracții.

R. $\frac{3}{5}$.

11. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 25 m și suma dintre o catetă și proiecția ei pe ipotenuză egală cu 24 m. Să se afle aria triunghiului.

R. 150 m^2 .

12. Un romb are perimetrul de 52 m și suma diagonalelor de 34 m. Să se calculeze diagonalele rombului.

R. 24 m, 10 m.

13. Un trapez isoscel are baza mare de două ori și jumătate mai mare decît baza mică, înălțimea egală cu baza mică și aria egală cu $2\,800 \text{ m}^2$. Să se calculeze perimetrul trapezului.

R. 240 m.

14. Într-un trapez baza mică este egală cu $\frac{2}{3}$ din baza mare, înălțimea cu 10 m mai mică decît baza mică și aria de $1\,500 \text{ m.p.}$ Se prelungesc laturile neperalele pînă se

întîlnesc într-un punct, să se calculeze distanța de la acel punct la baza mare.

R. 90 m.

15. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu dimensiunile de 9 m și 5 m. Pe laturile AB , BC , CD , DA se iau segmentele $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=x$. Se cere să se afle mărimea acestor segmente astfel încît aria paralelogramului $A_1B_1C_1D_1$ să fie egală cu 25 m^2 .

R. 2 m; 5 m.

16. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic, știind că are o catetă de 30 cm și proiecția celeilalte catete pe ipotenuză egală cu 32 cm.

R. 25 cm.

17. Suma pătratelor a trei numere cu soț consecutive este 116. Să se afle numerele.

R. 4, 6, 8.

18. Într-o clasă, fiecare elev dă la toți colegii săi cîte o fotografie a sa, exceptînd trei colegi care stau în aceeași rînd cu el. În total, trebuie 780 fotografii. Cîți elevi sînt în clasă?

R. 30 elevi.

19. Să se afle un număr de două cifre, știind că cifra zecilor este cu 2 mai mare decît cifra unităților, iar produsul numărului cu suma cifrelor sale este 640.

R. 64.

20. Să se afle un număr de două cifre, astfel încît cifra zecilor să fie de două ori mai mare decît cifra unităților, iar pătratul sumei cifrelor sale să fie egal cu 81.

R. 63.

21. Două robinete umplu un bazin în 6 ore. Primului robinet, singur, îi trebuie cu 5 ore mai puțin decît celui de-al doilea, ca să umple bazinul. În cît timp poate umple fiecare robinet singur bazinul?

R. 10 ore; 15 ore.

22. Un obiect se vinde cu 39 lei, cîștigîndu-se atît la sută cît a costat obiectul. Cît a costat obiectul?

R. 30 lei.

23. Distanța dintre două orașe este de 28 km. Doi turiști parcurg acest drum, viteza primului fiind cu 0,5 km pe oră mai mare decît viteza celui de al doilea. Ei pleacă în același timp, dar unul din ei ajunge la destinație cu o oră mai devreme decît celălalt. Cu ce viteză merge fiecare din acești doi turiști?

R. 4 km pe oră și 3,5 km. pe oră.

24. O echipă de brigadieri trebuia să treiere 960 căpițe de secară și ovăz. Treierînd în fiecare zi cu 40 căpițe mai mult decît era prevăzut în plan, lucrul se termină cu 4 zile mai devreme. Cîte căpițe trebuiau treierate pe zi după plan și cîte s-au treierat de fapt?

R. 80 și 120.

25. Alegem un număr întreg și pozitiv, scriem la dreapta sa cifra 7 și înmulțim numărul astfel format cu numărul ales la început. Produsul este 111. Să se afle numărul inițial.

R. 3.

26. Dintr-o tablă de fier în formă de dreptunghi, s-a făcut o cutie fără capac, avînd volumul de 750 cm^3 . Pentru aceasta s-a tăiat din fiecare colț al tablei cîte un pătrat cu latura de 5 cm și marginile obținute s-au îndoit. Să se afle dimensiunile tablei, știind că una din laturile ei este cu 5 cm mai mare decît cealaltă.

R. 25 cm; 20 cm.

27. Prețul de cost al unui obiect este la început de 25 lei; după două reduceri

consecutive cu același număr de procente, prețul a scăzut la 20,25 lei. Cu cât la sută a scăzut prețul de cost de fiecare dată?

R. 10%.

28. Într-un birou de copiat acte, s-a adus pentru copiere un manuscris de 480 pagini. Fiindcă 16 dactilografe erau ocupate cu o altă lucrare, fiecare dintre celelalte a copiat cu cîte 8 pagini mai mult decît se cuvenea. Cîte dactilografe erau în total?

R. 40.

29. O oglindă, împreună cu rama, este înaltă de 75 cm și lată de 40 cm. Rama are peste tot aceeași lățime și suprafața ei este egală cu suprafața oglinzii. Să se afle lățimea ramei.

R. 7,5 cm.

30. Perimetrul bazei unei clădiri dreptunghiulare este de 70 m. Clădirea este înconjurată de un gard, care este pretutindeni la aceeași depărtare de clădire. Suprafața înconjurată de gard este cu 74 m.p. mai mare decît suprafața ocupată de clădire. Să se afle depărtarea de la gard la clădire.

R. 1 m.

31. Două corpuri se mișcă pe laturile unui unghi drept, plecînd în același timp din vârful unghiului. Unul are o viteză de 24 m pe minut, celălalt are o viteză de 10 m pe minut. Peste cît timp distanța dintre ele va fi de 806 m?

R. 31 minute

32. Prin ce număr trebuie să-l împărțim pe 136, pentru ca la cît să obținem un număr cu 3 mai mic, iar la rest, cu 7 mai mic decît împărțitorul?

R. 13.

33. Pe o foaie de hîrtie sînt date n puncte $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, printre care nu se găsesc trei în linie dreaptă. Dacă unim toate punctele acestea cîte două prin linii drepte, obținem 780 linii drepte. Cîte puncte sînt date?

R. 40 puncte.

34. Într-un triunghi dreptunghic, ipotenuza este cu 9 cm mai mare decît o catetă și cu 18 cm mai mare decît cealaltă. Să se afle laturile acestui triunghi dreptunghic.

R. 36 cm; 45 cm.

35. Laturile unui triunghi dreptunghic se exprimă prin trei numere cu soț consecutive. Să se afle aceste laturi.

R. 6, 8, 10.

36. Circumferința roții dinapoi a unei trăsuri este de două ori mai mare decît circumferința roții dinainte. Dacă micșorăm circumferința roții dinapoi cu 2 dm și mărim circumferința roții dinainte cu 4 dm, atunci, la o distanță de 120 m roata dinapoi face cu 20 de învîrtituri mai puțin decît roata dinainte. Să se afle circumferințele celor două roți.

R. Fie ℓ circumferința roții dinainte, atunci: $\frac{120}{\ell+4} + 20 = \frac{120}{2\ell-2} \rightarrow \ell = -8$ și $\ell = 2$. Deci și $\ell = 2$ dm.

37. O ștafetă, care pleacă din localitatea A trebuie să ajungă în localitatea B peste 5 ore. În același timp o altă ștafetă pleacă din localitatea C și pentru a ajunge în B în același timp cu prima, trebuie ca timpul în care ea parcurge 1 km să fie cu $1\frac{1}{4}$ minute mai scurt decît timpul în care prima ștafetă parcurge 1 km. Distanța de la C la B este cu 20 km mai mare decît distanța de la A la B . Să se afle distanța AB .

R. 60 km.

38. Într-un solar pentru copii se construiește un bazin în formă de dreptunghi. Perimetrul dreptunghiului este 28 m iar suprafața de 48 m.p. Care sînt dimensiunile dreptunghiului?

R. 6 m; 8 m.

IV.15. EXERCITII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

Să se efectueze:

$$1. \left[\left(\sqrt{(867)^3} \right)^2 : \left(\sqrt{27 \cdot 17^{12}} \right) \cdot \frac{(\sqrt{289})^3}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2601} + 4\frac{1}{3} \right] \cdot (-2)^0 \cdot (-5)^0 \quad \text{R. 10.}$$

$$2. \left[\left(\sqrt{0,625} \right)^2 : \frac{5^6}{2^{20}} \right]^3 \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{1}{5^{36}} : \left(\frac{2}{5} \right)^{54} + (13)^0 - 3. \quad \text{R. -1.}$$

$$3. \left\{ \frac{\left[\left(\frac{16}{125} \right)^5 \cdot (0,4)^8 \right]^3}{\left(\frac{2}{5} \right)^{69}} - 2^{15} + \left(\sqrt{0,125} \right)^4 : \frac{1}{16} \right\} : \frac{1}{2^{10}} - (-1). \quad \text{R. 2.}$$

$$4. \left[\sqrt{(0,75)^5} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 0,125 \right]^5 \cdot \frac{125}{8} : \left(\frac{5}{2} \right)^8 \cdot \frac{2^5}{5^7} + \frac{4}{5^7} - \frac{6}{5^6} \quad \text{R. } -\frac{1}{5^3}.$$

$$5. \left\{ \left[\frac{2(x-y)^2 - 5y(y-x)}{2x+3y} \right]^2 (x+y) \right\} : (x-y) - 2xy + 2y^2. \quad \text{R. } (x-y)^2.$$

$$6. \left\{ \left[\frac{x(y-1) + z(1-y) - y + 1}{x-z-1} \right]^2 (y+1) \right\} : (y-1) + 2y + 2. \quad \text{R. } (y+1)^2.$$

$$7. \left\{ \left[\frac{y(2-x^2) + z(x^2-2) - 2 + x^2}{y-z-1} (x^2+2) \right]^2 - 16 - x^4 \right\} : (x^4 - 3x^2). \quad \text{R. } x^4 + 3x^2.$$

$$8. \left[\frac{9(a^3 + a^2 - a) + a^3 + a^2 - a}{a^2 + a - 1} - a^2 - 2a - 16 \right] : (a-4). \quad \text{R. } 4-a.$$

$$9. \left\{ \left[\frac{x(1-y+y^2) - 1 + y - y^2}{1-y+y^2} \right]^2 (x+1) \right\} : (x-1) + 2(x+1). \quad \text{R. } (x+1)^2.$$

10. $\left\{ \left[\frac{(x^2+4x)^2-4}{x^2+4x+2} + 6 \right] - xy - 2y + x^2 + 2x \right\} : [2(x+1)-y].$ **R.** $x+2$.
11. $\left\{ \left[\frac{9a^2-(2a+3b)^2}{5a+3b} (a+3b) \right]^2 + 18a^2b^2 + a^4x^2 + 81b^4x^2 \right\} : (1+x^2).$ **R.** a^4+81b^4 .
12. $\left\{ \left[\frac{(x+3y)^2-4(y-x)^2}{5y-x} - 3x^3 - x^2y \right] : (1-x) \right\} : (3x+y).$ **R.** $1+x$.
13. $\left\{ \left[\frac{a(x-1)^2-x^2+x+ax-a}{a-1} \right]^2 + 2x^3 \right\} \cdot [x^2(x^2-1)] + x^9 - x^5 : (x^8-x^4).$ **R.** $x+1$.
14. $\left\{ \left[\frac{(x+3y)^2-12(xy+3x^2)}{5x+3y} \right]^2 - 9y^2 \right\} : (7x-6y).$ **R.** $7x$.
15. $\left\{ \left[\frac{(4x^2+8x+4)(2x-2)}{8(x+1)} \right]^2 + 2x^2 \right\} : (x^4+1).$ **R.** 1 .
16. $\left\{ \left[\frac{(4x^2-12xy+9y^2)(2x+3y)}{2x-3y} \right]^2 + 72x^2y^2 - 82y^4 \right\} : (4x^2+y^2).$ **R.** $4x^2-y^2$.
17. $\left\{ \left[\frac{(27x^5y^2-36x^4y+12x^3)(3x^2y+2x)}{9x^5y-6x^4} \right]^2 + 72x^2y^2 - 17 \right\} : (9x^2y^2+1).$ **R.** $9x^2y^2-1$.
18. $\left\{ \left[\frac{(75x^4y^2-30x^2y+3)(5x^2y+1)}{25x^4y^2-1} \right]^2 + 90x^2y \right\} : 9.$ **R.** $25x^4y^2+1$.
19. $\left\{ \left[\frac{(98x^5y^2-56x^4y+8x^3)(7x^2y+2x)}{14x^5y-4x^4} \right]^2 + 392x^2y^2 - 20 \right\} : (49x^2y^2+2).$ **R.** $49x^2y^2-2$.
20. $\left\{ \left[\frac{(27x^6y^2+36x^5y+12x^4):3x^2}{3x^2y+2x} \right]^2 (2x^2y-2x) \right\} + 72x^6y^2 - 17x^4.$ **R.** $81x^8y^4-x^4$.
21. $\left\{ \left[\frac{[(16x^6y^4-8x^4y^3+x^2y^2):x^2y^2](4x^2y+1)}{4x^2y-1} \right]^2 - 257x^8y^4 + 32x^4y^2 \right\} : (1-x^4y^2)$ **R.** $1+x^4y^2$.

$$22. \left\{ \left[\frac{(3x^2-6x+3)(x+1)}{3x-3} \right]^2 + 2x^2 - 2 \right\} : (x^2+1) - 2x+2. \quad \mathbf{R. (x-1)^2.}$$

$$23. \frac{[(12x^2y-8)(3x^2y+2):4+4-x^2]^2 + 18x^6y^2 - 2x^4}{9x^4y^2 - x^2 - 9x^2y^2 + 1} \cdot \frac{x^2-1}{x^4}. \quad \mathbf{R. 9x^2y^2+1.}$$

$$24. \left\{ \left[\frac{2(x-y)^2 + 8y(y-x)}{2x-10y} \right]^3 : (x-y) \right\} + 2x-2y+1. \quad \mathbf{R. (x-y+1)^2.}$$

$$25. E = \left[\frac{x^2(y-1) + 2x(1-y) + y-1}{x-1} \right]^2 : [(y-1)^2(x-1)]:8.$$

Pentru ce valori întregi date lui x , E este un număr întreg?

$$\mathbf{R. x=8k+1; k \in \mathbb{Z}}$$

$$26. \frac{6x^2+5xy+y^2}{2x+y}. \quad \mathbf{R. 3x+y.}$$

$$27. \frac{3-x^2-2x}{x+3}. \quad \mathbf{R. 1-x.}$$

$$28. \frac{3x^2+2xy-y^2}{3x-y}. \quad \mathbf{R. x+y.}$$

$$29. \frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^5+x^4-9x-9} + \frac{x^2+x}{x^2-3}. \quad \mathbf{R. \frac{(x+1)^2}{x^2-3}.}$$

$$30. \frac{x^2+y^2+1-2xy+2x-2y}{x^2-y^2-1+2y}. \quad \mathbf{R. \frac{x-y+1}{x+y-1}.}$$

$$31. \frac{a^6+2a^4-2a^5-2a^3+a^2}{a^5-a^4+a^3-a^2}. \quad \mathbf{R. (a-1).}$$

$$32. \frac{a^4-8a^3+13a^2-6a}{(a^2-6a)(a-1)} + a^2-3a+2. \quad \mathbf{R. (a-1)^2.}$$

$$33. \left[\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1} \cdot (x-1) \right] : (x^3-1). \quad \mathbf{R. 1.}$$

$$34. a^2t^2 + \frac{a^8-3a^4b^4+b^8}{a^4+a^2b^2-b^4} - a^4. \quad \mathbf{R. -b^4.}$$

$$35. \frac{x^2+2ax+a^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2} - 1. \quad \mathbf{R. \frac{2(a-b)}{x-a+b-c}.}$$

$$36. \frac{[(1+x-y-xy-yz+z):(1+x+z)(1+y)]^3 - 3y^2(y^2-1)}{(1-y)(1+y^2+y)}. \quad \text{R. } 1+y^3.$$

$$37. \left[\frac{(x-xy+xy^2-y^2+y-1)(y+1)}{x-1} + 3y^2 + 3y - 1 \right] : (3+3y+y^2). \quad \text{R. } y.$$

$$38. \left\{ \left[\frac{2(x-y)^2 - 5y^2 + 3xy}{2x-3y} \right]^3 - 3xy(x+y) \right\} : (x^2+y^2-xy). \quad \text{R. } x+y.$$

$$39. \left[\left(\frac{3x^6 - x^{12} - 1}{x^3 - x^6 + 1} - x^3 \right) : (x^3 + 1) - 3x^2 + 3x \right] : (1 - 2x + x^2). \quad \text{R. } x-1.$$

$$40. \frac{2x^5 + 4ax^4 + 2x^3(a^2+b) + 4abx^2 + 2a^2bx}{x^6 + ax^5 - b^2x^2 - b^2ax} : \frac{2}{x^2-b}. \quad \text{R. } a+x.$$

$$41. \left[1 + \frac{(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a-b)}{a^2 + b^2 - ab} + b^3 \right] (a^3 - 1) - a^6. \quad \text{R. } -1.$$

$$42. \frac{ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx}{a+b+c} + 3x + 1. \quad \text{R. } (x+1)^2.$$

$$43. \frac{a^2 - 3ab + 4ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2} : (a-2b). \quad \text{R. } \frac{1}{a+b-c}.$$

$$44. \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 - 9x - 9}. \quad \text{R. } \frac{x+1}{x^2-3}.$$

$$45. \frac{a^3c - 2a^2c^2 + ac^3 - ab^2c}{(a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2}. \quad \text{R. } \frac{ac}{(a+c)^2 - b^2}.$$

46. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia are valoarea $3/5$.

$$\left\{ \left[\left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{x^2-1} \right) \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \frac{2x-2}{x+1} + 1 \right] - 1 \right\} : \frac{x+3}{x+1}. \quad \text{R. } \frac{1-x}{1+x}, \frac{1}{4}.$$

47. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia este egală cu 4.

$$\frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 - x + 2} + x - 1. \quad \text{R. } (x+1)^2, 1 \text{ și } -3.$$

$$48. \frac{x^9 + x^5 + x}{x^5 + x^3 + x} (x^2 + 1). \quad \text{R. } x^6 + 1.$$

$$49. \frac{x^4 - 3x^2y^2 + y^4}{x^4 - x^2y^2 - x^3y + x^2y^2 - xy}. \quad \text{R. } \frac{x^2 - y^2 + xy}{x^2 + 1}.$$

$$50. \frac{x^3 - 8 - 6x^2 + 12x}{x^2 - 4x + 4} (x+2). \quad \text{R. } x^2 - 4.$$

$$51. \frac{a^2 + 1 + b^2 - 2ab + 2a - 2b}{a^2 - 1 - b^2 + 2b} : \frac{(a-b+1)^2}{-a+b-1}. \quad \text{R. } \frac{-1}{a+b-1}.$$

$$52. \left\{ \left[\left(\frac{6a^4 - 5a^3x + a^2(6a-5x)}{6(a^3x + a^2x) - 6a^2 - 6a} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{ax-1}{6a-5x} \right) - 3x \right]^3 + 9x - 27x^2 \right\} : (1+3x+9x^2). \quad \text{R. } 1-3x.$$

53. Să se figureze în raport cu două axe ortogonale punctele următoare: $A(3,2)$; $B(3,1)$; $C(-1,2)$; $D(5,3)$; $M(5,0)$; $N(-5,0)$; $P(0,-4)$; $Q(0,3)$; $O(0,0)$; $L(-3,-2)$; $E(4,4)$; $G(-6,6)$.

54. Se consideră punctele $A(3,4)$, $B(1,0)$, $C(-3,-4)$, $D(0,-2)$, $E(-1,0)$. Să se figureze aceste puncte și simetricile lor în raport cu axa xx' , cu axa yy' și în raport cu originea.

55. Să se calculeze distanța de la origine pînă la punctul $M(3,4)$.

56. Să se figureze, prin diagrame, funcțiile definite pe E cu valori în F :

- a) $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 5\}$;
- b) $E = \{1, 3, 4, 8\}$, $F = \{1, 3, 4, 8\}$;
- c) $E = \{m, n\}$, $F = \{x, y, z, t\}$.

57. Care dintre punctele mulțimii: $M = \{(1,5); (0,1); (-2,-4); (-1,6)\}$ se află pe dreapta $y = 3x + 2$.

58. Se dă $f(x) = -2x + 5$. Determinați coordonatele a trei puncte pe dreapta dată.

59. Se consideră următoarele puncte într-un sistem de axe ortogonale: $A(3,0)$, $B(1,5)$, $C(0,6)$, $D(-4,-1)$. Care dintre ele aparțin dreptei reprezentate prin funcția $f(x) = -x + 6$?

60. Să se reprezinte grafic:

$$y = x + 1; y = 3 + x; x = y + 3; y = 2x - 3; x + y = 6; y = \frac{1}{2}x + 3; y = x - 1; \\ y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{8}; y = -2x + 1; y = 0,7x + 2; x - y = 6.$$

61. Să se construiască dreptele:

$$3x + y = 0; y = \frac{1}{2}x - 2; y = \frac{1}{2}x - 1; y = \frac{1}{2}x + 1; y = \frac{1}{2}x + 2; x + y + 3 = 0; 4x + 3y = 18.$$

62. Să se verifice pe cale grafică dacă dreptele ce au ecuațiile: $5x - y = 7$, $x - 4y + 10 = 0$, $2x + 3y = 13$ sînt concurente.

63. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin relația $f(x) = ax + b$. Să se determine a și b , știind că punctele $A(2,7)$ și $B(1,5)$ aparțin graficului funcției $f(x)$.

$$\text{R. } a = 2, b = 3.$$

64. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Să se determine a și b astfel că: $f(1) = 2$ și $f(-1) = 6$.

2) Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = -2x + 4$.

R. 1) $a = -2$; $b = 4$.

65. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = -2x + 4$. Care sînt valorile lui x pentru care $f(x)$ aparține intervalului $(4, 6)$.

R. $-1 < x < 0$.

66. Să se afle punctele de intersecție cu axele de coordonate ale dreptei ce trece prin punctele $A(2, 3)$ și $B(-1, -3)$.

R. $(0, -1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

67. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unde $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$. Se cere să se determine a și b astfel ca $f(1) = 1$, $f(-2) = 7$.

R. $a = -2$, $b = 3$.

68. Folosind tabelul de variație, să se studieze monotonia funcției $y = 2x - 4$, apoi să se afle valorile funcției la extremitățile intervalului $[-1, 3]$.

R. (funcția este strict crescătoare) -6 ; 2 .

69. Să se studieze semnul funcției $y = -3x + 1$, folosind tabelul de variație. Același lucru pentru $f(x) = 5x - 6$.

70. Să se determine a și b din $f(x) = ax - b$, știind că dreapta corespunzătoare are ordonata la origine de 2 unități și măsura unghiului pe care îl face cu xx' este de 30° . Aceeași întrebare dacă unghiul are măsurile de: 45° ; 60° ; 0° .

R. Pentru 30° : $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 2$; pentru 45° : $a = 1$, $b = 2$;

pentru 60° : $a = \sqrt{3}$, $b = 2$; pentru 0° : $a = 0$, $b = 2$.

71. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma $f(x) = \frac{1}{5-x}$. a) Este această exprimare corectă?

b) Să se studieze monotonia acestei funcții pentru $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ și $x \in \{8, 9, 10\}$.

72. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma $f(x) = \frac{8x-2}{4x+1}$. a) Este această exprimare corectă?

b) Pentru ce valori reale ale lui x , $f(x)$ devine 0? c) Pentru ce valori reale ale lui x , $f(x) \in \mathbb{Z}$?

R. b) $x = \frac{1}{4}$, c) $x = \left\{ -\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right\}$.

73. Se consideră $f(x) = \frac{3}{4x^2-9}$. a) Să se afle domeniul de definiție al acestei funcții.

b) Pentru ce valoare a variabilei x funcția $f(x)$ devine zero?

R. a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{3}{2} \right\}$; b) 0.

74. În tabelul următor se află corespondența dintre două valori ale lui x și două valori ale lui y printr-o funcție $f(x) = ax + b$. 1) Să se determine $f(x)$. 2) Să se completeze tabelul.

x	-2	0	1	4	5
y	-11	-5			

R. $f(x) = 3x - 5$.

75. Se consideră $f(x) = ax - 3$, ($a \in \mathbb{R}$). a) Să se arate că dreapta corespunzătoare lui $f(x)$ trece prin punctul $(0, -3)$, oricare ar fi a . b) Pentru ce valori ale lui a dreapta trece prin punctul $(1, 8)$?

R. b) $a = 11$

76. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC = 12$ cm se duc paralele cu ipotenuza la distanțe de câte 1 cm. Să se înscrie într-un tabel corespondența dintre distanțele variabile și lungimile paralelelor (mărginite la catetele triunghiului dreptunghic).

77. Să se reprezinte grafic variația lungimii unui cerc în funcție de raza cercului ($\pi = 3,14$), luând pentru R valorile 1, 2, 3, 4, 5, cm.

78. Un dreptunghi are baza de 3 m și înălțimea variabilă. Să se reprezinte grafic variația ariei dreptunghiului în funcție de înălțime.

79. Un pieton a plecat din oraș la ora 12 și a mers cu o viteză constantă de 3 km pe oră. La ora 14 pleacă pe același drum un alt pieton care merge cu o viteză de 4,5 km pe oră. La ce oră și la ce distanță de oraș ajunge al doilea pieton pe cel dintâi? (Soluție grafică.)

80. Un triunghi ABC are vîrfurile în punctele $A(2,0)$, $B(6,0)$, $C(x,5)$. Știind că $0 \leq x \leq 6$ și $x \in \mathbb{Z}$, să se studieze: a) variația înălțimii triunghiului dusă din vîrfurile C , b) variația ariei triunghiului ABC (unitățile în cm).

R. a) $h = 5$ cm (constantă); b) $A = 10$ cm².

81. Într-un sistem de axe rectangulare se consideră punctele: $M(x+1,0)$, $N(x+4,0)$, $P(2,4)$. Dacă $x \in [0,3]$ și $x \in \mathbb{N}$, să se afle: a) cum variază baza triunghiului MNP ; b) care este variația înălțimii duse din vîrfurile P al triunghiului; c) care este variația ariei acestui triunghi (dimensiunile în dm).

R. a) baza triunghiului = 3 dm (constantă); b) înălțimea triunghiului = 4 dm (constantă); c) Aria = 6 dm² (constantă).

Ecuatii de gradul I cu o necunoscută

Să se rezolve următoarele ecuații de gr. I sau care conduc la ecuații de gr. I.

$$82. \frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{4}{x+2x^2+x^3} = \frac{5}{2x+2x^2} \quad \text{R. } x=1.$$

$$83. \frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1} \quad \text{R. } x=1\frac{1}{2}.$$

$$84. (x-1)(x-2) = (x-3)(x-4) \quad \text{R. } x=2\frac{1}{2}.$$

$$85. \frac{x-\frac{1}{0,3}}{2+\frac{1}{0,5}} - \frac{1-x}{3+\frac{1}{5}} = \frac{3-\frac{x}{0,2}}{0,6} + 7\frac{19}{96} \quad \text{R. } x=1\frac{1}{2}.$$

$$86. \frac{x-3}{2} - \frac{2(1-3x)}{0,2} + 1 = \frac{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{2} - 7. \quad \text{R. } x = \frac{4}{23}.$$

$$87. x + \frac{1}{2} \left[\frac{2(x+1)}{3} + \frac{4(x+2)}{5} \right] = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \left[\frac{3(x-1)}{4} - \frac{6(x-1)}{5} \right]. \quad \text{R. } x = -\frac{20}{23}.$$

$$88. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) - 1 \right] - 1 \right\} - 1 = 0. \quad \text{R. } x=30.$$

$$89. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 1 \frac{1}{2} \right) - 1 \frac{1}{2} \right] - 1 \frac{1}{2} \right\} - 1 \frac{1}{2} = 0. \quad \text{R. } x=45.$$

$$90. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 2 \frac{1}{2} \right) - 2 \frac{1}{2} \right] - 2 \frac{1}{2} \right\} - 2 \frac{1}{2} = 0. \quad \text{R. } x=75.$$

$$91. \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x + 2 \right) + 2 \right] + 2 \right\} - 1 = 0. \quad \text{R. } x=3.$$

Să se rezolve ecuațiile următoare în care necunoscuta este x

$$92. \frac{16a^2x^2 - 48ax + 36}{8ax - 12} - \frac{ax - 5}{5} - \frac{3ax}{2} - \frac{3ax}{10} = 2 - x. \quad \text{R. } x=4.$$

$$93. \frac{36 - x^2}{x + 6} - \frac{12x^2 + 36x + 27}{3(2x + 3)} = \frac{2x - 1}{5}. \quad \text{R. } x = \frac{16}{17}.$$

$$94. \left(\frac{a^2 + x^2}{2ax} - 1 \right) : (a - x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{a} + \frac{1}{ax}. \quad \text{R. } x = \frac{2}{3}.$$

$$95. \left(\frac{x^2 + b^2}{2bx} - 1 \right) : (x - b) = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2x} + \frac{4}{2bx} - \frac{4}{2ab} - \frac{4a - 8}{2abx} \quad \text{R. } x=2.$$

$$96. \frac{1 - 36x^2}{6x + 1} \cdot \frac{1 - 6x}{0,25(4x^2 - 16)} : \frac{1 - 12x + 36x^2}{x - 2} = 1. \quad \text{R. } x=-1.$$

$$97. \frac{108 - 3x^2}{18 + 3x} - \frac{12x^2 + 36x + 27}{12x + 18} = \frac{2x + 3}{2}. \quad \text{R. } x=1.$$

$$98. \frac{x^2 + 2ax}{x^3 - a^3} + \frac{x}{(x + a)^2 - ax} = \frac{1}{x - a}, \quad x \neq a. \quad \text{R. } x=-a.$$

99. Să se rezolve ecuația în care necunoscuta este a .

$$\frac{4a^2 - 1}{1 + 2a} + \frac{a^2 + 9 + 6a}{(3 + a)^2} = 8. \quad \text{R. } a=4.$$

$$100. \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} - \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{1,5x - 2}{x^2 - 1}. \quad \text{R. } x=1\frac{1}{3}.$$

$$101. -4x - \{5x - [6x - (7x - (8x - 9))]\} = -10. \quad \text{R. } x=\frac{3}{2}.$$

$$102. \frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2x^2+2x+3}{(x+1)(x+3)} = \frac{2x^2+2}{(x+2)(x+3)} + 2. \quad \mathbf{R.} \ x = -\frac{1}{2}.$$

$$103. \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{7} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}(x+2)+4 \right) + 6 \right] + 8 \right\} = 1. \quad \mathbf{R.} \ x = 1.$$

$$104. \frac{3x}{a^2+4n(a+n)} - \frac{2(a-n)x-a^2+4n^2}{a^3+4a^2n+4an^2} = \frac{1}{a}. \quad \mathbf{R.} \ x = 4n.$$

$$105. \frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(x-b)}{a-b}. \quad \mathbf{R.} \ x = 3b.$$

$$106. \frac{x-a}{x+b} = \frac{x-2a-b}{x+a+2b}. \quad \mathbf{R.} \ x = \frac{a-b}{2}.$$

$$107. (a+b+c)x - \frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{2abx}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} c. \quad \mathbf{R.} \ x = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$108. \frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}. \quad \mathbf{R.} \ x = \frac{ab}{a+b}.$$

$$109. x \left(\frac{x-2a}{x+a} \right)^3 + a \left(\frac{2x-a}{x+a} \right)^3 = x^2 - a^2. \quad \mathbf{R.} \ x = 1-a.$$

$$110. \frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}. \quad \mathbf{R.} \ x = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$111. \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} = \frac{a(x-b^2)+b(a^2-x)}{a(x-b^2)-b(a^2-x)}. \quad \mathbf{R.} \ x = a^2+b^2.$$

$$112. \frac{a^2-x}{x-2a} = \frac{2a+x}{a^2-x} + \frac{a^4}{a^2x+2ax-2a^3-x^2}. \quad \mathbf{R.} \ x = 2.$$

$$113. \frac{a^2+x}{b^2-x} - \frac{a^2-x}{b^2+x} = \frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}. \quad \mathbf{R.} \ x = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$114. \frac{a^2+ax+x^2}{a^3+a^2x+ax^2+x^3} - \frac{a^2-a^2x-ax^2-x^3}{a^4-x^4} = \frac{1}{a-x}.$$

$\mathbf{R.}$ Nu are soluție în \mathbf{R} , dar are în \mathbf{C} , $x_1 = a + \frac{a\sqrt{-3}}{2}$, $x_2 = a - \frac{a\sqrt{-3}}{2}$.

$$115. \frac{2(x-a)}{a^2-c^2-2ax+x^2} + \frac{c-x}{a^2-ac+cx-2ax+x^2} = \frac{1}{x-a}. \quad \text{R. } x = \frac{a(a-c)}{a-2c}.$$

Să se verifice identitățile:

$$116. \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

$$117. \pi h \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{\pi h}{3} \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

$$118. (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$119. \left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2 = 1.$$

$$120. \frac{1-ax+(a+x)x}{2ax-a^2x^2-1} : \left[1 + \frac{a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2}\right] = -\frac{1}{1+a^2}.$$

Indicație. Avem succesiv: $\frac{1-ax+ax+x^2}{-(a^2x^2-2ax+1)} : \frac{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2} = -\frac{1}{1+a^2}.$

$$121. x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2.$$

$$122. (1+y+y^2+y^3)^2=1+2y+3y^2+4y^3+3y^4+2y^5+y^6.$$

Inegalități și inecuații

123. O brigadă de tractoriști trebuie să are câte 50 ha pe zi. Cu cât trebuie să-și mărească norma zilnică pentru a ara în trei zile mai mult de 210 ha ?

Rezolvare. Dacă notăm cu x creșterea zilnică a normei, în cele trei zile brigada va ara $3(50+x)$ ha și trebuie ca $3(50+x) > 210$. Rezolvăm inecuația. Împărțim ambii membri cu 3 și găsim:

$$50+x > 70, \text{ de unde } x > 70-50; \quad x > 20.$$

Brigada va trebui să are zilnic cu mai mult de 20 ha peste normă.

Exerciții cu inegalități

124. Să se adune inegalitățile următoare:

$$5 > -3; \quad 8 > 5.$$

$$2 < 5; -7 < -3.$$

$$R. -5 < 2.$$

$$x^2 > a+1; 2x > a-5.$$

$$R. x^2 + 2x > 2a - 4.$$

$$3x + y < 2a + 1; 3y - 2x < 14 - 2a.$$

$$R. 4y + x < 15.$$

125. In exemplele următoare, să se scadă inegalitatea a doua din prima:

$$16 > 13; 2 < 5.$$

$$R. 14 > 0.$$

$$-8 < -5; -2 > -7.$$

$$R. -6 < 2.$$

$$2x > b^2; a^2 < 9 - x.$$

$$R. x - a^2 > b^2 - 9.$$

$$(a-b)^2 < 2; (a+b)^2 > 8.$$

$$R. 2ab > 3.$$

126. Să se înmulțească ambii membrii ai inegalităților următoare cu factorul indicat:

$$5 > -2 \text{ cu } 5.$$

$$R. 25 > -10.$$

$$-7 < -5 \text{ cu } -2.$$

$$R. 14 > 10.$$

$$a^2 > b \text{ cu } -b.$$

$$R. \text{ Dacă } b > 0, -a^2b < -b^2.$$

$$\text{Dacă } b < 0, -a^2b > -b^2.$$

$$a-1 < b \text{ cu } -m.$$

$$R. \text{ Dacă } m > 0, m-ma > -mb.$$

$$\text{Dacă } m < 0, m-ma < -mb.$$

127. Să se împartă ambii membrii ai inegalităților următoare cu numărul indicat:

$$-6 < 9 \text{ cu } 3.$$

$$R. -2 < 3.$$

$$-15 > -35 \text{ cu } -5.$$

$$R. 3 < 7.$$

$$a^3 < a^2 \text{ cu } -a.$$

$$R. \text{ Dacă } 0 < a < 1, -a^2 > -a.$$

$$\text{Dacă } a < 0, -a^2 < -a.$$

$$(a-b)^3 > (a-b)^2 \text{ cu } (a-b).$$

$$R. \text{ Dacă } a-b > 1, (a-b)^2 > a-b.$$

Să se rezolve inecuațiile următoare:

$$128. x+4 > 2-3x.$$

$$R. x > -\frac{1}{2} \text{ sau } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

$$129. 4(x-1) > 2+7x.$$

$$R. x < -2 \text{ sau } x \in (-\infty, -2).$$

$$130. \frac{3x}{2} - \frac{3}{5} \leq 4x-3.$$

$$R. x \geq \frac{24}{25} \text{ sau } x \in \left[\frac{24}{25}, +\infty\right).$$

$$131. \frac{37-2t}{3} + 9 < \frac{3t-8}{4} - 7.$$

$$R. t > 56 \text{ sau } t \in (56, +\infty).$$

$$132. (x-1)^2 + 7 > (x+4)^2.$$

$$R. x < -\frac{4}{3} \text{ sau } x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right).$$

$$133. \frac{7-6x}{2} + 12 \leq \frac{8x+1}{3} - 10x.$$

$$R. x \leq -3,5 \text{ sau } x \in (-\infty, -3,5].$$

$$134. \frac{y-2}{2} \geq \frac{1-3y}{3}. \quad \text{R. } y \geq \frac{8}{9} \text{ sau } y \in \left[\frac{8}{9}, +\infty \right).$$

$$135. \frac{7x+5}{3} > 4x + \frac{1}{5}. \quad \text{R. } x < \frac{22}{23} \text{ sau } x \in \left(-\infty, \frac{22}{23} \right).$$

$$136. \frac{z}{8} + \frac{1}{2} \geq \frac{5(z+4)}{8}. \quad \text{R. } z \leq -4 \text{ sau } z \in (-\infty, -4].$$

$$137. \frac{x}{3} - 2 \geq \frac{3-5x}{4} + 2. \quad \text{R. } x \geq 3 \text{ sau } x \in [3, +\infty).$$

$$138. (3a-8)(5-a) > 0. \quad \text{R. } \frac{2}{3} < a < 5 \text{ sau } a \in \left(\frac{2}{3}, 5 \right).$$

$$139. (2-3a)(2a+7) > 0. \quad \text{R. } -\frac{7}{2} < a < \frac{2}{3} \text{ sau } a \in \left(-\frac{7}{2}, \frac{2}{3} \right).$$

Să se afle valorile lui $y \in \mathbb{Z}$ care fac fracția pozitivă :

$$140. \frac{3y-7}{2-5y}. \quad \text{R. Soluțiile sînt 1 și 2.}$$

Să se afle pentru ce valori ale lui a fracțiile următoare sînt negative (soluția grafică):

$$141. \frac{8-3a}{7a-2}. \quad \text{R. } a < \frac{2}{7} \text{ și } a > \frac{8}{3} \text{ sau } a \in \left(-\infty, \frac{2}{7} \right) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty \right).$$

$$142. \frac{5a+8}{3a-7}. \quad \text{R. } -1\frac{3}{5} < a < 2\frac{1}{3} \text{ sau } a \in \left(-1\frac{3}{5}, 2\frac{1}{3} \right).$$

143. Pornind de la inegalitatea $(a-b)^2 > 0$, să se demonstreze că suma pătratelor a două numere neegale este totdeauna mai mare decît dublul produsului aceluiași numere.

144. Să se arate că într-un triunghi oarecare jumătatea perimetrului este mai mare decît orice latură.

Indicație. a , b și c fiind laturile unui triunghi, se folosește relația $a < b+c$ și se ține seama că se poate aduna a în ambii membri ai inegalității.

145. Să se arate că în orice triunghi dreptunghic cu catetele neegale înălțimea coborîtă pe ipotenuză este mai mică decît jumătate din ipotenuză.

146. Într-un vas sînt 4 l de apă cu temperatura de 13°C . Pînă la ce temperatură t trebuie să încălzim 5 l de apă pentru ca, prin amestecul cu apa din primul vas, să obținem apă cu o temperatură de cel puțin 25°C și cel mult 30°C ?

$$\text{R. } 34,6^\circ < t < 43,6^\circ \text{ sau } t \in (34,6^\circ; 43,6^\circ).$$

147. Să se arate pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{N}$ expresiile următoare sînt: pozitive, negative, n-au sens.

$$\frac{3}{x+4}; \frac{x+8}{8}; \frac{-6}{x+5}; \frac{2x-4}{-9}; \frac{-(x+4)}{-8}.$$

Sisteme de ecuații de gradul întâi cu două sau trei necunoscute

Să se rezolve următoarele sisteme de două ecuații cu două necunoscute:

$$148. \begin{cases} 2(x+1)=3(y-1)+14 \\ 4x-3(2x+y-1)=2(-x+y)+8 \end{cases} \quad \mathbf{R. (3;-1).}$$

$$149. \begin{cases} 2(x+2y)-3(x+3y)=5 \\ x=1-2y \end{cases} \quad \mathbf{R. (5;-2).}$$

$$150. \begin{cases} 4(0,1x+1)+5=1,1y \\ \frac{11+0,3y-x}{5}-5=4\left(\frac{1}{5}-1\right) \end{cases} \quad \mathbf{R. (5;10).}$$

$$151. \begin{cases} \frac{x+1}{y+2}=5 \\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5 \end{cases} \quad \mathbf{R. (4;-1).}$$

$$152. \begin{cases} \frac{2x+3}{3y-2}=1 \\ x(2y-5)-2y(x+3)=2x+1 \end{cases} \quad \mathbf{R. (-1;1).}$$

$$153. \begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x \end{cases} \quad \mathbf{R. (11;6).}$$

Să se rezolve cu ajutorul proporțiilor derivate următoarele sisteme:

$$154. \begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \\ y-x=7,2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \\ 2x+3y=246 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{y}{2,25} \\ x+4y=14 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases};$$

Să se rezolve grafic sistemele:

$$155. \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{3y-1}{3}=\frac{5}{6} \end{cases} \quad \mathbf{R. (4;3).}$$

$$156. \begin{cases} \frac{3x-1}{5}+3y-4=15 \\ \frac{3y-5}{6}+2x-8=\frac{23}{3} \end{cases} \quad \mathbf{R. (7;5).}$$

$$157. \begin{cases} 2x+y=-\frac{2a}{3} \\ x-\frac{y}{2}=-\frac{2a}{3} \end{cases} \quad \mathbf{R.} \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{3} \right).$$

$$158. \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ \frac{(x-3)^2}{2}=10+\frac{(1-x)^2}{2}-y \end{cases} \quad \mathbf{R.} (-2;2).$$

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații în care a și b sînt numere date:

$$159. \begin{cases} \frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0 \\ \frac{x+y-b}{a} + \frac{x-y-a}{b} = 0 \end{cases} \quad \mathbf{R.} (a;b).$$

$$160. \begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ (a-b)x + (a+b)y = 2a^2 - 2b^2 \end{cases} \quad \mathbf{R.} (a+b); (a-b).$$

$$161. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2} \end{cases} \quad \mathbf{R.} (a+b)^2; (a-b)^2.$$

$$162. \begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2ab \\ (a+c)x + (a-c)y = 2ac \end{cases} \quad \mathbf{R.} (a;-a).$$

$$163. \begin{cases} (a+2b)x - (a-2b)y = 6ac \\ (a+3c)y - (a-3c)x = 4ab \end{cases} \quad \mathbf{R.} (a-2b+3c); (a+2b-3c).$$

$$164. \begin{cases} \frac{x+a}{y-b} = \frac{2a+b}{a-2b} \\ \frac{x+5-y}{y-x+3} = \frac{2b+5}{3-2b} \end{cases} \quad \mathbf{R.} (a+b); (a-b).$$

$$165. \begin{cases} \frac{a-x}{b} - \frac{b-y}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab} \\ \frac{a-x}{b} + \frac{b-y}{a} = \frac{(a-b)^2}{ab} \end{cases} \quad \mathbf{R.} (b;a).$$

$$166. \begin{cases} \frac{a^2-b^2}{x} + \frac{b^2}{y} = a \\ \frac{a+b}{x} + \frac{b}{y} = 2 \end{cases} \quad \mathbf{R. (a+b; b).}$$

$$167. \begin{cases} ax+by=2(a^2-b^2) \\ \frac{y}{a-b} - \frac{x}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{ab} \end{cases} \quad \mathbf{R. \frac{a^2-b^2}{a}; \frac{a^2-b^2}{b}.}$$

$$168. \begin{cases} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{y+b} = \frac{a+b}{ab} \\ \frac{a}{x-a} - \frac{b}{y+b} = \frac{a^2-b^2}{ab} \end{cases} \quad \mathbf{R. (a+b); (a-b).}$$

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\frac{1}{x-a}$ și $\frac{1}{y+b}$.

$$169. \begin{cases} x-a(1-y)=0 \\ a(x-a)+y=\frac{1}{a} \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{a^3-a+1}{a^2-1}; \frac{1}{a(1-a^2)} \right).}$$

$$170. \begin{cases} a\left(x-\frac{1}{b}\right)=b\left(y+\frac{1}{a}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{a+b}{ab}; \frac{a-b}{ab} \right).}$$

$$171. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a \end{cases} \quad \mathbf{R. a(a+b); b(a-b).}$$

$$172. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{cases} \quad \mathbf{R. \frac{a}{a-b}; \frac{b}{a+b}.}$$

Indicație. Luăm ca necunoscute $\frac{x}{a+b}$ și $\frac{y}{a-b}$.

$$173. \begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a} = a \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a-b} = -b \end{cases} \quad \mathbf{R. b(a-b); a(a-b).}$$

$$174. \begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 1 \end{cases} \quad \text{R. } \frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}.$$

$$175. \begin{cases} \frac{x}{2a-b} - \frac{y}{2a+b} = \frac{8ab}{4a^2-b^2} \\ \frac{x}{2a-b} + \frac{y}{2a+b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{cases} \quad \text{R. } 2a+b; 2a-b.$$

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\frac{x}{2a-b}$ și $\frac{y}{2a+b}$.

Să se rezolve prin metoda reducerii

$$176. \begin{cases} 2x+3y+4z=61 \\ 3x+2y+z=54 \\ 5x-4y+3z=44 \end{cases} \quad \text{R. } (12,7;4).$$

Să se rezolve prin metoda substituției

$$177. \begin{cases} 5x-3y+2z=-7 \\ 7x+5y-4z=-5 \\ x+y-z=-1 \end{cases} \quad \text{R. } (-1;2;2).$$

Să se rezolve sistemele următoare

$$178. \begin{cases} 2x-3z-4y=-1 \\ 3y+z-x=6 \\ 5z-3x+2y=-13 \end{cases} \quad \text{R. } (-2;3;-5).$$

$$179. \begin{cases} x+y-z=-6 \\ z-3x+2y=1 \\ 3y+2z-x=-5 \end{cases} \quad \text{R. } (-2;-3;1).$$

$$180. \begin{cases} x-y+2z=6 \\ z-y-2x=-\frac{1}{2} \\ 2x+3y-z=-\frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{R. } \left(2;-3;\frac{1}{2}\right).$$

$$181. \begin{cases} x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \\ y+z-x=3 \end{cases} \quad \mathbf{R. (2;4;5).}$$

$$182. \begin{cases} 2x+5y+4z=17 \\ 3x+2y-z=2 \\ 5x+3y-2z=2 \end{cases} \quad \mathbf{R. (-1;3;1).}$$

$$183. \begin{cases} x+y-6z=9 \\ x-y+4z=5 \\ 3y-2x-z=4 \end{cases} \quad \mathbf{R. (8;7;1).}$$

$$184. \begin{cases} 2x+3y-z=13 \\ 3x+2y-2z=13 \\ 5x-4y-2z=11 \end{cases} \quad \mathbf{R. (5;2;3).}$$

$$185. \begin{cases} 4x-3y+2z=28 \\ 3x+2y-5z=16 \\ 2x+y-3z=10 \end{cases} \quad \mathbf{R. (10;8;6).}$$

$$186. \begin{cases} 2x+3y+4z=53 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31 \end{cases} \quad \mathbf{R. (3;5;8).}$$

$$187. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 13 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 11 \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8} \right).}$$

$$188. \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7} \end{cases} \quad \mathbf{R. \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right).}$$

$$189. \begin{cases} x+y+z=99 \\ \frac{x}{y}=\frac{5}{3} \\ \frac{y}{z}=\frac{3}{1} \end{cases} \quad \text{R. (55;33;11).}$$

$$190. \begin{cases} \frac{1}{x+y}=1 \\ \frac{2}{x+z}=1 \\ \frac{3}{x+y}=1 \end{cases} \quad \text{R. (0;1;2).}$$

$$191. \begin{cases} \frac{3x+y}{z+1}=2 \\ \frac{3y+z}{x+1}=2 \\ \frac{3z+x}{y+1}=2 \end{cases} \quad \text{R. (1;1;1).}$$

$$192. \begin{cases} \frac{xy}{4y-3x}=20 \\ \frac{xz}{2x-3z}=15 \\ \frac{yz}{4y-5z}=12 \end{cases} \quad \text{R. (5;4;3).}$$

$$193. \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{R. (20;80;60).}$$

Indicație. Se folosește substituția $\frac{1}{x}=u$; $\frac{1}{y}=v$; $\frac{1}{z}=t$.

$$194. \begin{cases} \frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{18} \\ 3x+5y+z=34 \end{cases} \quad \text{R. (4;2;12).}$$

Indicație. Se amplifică primul raport cu 3, al doilea cu 5 și se aplică apoi proprietatea șirului de rapoarte egale.

$$195. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{32}{15} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{17}{15} \end{cases} \quad \mathbf{R.} \left(\frac{3}{4}; 3; 1\frac{1}{4} \right)$$

$$196. \begin{cases} 2x + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = 4 \\ \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{17}{12} \\ x + \frac{4}{y} = \frac{10}{3} \end{cases} \quad \mathbf{R.} (2; 3; 4).$$

$$197. \begin{cases} (x+2)(2y+1) = (2x+7)y \\ (x-2)(3z+1) = (x+3)(3z-1) \\ (y+1)(z+2) = (y+3)(z+1) \end{cases} \quad \mathbf{R.} (7; 3; 1).$$

Să se determine x, y și z din sistemele:

$$198. \begin{cases} x+y-z=a \\ x+z-y=b \\ y+z-x=c \end{cases} \quad \mathbf{R.} \left(\frac{1}{2}(a+b); \frac{1}{2}(c+a); \frac{1}{2}(b+c) \right)$$

$$199. \begin{cases} ax+by-bz=c \\ ay+bx-bz=c \\ az+by-bx=c \end{cases} \quad \mathbf{R.} \left(\frac{c}{a}; \frac{c}{a}; \frac{c}{a} \right)$$

$$200. \begin{cases} x-3y+z=b \\ x-y+3z=c \\ 3x-y+z=a \end{cases} \quad \mathbf{R.} \left(\frac{4a-b-c}{10}; \frac{-4b+c+a}{10}; \frac{4c-a-b}{10} \right)$$

$$201. \begin{cases} ax+by-cz=2ab \\ by+cz-ax=2bc \\ cz+ax-by=2ac \end{cases} \quad \mathbf{R.} (b+c; c+a; a+b).$$

$$202. \begin{cases} ax+by-cz=b^2 \\ bx-cy+az=a^2 \\ cx+ay-bz=c^2 \end{cases} \quad \mathbf{R.} (c; b; a).$$

$$203. \begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = 3abc \\ abx - bcy = b^2c - ac^2 \\ bcy - acz = ac^2 - a^2b \end{cases} \quad \mathbf{R.} \left(\frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}, \frac{ab}{c} \right).$$

$$204. \begin{cases} ax + by = a^2 + b(a+c) \\ ay - cz = 0 \\ z - x = -b \end{cases} \quad \mathbf{R.} (a+b; c; a).$$

$$205. \begin{cases} \frac{x-2(z-1)}{(a+b)^2} = \frac{1}{ab} \\ x-y+z=5 \\ \frac{a}{b} - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{b}{a} = 0 \end{cases} \quad \mathbf{R.} \left(\frac{(a+b)^2}{ab}, \frac{(a-b)^2}{ab}, 1 \right).$$

Sisteme de inecuații de gradul I

Să se rezolve următoarele sisteme de inecuații de gradul I:

$$206. \begin{cases} \frac{x+0,5}{9} + \frac{1}{2} < 3x+1 \\ 12x-1 > 10x+3 \end{cases} \quad \mathbf{R.} x > 2 \text{ sau } x \in (2, +\infty).$$

$$207. \begin{cases} \frac{1+x}{1} < \frac{x}{3} + 1 \\ \frac{3x+2}{2} \leq \frac{2x+1}{4} + \frac{3}{2} \end{cases} \quad \mathbf{R.} x < -\frac{3}{5} \text{ sau } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{5} \right).$$

$$208. \begin{cases} \frac{2x-1}{5} \geq \frac{x+1}{2} - \frac{23}{5} \\ \frac{3x+2}{7} < \frac{x}{3,5} + 6 \end{cases} \quad \mathbf{R.} x \leq 39 \text{ sau } x \in (-\infty, 39].$$

$$209. \begin{cases} \frac{3-x}{2} < \frac{x}{5} \\ 4x < 3x+1 \end{cases} \quad \mathbf{R.} \text{ Nu are soluții.}$$

$$210. \begin{cases} 5a-3 > 1+a \\ \frac{1}{2} - 3a \leq \frac{2}{3}a - 5 \end{cases} \quad \mathbf{R.} a \geq \frac{3}{2} \text{ sau } a \in \left[\frac{3}{2}, +\infty \right).$$

$$211. \begin{cases} 2(x-3)-1 < 5 \\ \frac{3x}{8}-7 > \frac{x}{12} \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

Să se rezolve următoarele inecuații simultane cu metoda grafică:

$$212. \begin{cases} 2x > 4x+6 \\ 4x+3 > 5x+1 \end{cases} \quad \text{R. } x < -3 \text{ sau } x \in (-\infty, -3).$$

$$213. \begin{cases} 5x-3 > 1+x \\ 0,5-3x \leq \frac{2}{3}x-5 \end{cases} \quad \text{R. } x \geq 1,5 \text{ sau } x \in [1,5, +\infty).$$

$$214. \begin{cases} 4x+7 > 2x+13 \\ 3x-18 \leq 2x+1 \end{cases} \quad \text{R. } 3 < x \leq 19 \text{ sau } x \in (3, 19].$$

$$215. \begin{cases} 6x-7 > 5x-1 \\ 3x+6 > 8x-4 \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

Să se afle valorile întregi ale lui x care satisfac simultan inecuațiile

$$216. \begin{cases} 3x+7 > 7x-9 \\ x-3 > -3x+1 \end{cases} \quad \text{R. } x \in (1, 4) \text{ deci soluțiile sînt 2 și 3.}$$

Să se afle pentru ce valori ale lui a produsul următor este pozitiv. Să se folosească metoda grafică.

$$217. (2a-3)(3a-2). \quad \text{R. } a < \frac{2}{3} \text{ și } a > \frac{3}{2} \text{ sau } a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

218. Fie mulțimea $M = \{0; 1; 2; 3\}$.

a) Să se determine mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 143a - 17, a \in M\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} | x = 139b - 13, b \in M\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} | x = 126 - 12c, c \in M \text{ și } c < 1\}$.

b) Să se arate că $A \cap B = C$.

R. a) $A = \{126; 269; 412\}$; $B = \{126; 265; 404\}$; $C = \{126\}$.

b) $A \cap B = \{126\} = A \cap B = C$.

219. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{1+3\left[\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}\right]^2 - \left[\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}\right]^3 - 3\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}}{3\frac{x+y}{x-y} - 3\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3 - 1} \quad \text{R. } \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3.$$

220. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia devine egală cu 3.

$$E = \frac{x^5 + x^3 + x}{x^3 - x^2 + x} \quad \text{R. } (x^2 + x + 1); x \in \{-2; 1\}.$$

221. Să se arate în care sistem de numerație există relația: $\left(\frac{4}{14} + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{140}{104} = 1$.

Indicație. $\left(\frac{4}{x+4} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2+4x}{x^2+4} = 1$.

R. 5.

222. Se dă polinomul $E_1 = 9x^3 + 18x^2 - 3x - 7$. a) Să se afle restul împărțirii prin $x+2$ fără a efectua împărțirea. b) Cu ce polinom a fost împărțit E_1 știind că s-a obținut câtul $x+2$ și restul $x+1$?

R. a) -1 ; b) $9x^2 - 4$.

223. Să se determine mulțimea M și să se afle cardinalul ei:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y, y \in \mathbb{N}, 5 < x < 9\}.$$

R. $M = \{6; 8\}$; Card $M = 2$.

224. Se consideră fracția algebrică: $\frac{ax^2 + x^2 - 2ax - 2x + a + 1}{x - 1}$.

1) a fiind număr real să se afle domeniul de existență a fracției privitor la variabila x .

2) Să se simplifice fracția.

3) Să se determine valoarea lui x pentru ca expresia simplificată să devină $a + 1$.

R. 1) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$; 2) $(x-1)(a+1)$; 3) 2.

225. Se consideră fracția algebrică: $\frac{a^5 + 2a^3 - 2a^4 - 2a^2 + a}{a(2a^2 - 2)(a^2 + 1)}$.

1) Pentru ce valori ale lui a fracția are sens?

2) Să se simplifice fracția.

3) Să se determine valoarea lui a pentru care fracția ia valoarea -1 .

R. 1) $a \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$; 2) $\frac{a-1}{2(a+1)}$; 3) $a = -\frac{1}{3}$.

226. Se dă expresia:

$$\left[\left(\frac{8x^3 - 1}{2x - 1} - 6x \right) \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} - (8x^2 - 1) \right] \cdot \frac{1}{1 - 2x}.$$

1) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?

2) Să se aducă expresia la formă cea mai simplă.

3) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru

$$x = \frac{\sqrt{1,0404} + \frac{49}{50} - 1,1(6) \cdot \frac{3}{7}}{1:(394 \cdot 19 + 2606 \cdot 19 - 2999 \cdot 19)} \cdot \frac{1}{19}.$$

R. 1) $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\}$; 2) $E = 6x$; 3) 9.

227. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 11\}$. Să se determine mulțimile

a) $M = \{x \in \mathbb{N} | x = 2n, n \in A\}$; b) $P = \{x \in \mathbb{N} | x = 3p, p \in A\}$.

R. $A = \{0; 1; 2; 3 \dots 10\}$. a) $M = \{0; 2; 4 \dots 20\}$ (numere pare)

b) $P = \{0; 3; 6 \dots 30\}$ (multipli de 3).

228. Se consideră expresia:

$$E = \left[(2+2x) \left(\frac{4x^2+21}{2+2x} - 6 \right) + \frac{8x^3-27}{4x^2+6x+9} \right] \cdot \frac{1}{2x-2}.$$

a) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?

b) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

c) Să se calculeze valoarea expresiei pentru: $x = \frac{\sqrt{1,0816} + \frac{24}{25} + 1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot 0,25 - 0,1(6) \cdot \frac{3}{2} + 0,75}$.

R. a) $x \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$; b) $2x-3$; c) $-\frac{3}{3}$.

229. Se consideră expresia:

$$E = \left[\left(\frac{125x^3+1}{1+5x} - 5x - \frac{15x-75x^2}{5x-1} - 15x \right) + 2(5x-1) \right] \cdot \frac{1}{5x-1}.$$

a) Pentru ce valori atribuite lui x expresia dată are sens?

b) Să se simplifice expresia.

c) Să se calculeze valoarea expresiei pentru: $x = \frac{\sqrt{1,1025} + \frac{19}{20} - 1,0(5) + \frac{1}{18}}{120:20 \cdot 5 \cdot 0,04 - 1,18}$.

R. 1) $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3} \right\}$; 2) $5x+1$; 3) 251.

230. Se dă expresia: $\left\{ \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a^2-b^2} \left[\frac{a^3-b^3-3ab(a-b)}{a^2-ab+b^2} \right] \right\} : \frac{ab}{a^2-ab+b^2}$ în care a și b

îndeplinesc condițiile $a \neq b$ și $a \neq -b$. Se cere:

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei, dacă:

$$a = \frac{(8^4 \cdot 3^5 \cdot 9^7) : (9^6 \cdot 8^3 \cdot 3^6) + 16 : 3 - \frac{1}{3} + 1}{\sqrt{1,004004} + \frac{499}{500} + 28}; \quad b = -10.$$

R. 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-\frac{1}{9}$

$$231. \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^2}{y^3 - xy^2 + x^2y - x^3} \right) \left(1 - \frac{y-1}{x} - \frac{y}{x^2} \right) \cdot xy \cdot (x-5).$$

- a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
b) Pentru ce valori ale lui x expresia este negativă?

R. a) $(x+1)(x-5)$; b) $-1 < x < 5$ sau $x \in (-1, 5)$.

$$232. \text{ Fie } E = \frac{x^2 - 2x + 6}{x^2 - 2x + 4}. \text{ Să se arate că } \forall x \in \mathbb{R}, E \text{ este pozitivă.}$$

$$\text{Indicație: } E = 1 + \frac{2}{(x-1)^2 + 2}.$$

$$233. \text{ Se dau expresiile: } A(x) = 1 + \frac{2x}{3 + \frac{4x}{5}}; B(x) = 9 - \frac{4 - \frac{15}{x}}{2}. \text{ Să se calculeze:}$$

$$a) E_1 = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) A; \quad b) E_2 = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) B.$$

$$c) \text{ Să se rezolve ecuația: } \left(2E_1 - E_2 + \frac{15}{4x+15} \right) = 1.$$

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{15+6x}{15+4x}; \quad 2) E_2 = \frac{15+2x}{2x}; \quad 3) 8x^2 - 30x - 225 = 0; \quad x_1 = \frac{15}{2}; \quad x_2 = -\frac{15}{4} \text{ (nu convine).}$$

234. Se dă ecuația:

$$\left[\left(\frac{a+2}{a-2} \right)^3 : \frac{a^3 + 4a^2 + 4a}{2 - 12a + 12} \cdot \frac{a}{3} \right] x + \left[\left(6a + \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16} \right] x = a^3 + 6a^2 + 12a + \frac{a+2}{a-2}.$$

- 1) Ce valoare trebuie să aibă a ca ecuația propusă să aibă sens?
2) Să se rezolve ecuația.

$$\text{R. 1) } a \neq -2; \quad 0; \quad 2; \quad 2) x = \frac{a(a^2 + 6a + 12)}{(a+2)^2}.$$

$$235. \text{ Fie } F = \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x - 5}. \text{ Pentru ce valori ale lui } x \in \mathbb{N}, F \text{ este un număr natural?}$$

R. (2, 3).

$$236. \text{ Se dau expresiile: } m_1 = \frac{ax^4 - 4ax^2 - 3ax^3 + 12ax}{ax}; \quad m_2 = \frac{a^2x^5 - 9x^3a^2 + 2a^4x^2 - 18a^2x^2}{a^2x^2};$$

$$m_3 = \frac{a^3x - 4x^4a^3 + 3x^5a^3 - 12a^3x^3}{a^3x^3}.$$

- 1) Să se găsească: c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

$$2) \text{ Să se determine } x \text{ din ecuația: } \left[\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_3} (2-x) \right] (x+3) - 1 = 0.$$

$$\text{R. 1) } x+2; (x^2-9)(x^2-4); \quad 2) x_1 = -2; \quad x_2 = 3.$$

237. Se dă fracția: $\frac{x^2-4x+6x\sqrt{y}+9y-12\sqrt{y}}{x^2-2x+3x\sqrt{y}-6\sqrt{y}}$.

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Ce valoare numerică are fracția dată pentru $y = \frac{4}{9}$? R. 1) $\frac{x+3\sqrt{y}-4}{x-2}$; 2) 1.

238. Se dau expresiile: $f(x)=x^2+2x-15$; $f_1(x)=x^2-6x+9$; $f_2(x)=x^2+10x+25$.

1) Să se arate că $f(x)$ este medie proporțională între $f_1(x)$ și $f_2(x)$.

2) Să se simplifice fracția: $E = \frac{f_2(x)+f(x)}{f_2(x)-f(x)}$. R. $\frac{x+1}{4}$.

239. Să se simplifice fracția: $\frac{3x^2+2xy-y^2}{6x^3+x^2y-4xy^2+y^3}$.

Dacă $y=6$, să se arate pentru ce valori ale lui x expresia nu are sens.

R. $\frac{1}{2x-y}$; $x \neq 2$; 3; -6.

Indicație. Se va ține seamă de factorii obținuți la numărător și scriind unul din termenii de la numitor sub formă de sumă a trei termeni se obține ușor gruparea termenilor, sau se va scrie: $-4xy^2 = -5xy^2 + xy^2$ și $6x^3$ sub formă de sumă a doi termeni și apoi gruparea termenilor este evidentă.

240. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 4\}$.

a) Să se enumere elementele celor două mulțimi.

b) Sînt echipotente mulțimile A și B ?

c) Să se determine mulțimea: $M = \{x \in A | y \in B \text{ astfel încît } x < y\}$.

R. a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

b) Nu, căci $\text{Card } A = 6$ și $\text{Card } B = 5$. c) $M = \{0; 1; 2; 3\}$.

241. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este $8a$, iar raportul dimensiunilor bazei este: $\frac{x}{y} = \frac{2a+b}{2a-b}$ ($a > 0$; $b > 0$).

1) Să se calculeze aria bazei.

2) Să se afle înălțimea paralelipipedului știind că $V = 8a^2b - 4a^3 + ab^2 - 2b^3$.

3) Să se calculeze diagonala paralelipipedului cînd $a=4$ și $b=3$.

R. 1) $4a^2 - b^2$; 2) $2b - a$; 3) $5\sqrt{6}$.

242. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{4x^2-4}{x^3-2x^2-x+2} - \frac{(x^3+8)(x^2-1)}{x^4-5x^2+4} = 0. \quad \text{R. 0.}$$

243. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{x^2-6xy+y^2}{(x+y)^2-8xy} - x^3 \right] : (1-x) + x = 9. \quad \text{R. } x_1=2; x_2=-4.$$

244. Se dau expresiile: $E_1 = x^4 - 4x^3 + 12x - 9$, $E_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{x^2-3}$.

1) Să se descompună în factori E_1 .

2) Să se arate că $E_1 \cdot E_2$ și $\frac{E_1}{E_2}$ sînt pătrate perfecte.

R. 1) $E_1 = (x^2-3)(x-3)(x-1)$; 2) $E_1 \cdot E_2 = (x-1)^2(x-3)^2$; $\frac{E_1}{E_2} = (x^2-3)^2$.

245. Se dă expresia:

$$E_1 = \left(\frac{2x^4 + x^5 - 2x^2y + x^3 - 2y - 4xy}{4(4x^3 - 8y)} + 1 + \frac{2x+2}{4} \right) : (x+5).$$

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia E_1 este un număr întreg ?

3) Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} E_1 \cdot \sqrt{256} < 2x-3, \\ \frac{x}{3} - 2 > \frac{3-5x}{4} + 2 \end{cases}$$

R. 1) $\frac{x+5}{16}$; 2) $x = k16 - 5$ ($k \in \mathbb{Z}$); 3) $x \in (8; +\infty)$.

246. Se dă expresia: $f(x) = \frac{7x+6}{8x+5}$ și mulțimile $A = \{2; 3; 13; 14\}$; $B = \{5; 6; 13\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției p : $A \cap B$ conține elemente prin care $f(x)$ se simplifică, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.
R. adevărată.

247. Se dau expresiile: $E_1 = \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 5a + 2}{(a^2 + a + 1)(a+1)^2}$; $E_2 = \frac{a^4 - 2a^3 + a}{(a^2 - 1)(a^2 - a - 1)}$.

1) Să se aducă expresiile la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui a avem $\frac{E_1 + E_2}{a+1} < 2$.

3) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1}{E_2} = a + 2$.

R. 1) $E_1 = \frac{a+2}{a+1}$; $E_2 = \frac{a}{a+1}$; 2) $a \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$;
3) $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

248. Se dau expresiile: $E_1 = \left\{ \left[\frac{(8+x^3)(x-2)}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} \right]^2 + \frac{2x^2 - 8}{x^2} + 1 \right\} : \frac{2x^2 - 4}{x^4}$

$$E_2 = \left\{ \left(\frac{1 - 8x^3}{4x^4 + 2x^3 + x^2} \cdot \frac{1 + 2x}{x^2} \right)^3 + \frac{12x^2 - 48x^4}{x^{12}} \right\} : \frac{x^{12}}{1 + 4x^2 + 16x^4}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve inecuația: $\frac{E_1+E_2+2x^2+x}{x+2} < -4$.

3) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{2}{1-2x} - 1 = 0$.

$$R. E_1 = 2x^2 - 4; 1 - 4x^2 = E_2; 2) -2 < x < -1; 3) x_1 = 3; x_2 = -1.$$

249. Se dă polinomul $E = 1 + x + x^2 + 2x^3$. Prin ce polinom a fost împărțit E , știind că s-a obținut câtul $11 + 5x + 2x^2$ și restul 23.

$$R. x - 2.$$

250. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - 2x^2 - x + 2} - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - 4x - 4} \right) : \frac{9}{(x^2 - 4)(x - 1)} \right]^2 - \frac{2}{x + 1} + 1;$$

$$E_2 = \left\{ \left[\frac{64 - 8x^3}{4x^2 + 8x + 16} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) : \frac{2}{x} \right]^2 + \frac{2x - 2x^2 + 4}{x} + 1 \right\} \cdot \frac{x}{2x - x^2 + 2} + x.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Care sînt valorile lui x pentru care E_1 și E_2 au sens (studiul se face pe forma simplificată).

3) Să se rezolve ecuația: $(E_1 \cdot E_2 - 1) \cdot (x + 1) = 0$.

$$R. 1) \left(\frac{x}{x+1} \right)^2; \frac{2(x+1)}{x}; 2) x \neq -1; x \neq 0; 3) x = 1.$$

251. Se dă mulțimea: $P = \{x \in \mathbb{N} | x = 2y - 4, y \in \mathbb{N}, 12 < x \leq 18\}$. Să se determine mulțimea și să se afle cardinalul acestei mulțimi.

$$R. P = \{14; 16; 18\}; 3.$$

252. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{(x+1)^3}{16x^2}; E_2 = \frac{(x^3 - 1 - 3x^2 + 3x)(x-1)^2(x-1) - 1}{x^4 + 3x^2 - 3x^3 - 2x}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori (numere întregi) atribuite lui x , expresia E_1 devine număr întreg?

3) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1 E_2}{x-1} = 0$.

$$R. 1) E_1 = \frac{x+1}{4}; E_2 = x^2 - 3x + 3; 2) x = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}; 3) x = -1.$$

253. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x-y=6 \end{cases}$$
 R. $x=8; y=2$.

254. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^2 - 3ax + 2a^2}, E_2 = \frac{x^3 + ax^2 - a^2x - a^3}{x+a}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1 + E_2}{1+a+x} (x+b) = 0$ (după ce în prealabil s-a simplificat ecuația). R. 1) $E_1 = x-a$; $E_2 = x^2-a$. 2) $x_1 = a$; $x_2 = -b$.

Să se simplifice fracția: $\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{2x^2 - 2x + 2}$. R. $x-2$.

256. Se dă mulțimea $A = \{2; 3; 4\}$. Care sînt numerele de pe tricourile unor sportivi, care se pot forma, folosind elementele mulțimii A , dacă fiecare număr are numai două cifre?

Indicație. Se folosește scrierea elementelor produsului cartezian $A \times A$.

R. 22; 23; 24; 32; 33; 34; 42; 43; 44.

257. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{(x-a)(x-2a)}; E_2 = \frac{x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3}{x-2a}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Să se găsească valorile întregi atribuite lui x astfel ca expresia:

$$\left(\frac{E_1 - E_2}{E_1} + ax^2 \right) : (1-a-ax) \left(-\frac{2}{9} \right)$$
 să fie număr întreg.

R. 1) $E_1 = x-a$, $E_2 = x^2-a^2$. 2) $x = \frac{9k+2}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

258. Se dau polinoamele:

$$E_1 = 2x^3 + 7x^2 - 2x^2y - 7xy + 6x - 6y; E_2 = 2x^3 - x^2 - 2x^2y + xy - 6x + 6y.$$

1) Să se transforme E_1 și E_2 într-un produs de factori.

2) Să se efectueze: $\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} - \frac{x^3 + 9}{x^3 - 8}$.

3) Pentru ce valoare a lui x avem $\frac{E_1}{E_2} > 1$.

R. 1) $E_1 = (x-y)(x+2)(2x+3)$, $E_2 = (x-2)(2x+3)(x-y)$;

2) $\frac{-1}{x^3-8}$; 3) $x > 2$

259. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$E_1 = \frac{\left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(\frac{y^3}{x^2} + \frac{2y^2}{x} + y\right) \cdot \frac{x^4}{y} + 2(x^2 - y^2) + 1}{x^2 - y^2 + 1}, \quad E_2 = \frac{x^2 - y^2 + 2y - 1}{x - y + 1}.$$

Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} \frac{E_1^2 - E_2^2}{(x^2 - y^2 - x - y + 2)(x - y + 1)} = 6 \\ x^2 - y^2 = 60 \end{cases}$$

R. $E_1 = x^2 - y^2 + 1$; $E_2 = x + y - 1$; $x = 8$; $y = -2$.

260. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{4x^2 - 20x + 9}{(2x - 1)^2 + (1 - 2x)} \cdot \frac{x - 1}{2x - 9}.$$

$$E_2 = \left[\frac{z - y}{(x - y)(x - z)} + \frac{y + z}{(y - z)(y - x)} + \frac{y + z}{(z - x)(z - y)} \right] \cdot \frac{z - x}{y}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2

2) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{Z}$: $\left(E_1 \cdot E_2 + \frac{1}{x + y}\right) \frac{x^2 - y^2}{x(x + 2)}$ este întreg.

R. 1) $E_1 = \frac{1}{2}$; $E_2 = \frac{2}{x - y}$; $x \in \{-1, -3, -4\}$.

261. Se dă mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 8\}$.

a) Să se determine mulțimile $M = \{x \in A \mid \text{există } y \in A, x + y = 6\}$.

b) Să se scrie $C_A M$.

c) Să se scrie $M \cap C_A M$.

d) Să se găsească $\text{Card } A - \text{Card } M$.

R. a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $M \subset A = \{1; 2; 4; 5\}$.

b) $\{3; 6; 7\}$; c) \emptyset ; d) $\text{Card } C_A M = 3$.

262. Se dau expresiile: $A = 4yz$; $B = x^2 - y^2 - 4z^2$; $C = x^2 - y^2 + 4z(z + x)$.

1) Să se calculeze $A^2 - B^2$ și să se descompună expresia obținută în factori.

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2}$$

2) Să se simplifice fracția: $\frac{A^2 - B^2}{C^2}$.

R. 1) $(x + y + 2z)(x - y + 2z)(x + y - 2z)(-x + y + 2z)$; 2) $y + 2z$.

263. Să se rezolve ecuația (după simplificarea fracțiilor):

$$\frac{2x-1+(1-2x)^2+(2x-1)^3}{8x^3+1} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Să se determine valoarea numerică a lui x pentru:

$$a = \sqrt{\frac{125}{108}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 1,1(6) - \frac{2}{3}; \quad b = \left(\sqrt{1,0201} + \frac{9}{100} \right) : \frac{1}{10}. \quad \text{R. } \frac{a^2}{2b^2}; \frac{9}{242}.$$

264. c.m.m.d.c. al două numere naturale este 2, c.m.m.m.c. al acestor numere este 60, iar raportul lor este $\frac{5}{6}$. Să se găsească aceste numere.

R. {10; 12}.

265. Să se determine x din ecuația:

$$\frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-x+2} - \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^4-5x^2+4} + \frac{3-2x-x^2}{(x+3)(x^2-1)} = \frac{1}{x-1}. \quad \text{R. Nu are soluție.}$$

266. Să rezolve ecuația:

$$\left\{ \left[\left(\frac{3x+6}{3x-6} \right)^2 - \frac{2x+4}{x-2} + 1 \right] - 1 \right\} : \frac{1}{(x-2)^2} = 0. \quad \text{R. } x_1 = -2, x_2 = 6.$$

267. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ (x-2):(y-3)=1 \end{cases}$

R. $x=3, y=4$.

268. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{3x+2}{2x-3}$ se simplifică

R. $A = \{M13-5; 1; 2\}$.

269. Se dă expresia: $E = \frac{(2x-3)^2+4x^2+4x-15}{8x^3-12x^2-12x(2x-3)+18x-27}$.

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui x se obține: $\frac{4(2x-3)}{2x+1} < 3$.

3) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia $\frac{E \cdot 4(2x-3)}{2x+1}$ este un număr întreg.

R. 1) $E = \frac{2(2x+1)}{(2x-3)^2}$; 2) $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2} \right)$; 3) 1, 2.

270. Să se determine mulțimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy=8\}$.

271. Se dă fracția : $E = \frac{6x^2(y+z)^2 - 24x^2yz}{3y^4 - 6y^3z - 6yz^3 + 6y^2z^2 + 3z^4}$.

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se arate că dacă $E=2$, atunci x, y, z , pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

$$R. E = \frac{2x^2}{y^2 + z^2}$$

272. Dacă numerele a și b sînt prime între ele, să se cerceteze dacă sumele $a+b$ și a^2+b^2 sînt prime între ele.

Indicație. Putem scrie $a^2+b^2=(a+b)(a+b)-2ab$. În baza acestei egalități, orice număr care divide pe a^2+b^2 și pe $(a+b)$ trebuie să dividă și pe $2ab$. Întrucît a și b sînt numere prime între ele suma lor $a+b$ și produsul lor ab sînt prime între ele, deci 2 este singurul divizor al lui $2ab$, comun pentru a^2+b^2 și $a+b$.

273. Să se simplifice fracția: $E = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 7}{x^2 + 5x + 7}$.

Să se determine valorile lui x (numere întregi) ca să avem: $\frac{E}{x-2} \geq 3$.

$$R. E = x+1; x=3. x \in \left[2; \frac{7}{2}\right]$$

274. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left\{ \left[\frac{m^2x + 2mx + x - 3m^2 - 6m - 3}{(m+1)(9-6x+x^2)} \right]^2 - 1 \right\} \cdot \frac{m+x-2}{x-3}$$

$$E_2 = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x(x-3) + x - 3}{(x^3 - 27)(x+1)}$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Pentru ce valoare a lui x expresia $(E_1+1) \cdot \frac{x+2}{m+1}$ este negativă?

3) Pentru ce valoare a lui x expresiile E_1 și E_2 nu au sens?

$$R. 1) E_1 = \frac{m-x+4}{x-3}, E_2 = \frac{x+1}{x^2+3x+9}; 2) -2 < x < 3 \text{ sau } x \in (-2, 3); 3) x = -1 \text{ și } x = 3.$$

275. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$. Să se scrie din această mulțime primele cinci elemente.

$$R. \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

276. Se dă expresia

$$f(x) = \frac{ax^2 + x^2 - 2ax + a - 2x + 1}{a+1}, a \neq -1.$$

Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ este pozitivă.

277. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{27-125x^3}{50x^2+30x+18} \right)^2 - \frac{10x-6}{2} + 1,1(6) - \frac{1}{6} \right] \cdot \frac{4}{25},$$

$$E_2 = \frac{\left[\left(\frac{4x^2+4x}{4x^2} \right)^2 + \frac{4x^2+4x}{2x^2} + \sqrt{4,1616} - 1 - \frac{1}{25} \right] - 1}{\frac{3x+1}{x}}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{-2x}{3-3x^2}$ este un număr întreg?

R. 1) $E_1 = (1-x)^2$, $E_2 = \frac{x+1}{x}$; 2) $x = \frac{3k+2}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

278. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{\left(\frac{1}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a^2b+2ab^2+b^3} \right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{a^2}{b} - 2a+b \right)}{(a-b)^2 : (a+b)^2}$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a-b^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b^2} \right) \right] : \frac{2ab^2-a^2-b^4}{ab^2}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui a expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{b^2(b-a)(a-2)}{8}$ este negativă?

R. 1) $E_1 = \frac{a}{a-b}$; $-\frac{1}{ab^2} = E_2$; 2) $a < 2$ sau $a \in (-\infty, 2)$.

279. Se dă expresia:

$$\frac{a^3+a^2(1-b)-b^2(1+a)+b^3}{a^3+a^2(1+b)-b^2(1+a)-b^3} = \frac{A}{B}.$$

1) Să se simplifice fracția $\frac{A}{B}$.

2) Să se rezolve sistemul: $A = \frac{2y+x}{x}$, $B = \frac{2x+y}{y}$,

în care A și B sînt termenii fracției, iar necunoscutele sînt a și b .

R. 1) $\frac{A}{B} = \frac{a-b+1}{a+b+1}$. 2) $a = \frac{x^2+y^2}{xy}$; $b = \frac{x^2-y^2}{xy}$.

280. Se dă expresia:

$$E = \left(\frac{x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - 2y^2 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 - 1} - x^2y \right) : (x^2 - y - 1).$$

1) Să se aducă E la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve inecuația: $\frac{E}{y+1} < -3$.

R. 1) $E=1-y$; 2) $y \in (-2, -1)$.

281. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1; E_2 = x^3 - 8x^2 + 13x - 6.$$

1) Să se descompună în factori E_1 și E_2 .

2) Să se simplifice expresia $\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x-6}{x^2+1}$.

R. 1) $E_1 = (x^2+1)(x+1)^2$; $E_2 = (x-1)^2(x-6)$. 2) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

282. Să se arate că dacă x, y, z sînt laturile unui triunghi, atunci avem:

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{x}{z}\right) < 3 + \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y}.$$

283. Să se aducă la forma cea mai simplă fracția:

$$E = \frac{\left[\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1 \right) \frac{xy}{x^2+y^2} \right]^2 + \frac{2x+2y}{x-y} + 1}{\frac{4x^2}{(x-y)^2}}.$$

R. 1.

284. Se dă expresia $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ este pozitivă.

b) Se dă mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x < 5\}$. Să se arate că ecuația $f(x) = 9$, are soluții în mulțimea A .

285. Să se simplifice fracția: $\frac{3x^2+1+2x^3+3x}{x^2+x+1}$

R. $2x+1$.

286. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 6ax^2 + 12a^2x + 56a^3}{x^2 + 28a^2 - 8ax}; E_2 = \frac{x^3 + 6ax^2 + 12a^2x + 72a^3}{x^2 + 12a^2}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuația (după ce s-a simplificat fracția):

$$\frac{E_1 \cdot E_2 + 4a^2 + 2x + 8a + 1}{(x + 4a + 1)^2} = x^2.$$

R. 1) $E_1 = x + 2a$, $E_2 = x + 6a$. 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

287. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x(x+1)^2 \cdot (x^2+1) + 1}{x^3 + x^2 + 1}; E_2 = \frac{x^6 + 2x^5 + x^3 - 2x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{E_1(x-1)}{E_2} + x \right] (2-x) = 0$.

R 1) $E_1 = x^2 + x + 1$; $E_2 = x^3 - 1$. 2) $x_1 = -1$; $x_2 = +2$.

288. Se dau expresiile:

$$E = \frac{(x-1)^3 + (x+y)^2 + (y-1)^3 - 4}{x^2 + y^2 - xy + 3}; E_1 = \frac{x^3 + x^2y - 2x^2 - x - y + 2}{x^2 - 1}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E și E_1 .

2) Pentru ce valoare a lui x expresia: $\left(\frac{E}{E_1} - x^3 \right) : (x^2 + x + 1)(x + 3)$ este negativă?

3) Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} \frac{E \cdot E_1 - 2xy - 4 - 2y^2}{x - y - 4} = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

R. 1) $x + y - 2 = E$, $x + y - 2 = E_1$; 2) $x \in (\infty; -3) \cup (1; \infty)$;

3) $x_1 = 4$; $y_1 = -3$; $x_2 = \frac{23}{8}$; $y_2 = -\frac{9}{8}$.

289. Să se simplifice fracția: $\frac{x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 6x - 1}{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1}$.

R. $x^2 - 1$.

290. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{(x^4 - x^3 + 8x^2 - 2x + 12)(x + 2)}{(-8x^2 - 16)(x^2 - x + 6)}; E_2 = \frac{6 + 6x + 5x^2 + 3x^3 + x^4}{(x^2 + 2)(x^2 + 3x + 3)}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui x expresia $E_1 \cdot \frac{E_2}{x-1}$ este negativă?

3) Care sînt numerele întregi atribuite lui x pentru ca E_1 să fie număr întreg?

R. 1) $E_1 = \frac{x+2}{-8}$; $E_2 = 1$; 2) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$;

3) $x = 8k - 2$, ($k \in \mathbb{Z}$).

291. 1) Să se aducă fracția $E(x) = \frac{4x^2 - 4x - 15}{8x^2 - 24x + 10}$ la forma ireductibilă.

296. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{2(x-y)^2 - 5y^2 + 3xy}{2x-3y} + \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3x-y}; \quad E_2 = \left[\left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2 + 1 + \frac{2x+2y}{x-y} \right] \cdot \frac{(x-y)^2}{-16x^2}.$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile E_1 și E_2 .
- 2) Pentru ce numere întregi atribuite lui x expresia: $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{x+1}{x+y}$ este număr întreg?
- 3) Pentru ce valoare a lui x se obține: $E_1 \cdot E_2 : (x+y) \cdot \frac{x+1}{x-1} < -4$?

$$\text{R. 1) } E_1 = 2(x+y); E_2 = \frac{-1}{4}; \quad 2) x = 2k-1 (k \in \mathbb{Z}); \quad 3) 1 < x < \frac{9}{7}.$$

GEOMETRIE IN SPAȚIU

IV.16. DREPTE ȘI PLANE

1. Fie triunghiul echilateral cu aria de $692/\text{cm}^2$ ce are ca proiecție pe un plan un triunghi isoscel cu aria 346 cm^2 . Știind că două din vîrfurile triunghiului echilateral sînt situate în plan, să se afle distanța vîrfului al treilea al triunghiului echilateral la planul de proiecție (se va lua $\sqrt{3} = 1,73$).

R. 30 cm.

2. Catetele unui triunghi dreptunghic ABC au lungimile de 12 cm și 16 cm. Din vîrfurile unghiului drept A este dusă pe planul triunghiului perpendiculara AD , lungă de 28 cm. Să se afle aria triunghiului BCD .

Indicație: Înălțimea triunghiului BCD se poate afla folosind teorema celor trei perpendiculare.

R. Aria $BCD = 296 \text{ cm}^2$.

3. O placă în formă de triunghi isoscel ABC stă înclinată față de un plan, astfel că BC (baza triunghiului) lungă de 50 cm se află în plan, iar vîrfurile A se găsește la distanța de 24 cm de plan. Să se afle aria acestei plăci, știind că distanța de la piciorul perpendicularei coborîte din vîrfurile A al triunghiului pe plan la baza BC a triunghiului este de 10 cm.

Indicație: Prin teorema celor trei perpendiculare se află înălțimea triunghiului.

R. 650 cm^2 .

4. În vîrfurile A al unui triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$; $m(\angle C) = 15^\circ$ și $BC = 4a$ cm, se ridică o perpendiculară AM astfel încît planele MBC și BCA formează un unghi diedru de 45° . Să se determine distanța de la punctul M la BC .

R. $a\sqrt{2}$ cm.

5. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$ bisectoarea CN ($N \in AB$) intersectează înălțimea dusă din A pe BC în O . În punctul N se ridică perpendiculara ND egală cu AO , egală cu a . Să se determine distanța dusă din D pe AC .

R. $a\sqrt{2}$.

6. În paralelogramul $ABCD$, laturile au lungimile egale cu 30 cm și 24 cm. În vîrfurile B al unghiului mai mare, pe planul paralelogramului se ridică o perpendiculară $BM = 12$ cm. Să se determine distanța de la punctul M la latura mică a paralelogramului, dacă M este depărtat de latura mare a paralelogramului la 20 cm.

R. $4\sqrt{34}$ cm.

7. Diagonalele unui romb au lungimile de 30 cm și 40 cm. Vîrfurile unghiului mare al rombului este piciorul unei perpendiculare pe planul rombului a cărei lungime este de 7 cm. Să se determine lungimea de la a doua extremitate a perpendicularei la latura rombului.

R. 25 cm.

8. În triunghiul ABC , $AB=6$ cm, $BC=6\sqrt{2}$ cm, $AC=4$ cm. În vîrfurile C pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară $CM=3$ cm. Se unește M cu B și A . Să se afle aria triunghiului MBA .

R. $10\sqrt{2}$ cm².

9. Triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle B)=90^\circ$, este inclus în planul P . Latura AB a triunghiului este de 5 cm iar $m(\angle BAC)=60^\circ$. Din punctul M situat în afara planului dat, se duce perpendiculara MO , $O \in AC$ pe planul triunghiului astfel ca $MA=MC=10$ cm. Se cere: 1) Distanța de la punctul M la planul triunghiului ABC . 2) Să se arate că $[MB]=[AC]$. 3) Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul AOB . 4) Să se arate că ariile triunghiurilor AOB și MAC sînt în raportul $1/4$.

R. 1) $5\sqrt{3}$ cm, 3) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ cm.

10. În paralelogramul $ABCD$ cu latura mică $AD=6$ cm, bisectoarele interioare ale unghiurilor consecutive A și B se intersectează în $M \in DC$. Unghiul diedru format de planul determinat de DC și un punct N exterior planului a cărui proiecție pe planul $ABCD$ este punctul O are măsura de 60° . Cunoscînd că $NC=12$ cm: a) să se determine distanța de la punctul N la planul $ABCD$, știind că planul NAB este perpendicular pe $ABCD$ și că O este mijlocul lui AB ; b) să se determine $m(\angle ANO)$, ($AO > OB$).

R. a) 9 cm, b) 45° .

11. Fie în planul P reprezentat prin pătratul $ABCD$ cu latura de $4a\sqrt{2}$ cm. La extremitățile diagonalei AC se duc perpendicularele $AN=4a\sqrt{2}$ cm, respectiv $CM=a\sqrt{2}$ cm. Unghiul diedru al planelor MBD și NBD are măsura de 90° ?

R. Nu.

12. Suma lungimilor bazelor unui trapez isoscel cu baza mică AB circumscris unui cerc O cu raza de 4,8 cm este de 20 cm. În punctul O se ridică o perpendiculară $OM=6$ cm. Să se determine proiecția dreptei MB din planul MBC pe dreapta BC .

R. 3,6 cm.

IV.17. PRISMA

13. Un paralelipiped dreptunghic are volumul de 480 dm³, lungimea și lățimea bazei respectiv de 8 dm și 6 dm. Să se calculeze:

1) aria totală; 2) diagonala paralelipipedului; 3) măsura unghiului dintre diagonala bazei și diagonala paralelipipedului.

R. 376 dm²; $10\sqrt{2}$ dm; 45° .

14. Un perete are forma unui paralelipiped dreptunghic lung de 12 m, înalt de 3 m și

gros de 0,3 m. Acest perete are o uşă largă de 1,20 m şi înaltă de 1,90 m. Să se afle volumul zidăriei peretelui.

Indicaţie: $V_{\text{zid}} = V_1 - V_2$, unde am notat: V_1 – volumul prisme cu dimensiunile 3 m; 12 m; 0,30 m, V_2 – volumul prisme cu dimensiunile 1,20 m; 1,90 m; 0,30 m.

R. Volumul peretelui = 10,116 m³

15. Dintr-o groapă de var adâncă de 3 m, lungă de 5,2 m şi lată de 4,5 m se scoate varul şi se transportă cu o căruţă avînd forma unei prisme cu baza un trapez. Căruşa e lungă de 2 m, bazele trapezului sînt de 0,8 m şi 0,4 m şi înălţimea bazei de 0,5 m. Cîte căruţe sînt necesare?

R. 117 căruţe.

16. Dintr-un trunchi de arbore, lung de 4 m, avînd secţiunea un cerc cu diametru de 3 dm, s-a cioplit un paralelipiped avînd ca bază un pătrat cu diagonala cît diametrul trunchiului. Să se afle volumul paralelipipedului, ştiind că din lungimea trunchiului nu s-a cioplit nimic.

R. 180 dm³.

17. Dintr-un bazin prismatic cu baza în formă de hexagon regulat cu latura de 2 m, plin cu petrol pînă la o înălţime de 1,8 m, se scurge petrolul în alt bazin în formă de paralelipiped cu baza un pătrat, avînd latura de 2,4 m. Pînă la ce înălţime se va ridica petrolul în bazinul al doilea ?

R. $1,875\sqrt{3}$ m.

18. Cele trei dimensiuni AB , BC şi CC' ale unui paralelipiped dreptunghic sînt proporţionale cu numerele 5; 2 şi 4, iar suma lor este de 27,5 cm. Să se afle aria laterală şi volumul lui.

R. $Al = 350 \text{ cm}^2$; $V = 625 \text{ cm}^3$.

19. Care este masa unei grinzi de fier în formă de prismă, lungă de 1,50 m şi avînd secţiunea un pătrat cu diagonala de $4\sqrt{2}$ cm ? Densitatea fierului este de 7800 kg/m³.

R. 18,72 kg.

20. O prismă hexagonală regulată are înălţimea de 3 m şi latura bazei de 2 m. Să se afle lungimea celei mai mari diagonale a prisme, aria totală şi volumul ei.

R. diagonala = 5 m; aria bazei = $6\sqrt{3} \approx 10,38 \text{ m}^2$; aria totală = $36 + 2 \cdot 10,38 = 56,76 \text{ m}^2$; volumul = $18\sqrt{3} \text{ m}^3$.

21. Să se afle raportul între volumele a două paralelipipe cu baza pătrată, ştiind că fiecare are înălţimea cît latura bazei celuilalt. Aceeaşi problemă pentru prisme hexagonale regulate.

R. Raportul $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ al laturilor.

22. O cutie are formă de prismă hexagonală regulată. Latura hexagonului este de 2 dm, iar muchia laterală este de 5 dm. Să se afle aria laterală şi volumul cutiei.

R. 60 dm^2 şi $30\sqrt{3} \text{ dm}^3$.

23. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt: 15 m, 50 m şi 36 m. Să se afle muchia cubului echivalent lui (avînd acelaşi volum).

Indicaţie: Se află volumul paralelipipedului, se observă că rezultatul este un cub perfect.

R. $L = 30 \text{ m}$.

24. O prismă hexagonală regulată are latura bazei de 18 cm, înălțimea prisme fiind $\frac{2}{3}$ din apotema poligonului de bază. Care este volumul prisme ?
R. 8 748 cm³.
25. O prismă hexagonală regulată are aria aterala de $480\sqrt{3}$ cm², iar înălțimea de $10\sqrt{3}$ cm. Să se afle volumul prisme.
R. 2 880 cm³.
26. Volumul unei prisme hexagonale regulate este de $2160\sqrt{3}$ cm³, iar latura bazei de 12 cm. Să se afle aria laterală
R. 720 cm².
27. O prismă triunghiulară regulată are aria laterală de $144\sqrt{3}$ cm² iar înălțimea de 8 cm. Să se afle volumul prisme.
R. $V=216\sqrt{3}$ cm³.
28. O plută este formată din 16 grinzi cu secțiunea dreptunghiulară, fiecare avînd lungimea de 3,6 m, lățimea de 2 dm și grosimea de 25 cm. Care sînt volumul și masa plutei, știind că densitatea lemnului este de 600 kg/m³ ?
R. $V=2,88$ m³; $m=1\,728$ kg.
29. Pe o suprafață dreptunghiulară cu lungimea de 4,5 m și lățimea de $\frac{2}{3}$ din lungime se instalează un rezervor pentru apă cu o capacitate de 540 hl. Să se afle înălțimea rezervorului.
R. $l=4$ m.
30. O prismă de lemn are ca bază un pătrat cu diagonalele de $12\sqrt{2}$ cm. Știind că masa prisme este de 30,240 kg, iar densitatea sa este de 600 kg/m³, să se afle înălțimea prisme.
R. $l=3,5$ m.
31. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 26 cm și o catetă de 10 cm. Știind că aria laterală a prisme este de 1 800 cm², să se afle volumul prisme.
R. 3 600 cm³.
32. Un vas de fier are forma unei prisme hexagonale regulate. Latura bazei este de 0,6 m, iar înălțimea bazei de $0,25\sqrt{3}$ m. Printr-un orificiu făcut la baza prisme, se scurge lichidul din el. Dacă în fiecare minut se scurg în medie 5 litri, în cît timp se golește vasul (presupus plin) ?
R. 81 min.
33. Un jgheab are secțiunea în formă de trapez cu bazele de 20 cm și de 30 cm, iar înălțimea de 40 cm. Să se calculeze debitul maxim de apă al acestui jgheab în metri cubi pe minut, știind că viteza maximă a apei în jgheab este de 2 m/s.
Indicație. Jgheabul varsă pe secundă un volum de apă egal cu volumul unei prisme a cărei bază este egală cu secțiunea jgheabului și a cărei înălțime este distanța parcursă de apă pe secundă.
R. 12 m³/min.

34. Câți lucrători sînt necesari pentru a săpa în șase ore un șanț de scurgere a apei lung de 25 m, avînd drept secțiune un trapez cu bazele de 1,10 m și 0,70 m, iar înălțimea de 0,60 m, dacă un lucrător sapă într-o oră $0,75 \text{ m}^3$?

R. 3 lucrători.

35. Un vagonet pentru cărat carbuni cu lungimea de 2,75 m are secțiunea în formă de trapez isoscel cu bazele de 0,60 m și 1,15 m, iar înălțimea de 1m. Ce cantitate de carbuni poate transporta, dacă 1 m^3 de cărbune are masa de aproximativ 700 kg ?

R. 1 684 kg.

IV.18. PIRAMIDA

36. Acoperișul unui turn are forma unei piramide regulate hexagonale, cu latura bazei de 4 m, iar muchia laterală de 4,8 m. Pentru a înveli acoperișul se folosesc foi de tablă dreptunghiulare, cu dimensiunile de 80 cm și 60 cm; știind că pierderea (deșeurile) reprezintă 25% din suprafața acoperișului, să se afle cîte foi de tablă sînt necesare.

R. 137 de foi.

37. O piramidă regulată are ca bază un triunghi înscris într-un cerc cu raza de 12 cm, iar aria laterală este de $1\,080 \text{ cm}^2$. Să se afle volumul piramidei.

R. $216\sqrt{97} \text{ cm}^3$.

38. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 6 dm. Înălțimea piramidei este cît înălțimea triunghiului de bază. Să se calculeze volumul acestei piramide.

Indicație: Înălțimea triunghiului de bază $= 3\sqrt{3} \text{ dm}$. Aria bazei $9\sqrt{3} \text{ dm}^2$.

R. Volumul piramidei $= 27 \text{ dm}^3$.

39. O piramidă regulată are ca bază un pătrat cu diagonala de $30\sqrt{2} \text{ cm}$, iar înălțimea de două ori cît apotema bazei. Să se afle volumul piramidei.

R. $V = 9\,000 \text{ cm}^3$.

40. O piramidă regulată hexagonală are latura bazei de 8 cm. Știind că înălțimea este triplul apotemei bazei, să se afle volumul piramidei.

R. $V = 1\,152 \text{ cm}^3$.

41. O piramidă are ca bază un pătrat înscris într-un cerc cu raza $15\sqrt{2} \text{ cm}$, iar aria ei laterală este de $1\,500 \text{ cm}^2$. Să se afle volumul piramidei.

R. $V = 6\,000 \text{ cm}^3$.

42. Intr-o piramidă regulată pătratică, latura bazei este de 1 m, iar aria laterală este de 260 dm^2 . Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

R. apotema $= 13 \text{ dm}$, muchia $= 13,92 \text{ dm}$, volumul $= 400 \text{ dm}^3$.

43. Latura unei piramide triunghiulare regulate este de $6\sqrt{3} \text{ cm}$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45° . Să se afle volumul piramidei.

Indicație: Se va calcula raza cercului circumscris. Se va considera triunghiul dreptunghic format de muchia, înălțimea piramidei și raza cercului circumscris.

R. $V = 54\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

44. Intr-o piramidă patrulateră regulată aria laterală este de 960 cm^2 , iar aria totală de $1\,536 \text{ cm}^2$. Să se calculeze volumul piramidei.

$$\text{R. } V=3\,072 \text{ cm}^3.$$

45. Intr-o piramidă patrulateră regulată muchia laterală este de 25 m, iar latura bazei de 30 m. Să se afle aria laterală și volumul ei.

$$\text{R. } Al=1\,200 \text{ m}^2; V=1\,500\sqrt{7} \text{ m}^3.$$

46. O piramidă patrulateră regulată are volumul de $18\,432\sqrt{7} \text{ cm}^3$, iar latura bazei de 48 cm. Să se afle aria laterală.

$$\text{R. } Al=4\,608\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

47. Un cort militar are forma unei prisme patrulatere regulate, iar deasupra o piramidă regulată. Latura bazei este de 4 m, înălțimea piramidei de 1,5 m. Pînza folosită pentru acest cort are lățimea 0,80 m. Câți metri de pînză se vor folosi ?

$$\text{R. } 89 \text{ m.}$$

48. Latura unei piramide hexagonale regulate este de 6 cm. Unghiul diedru format de o față laterală cu baza este de 45° . Să se afle volumul piramidei.

$$\text{R. } V=162 \text{ cm}^3.$$

49. Baza unei piramide este un romb cu latura de 25 dm și diagonala mică de 30 dm. Înălțimea piramidei cade în centrul rombului și este egală cu diagonala mare a rombului. Să se afle volumul piramidei.

$$\text{R. } V=8 \text{ m}^3.$$

50. Se dă o prismă hexagonală regulată. Diagonala unei fețe laterale este egală cu $2a \text{ cm}$ și face cu muchia laterală un unghi cu măsura de 30° . a) Să se calculeze volumul prisme. b) Să se calculeze aria laterală și volumul piramidei înscrise în prismă, care are ca bază una din bazele prisme, iar vârful în centrul celeilalte baze. c) Se duce un plan P de secțiune, paralel cu bazele, la o distanță egală cu $\frac{2}{3}$ din înălțimea prisme față de baza piramidei. Să se afle raportul dintre ariile obținute prin secțiunea prisme și a piramidei cu planul P .

$$\text{R. a) } V_{\text{prismă}} = \frac{9a^3}{2} \text{ cm}^3; \text{ b) } Al_{\text{piramidă}} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{2} \text{ cm}^2; V_{\text{piramidă}} = \frac{3a^3}{2} \text{ cm}^3; \text{ c) } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}.$$

IV.19. TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

51. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 4 cm și 6 cm. Volumul său este de 44 cm^3 . Să se calculeze aria totală.

$$\text{R. } At=92 \text{ cm}^2.$$

52. Se dă un trunchi de piramidă cu bazele triunghiuri dreptunghice (ABC și $A'B'C'$ cu unghiurile drepte în A și A'). Știind că $AB=24 \text{ cm}$, $AC=54 \text{ cm}$, $A'B'=6 \text{ cm}$, iar înălțimea $I=45 \text{ cm}$, să se determine volumul trunchiului.

$$\text{R. } V=12\,757,5 \text{ cm}^3.$$

53. Să se afle numărul de puieți sădiți de elevii unei școli într-o grădină, știind că au săpat un volum de $127,4 \text{ m}^3$ de pământ și că o groapă are forma unui trunchi de

piramidă patrulateră regulată, cu laturile bazelor de 50 cm și 30 cm, iar înălțimea trunchiului de 39 cm.

R. 2 000 de puieți.

54. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 90 cm și 30 cm. Știind că volumul trunchiului este de $156\,000\text{ cm}^3$ să se calculeze aria laterală.

R. $Al=12\,000\text{ cm}^2$.

55. Un trunchi de piramidă $ABCD A'B'C'D'$ cu baze pătrate, are $L_4=7/\sqrt{2}\text{ cm}$, $l_4=2\sqrt{2}\text{ cm}$, muchia $CC'=2,5\text{ cm}$. Să se determine înălțimea, apotema și diagonala trunchiului.

R. 2 cm; $\frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}}$ și diagonala $\approx 10,9\text{ cm}$.

56. Un trunchi de piramidă a cărei diagonală este de 10 cm are ca baze dreptunghiuri a căror dimensiuni sînt: 8 cm, 6 cm, respectiv 4 și 3 cm. Să se determine înălțimea trunchiului.

R. 7,5 cm.

57. Un rezervor are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Adîncimea rezervorului este de 5 m, latura bazei mari de 8,5 m, a bazei mici de 6 m. Cîte tone de păcură încap în acest rezervor, dacă densitatea păcurii este de 880 kg/m^3 ?

R. 234 t.

58. Să se calculeze lucrul mecanic făcut de o macara care ridică la o înălțime de 4 m un bloc de fontă în formă de trunchi de piramidă. Bazele acestui bloc sînt pătrate, cu laturile respectiv de 1 m și 0,75 m, iar înălțimea sa este de 1,6 m ($d=7\,800\text{ kg/m}^3$).

Indicație. Formula lucrului mecanic este $L=mgh$, în care m =masa corpului, $g=9,8\text{ m/s}^2$ și h =înălțimea la care se ridică corpul.

R. 377 002 g.

IV.20. CILINDRUL

59. Aria laterală a unei coloane cilindrice cu înălțimea de 10 m este de $31,40\text{ m}^2$. Să se afle volumul și masa coloanei, știind că este făcută din piatră, cu densitatea $3\,000\text{ kg/m}^3$.

R. $V=2,5\pi\text{ m}^3$; $m=23,55\text{ t}$.

60. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu diagonală de $6\sqrt{2}\text{ cm}$. Să se calculeze volumul și aria laterală a cilindrului.

R. Latura pătratului bazei=6 cm; $V=54\pi\text{ cm}^3$; $Al=36\pi\text{ cm}^2$.

61. Pe coșul cilindric al unei fabrici înalt de 15 m și cu diametrul de 1 m, s-a depus un strat de funingine gros de 5 cm. Ce volum de funingine se scoate la curățarea coșului ?

R. $2,237\text{ m}^3$.

62. Un cazan de apă în formă de cilindru are diametrul de 50 cm, iar lungimea lui este de 3,6 m. Cît de mare este presiunea vaporilor pe suprafața totală a cazanului, dacă pe un centimetru pătrat presiunea vaporilor este de 10 kg.

Indicație. Se va calcula aria totală în centimetri pătrați, apoi presiunea vaporilor.

R. Aria totală= $6,0445\text{ m}^2$; presiunea= $604\,450\text{ kg/cm}^2$.

63. Un dreptunghi are lungimea a și lățimea b . Să se afle raportul volumelor celor 2 cilindrii obținuți, când se rotește dreptunghiul în jurul lungimii și apoi în jurul lățimii sale.

$$R. \frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi ab^2}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}.$$

64. Un puț adânc de 10 m are căptușala formată dintr-o zidărie cilindrică groasă de 50 cm. Dacă diametrul interior este de 3 m, care este volumul zidăriei ?

Indicație: Se va calcula: raza interioară, raza exterioară, aria bazei (având forma unei coloane circulare), apoi volumul.

$$R. V = 17,5 \text{ m}^3.$$

65. Într-un cilindru, raza bazei este de 2 cm, iar înălțimea de 7 cm. Să se determine raza unui cerc a cărui arie este echivalentă cu aria totală a cilindrului.

$$R. 6 \text{ cm}.$$

66. Să se calculeze volumul unui cilindru a cărui arie laterală este de $100\pi \text{ cm}^2$, știind că secțiunea axială este un pătrat.

$$R. V = 250\pi \text{ cm}^3.$$

67. Aria laterală a unui cilindru fiind de $72\pi \text{ cm}^2$, care este volumul său dacă înălțimea este dublul diametrului bazei ?

$$R. V = 108\pi \text{ cm}^3.$$

68. Dintr-o bucată de lemn în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 2,4 m, 1,5 m și înălțimea de 0,6 m, se scot forme cilindrice cu diametrul de 30 cm, având aceeași înălțime ca bucata de lemn. Câte forme se pot scoate din această bucată de lemn și ce cantitate de lemn se pierde ?

$$R. 40 \text{ de forme; } V = 0,47 \text{ m}^3.$$

69. Cablul telefonic este îmbrăcat într-un înveliș de plumb. Știind că diametrul cablului este de 2 cm, iar grosimea învelișului de 2 mm să se afle masa plumbului pentru un cablu de 10 km lungime, știind că densitatea plumbului este de $11\,400 \text{ kg/m}^3$.

Indicație: Se va calcula aria coloanei circulare, volumul și apoi masa.

$$R. \text{Masa} = 157,5 \text{ tone}.$$

IV.21. CONUL

70. Raza bazei unui con circular drept este 3. Secțiunea sa paralelă la bază la o distanță de 3 m de vîrf are raza de 2 m. Să se afle volumul și aria laterală a conului.

$$R. V = 42,390 \text{ m}^3; Al = 50,8680 \text{ m}^2.$$

71. Se dă un con cu raza de 15 cm; la distanța de 24 cm de vîrf se face o secțiune paralelă cu baza. Generatoarea conului obținut este de 26 cm. Care este volumul conului inițial ?

$$R. V = 2\,700\pi \text{ cm}^3.$$

72. Înălțimea unui con este de 12 cm, iar volumul său este de $1\,024\pi \text{ cm}^3$. Să se afle aria laterală și aria totală a acestui con.

$$R. Al = 320\pi \text{ cm}^2, At = 576\pi \text{ cm}^2.$$

73. Un con avînd aria laterală de $540\pi \text{ cm}^2$ și raza de 18 cm , este tăiat printr-un plan paralel cu baza, la o distanță de 16 cm de vîrf. Care este raza cercului de secțiune, generatoarea conului astfel format, aria laterală și volumul acestui con ?

$$R. r = 12 \text{ cm; } g = 20 \text{ cm; } Al = 240\pi \text{ cm}^2; V = 768\pi \text{ cm}^3.$$

74. Un con avînd volumul de $324 \pi \text{ cm}^3$, iar înălțimea de 12 cm, este tăiat printr-un plan paralel cu baza și dus la o distanță de 8 cm de vîrf. Să se afle aria laterală și volumul conului astfel format.

$$\text{R. } Al=60 \pi \text{ cm}^2; V=96 \pi \text{ cm}^3.$$

75. Jumătate din înălțimea unui con întrece cu 1 cm a treia parte a razei cercului de bază, iar suma razei și înălțimii este de 7 cm. Să se afle elementele conului (raza, înălțimea, generatoarea), aria laterală și volumul conului.

$$\text{R. } R=3 \text{ cm}; l=4 \text{ cm}; G=5 \text{ cm}; Al=15 \pi \text{ cm}^2; V=12 \pi \text{ cm}^3.$$

76. O grămadă de piatră spartă are forma conică cu raza de 2,8 m și generatoarea de 3,5 m. Cîte căruțe trebuie pentru a transporta piatra spartă, depozitată în 10 grămezi, știind că un metru cub de piatră are masa de 3 t, iar într-o căruță se încarcă 500 kg?

$$\text{R. } 1034 \text{ de căruțe.}$$

77. Intr-o mină s-a întrebuițat un explozibil care a produs în pămînt, prin explozie, o pîlnie cu un diametru de 4 m, adîncimea pîlniei fiind de 1,5 m. Ce cantitate de pămînt se aruncă, știind că un metru cub de pămînt are masa de 1 650 kg ?

$$\text{R. } 10,362 \text{ tone.}$$

IV.22. TRUNCHIUL DE CON

78. Un trunchi de con în care suma razelor este cît raza unui cerc cu aria de $625 \pi \text{ cm}^2$ are înălțimea de 7 cm și generatoarea de $7\sqrt{2}$ cm. Să se afle volumul trunchiului.

$$\text{R. } R=16 \text{ cm}; r=9 \text{ cm}; V=\frac{3\ 367\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

79. Intr-un trunchi de con, înălțimea este de 8 m. Ea este media aritmetică a celor două raze. Să se afle volumul trunchiului, știind că generatoarea este de $8\sqrt{2}$ cm.

$$\text{R. } R=12 \text{ cm}; r=4 \text{ cm}; V=\frac{1\ 664\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

80. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, în care AB este baza mică și CD cea mare $[BC]=[AD]$. Considerăm punctele M și N așezate respectiv la mijloacele laturilor BC și AD . Se dă $MN=13$ dm și diferența bazelor de 10 dm. Din învîrtirea trapezului în jurul dreptei care unește mijloacele bazelor rezultă un trunchi de con. Știind că generatoarea lui este medie proporțională între razele cercurilor de bază, se cere volumul trunchiului de con.

Indicație. MN =semisuma bazelor trapezului. Din rezolvarea unui sistem de ecuații se găsește că bazele trapezului sînt de 8 dm și 18 dm. Razele bazelor trunchiului de con sînt: $R=9$ dm și $r=4$ dm. De aici se deduce generatoarea de 6 dm și apoi înălțimea.

$$\text{R. } V=\frac{133\sqrt{11}\pi}{3} \text{ dm}^3 \approx 461 \text{ dm}^3.$$

81. Intr-un trunchi de con, razele sînt proporționale cu numerele 3 și 2, $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{4}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului face cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 45° . Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con.

$$\text{R. } Al=80\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2; V=\frac{1\ 216\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

82. Suma celor două raze ale unui trunchi de con este de 25 cm, iar diferența lor 9 cm. Știind că generatoarea formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45° , să se afle cele două raze și volumul trunchiului de con.

$$R. R=75 \text{ cm}; r=8 \text{ cm}; V=1\,467 \pi \text{ cm}^3.$$

83. Un trunchi de con cu înălțimea de 18 cm are suma razelor bazelor de 16 cm, iar $\frac{3}{11}$ din raza mare este cu 2 cm mai mică decât raza mică. Înălțimea este împărțită în trei părți egale și prin punctele de diviziune se fac două secțiuni paralele cu bazele. Să se afle ariile acestor două secțiuni.

$$R. 49 \pi \text{ cm}^2; 81 \pi \text{ cm}^2.$$

84. Intr-un trunchi de con raza mică este cu 2 cm mai mică decât raza mare, iar media aritmetică a celor două raze este de 0,004 dm; înălțimea trunchiului este de 12 cm. Din acest trunchi se taie două conuri care au ca bază bazele trunchiului dat, iar generatoarele unuia sînt în continuarea generatoarelor celuilalt. În ce raport se află volumele celor două conuri astfel obținute ?

$$R. \frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{125}.$$

85. Raza mică a unui trunchi de con este cu 1 cm mai mare decât $33\frac{1}{3}\%$ din raza mare. Înălțimea conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului dat este de 9 cm, iar înălțimea trunchiului este de 5 cm. Să se afle: a) aria laterală a trunchiului; b) volumul trunchiului de con; c) măsura unghiului ce-l formează generatoarea cu planul bazei mari.

$$R. A=65\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2, V=\frac{665\pi}{3} \text{ cm}^3; 45^\circ.$$

86. Un trunchi de con și un con au generatoarele și ariile lor laterale egale. Raza mică a trunchiului de con mărită cu 1 cm și apoi micșorată de 2 ori este tot atît cît 20% din raza mare a trunchiului mărită cu $\frac{1}{10}$ dm. Raportul razelor trunchiului de con este exprimat prin $2\frac{1}{2}:4\frac{1}{6}$. Să se calculeze raza conului.

$$R. R=8 \text{ cm}.$$

87. Un trapez dreptunghic în care baza mică este egală cu înălțimea se rotește complet în jurul laturii perpendiculare pe bază. Să se afle aria laterală a corpului format prin această rotație, știind că 20% din latura oblică față de baze este cu 2 cm mai mică decât 50% din înălțimea trapezului, iar suma acestor lungimi este de 18 cm.

$$R. \text{Aria laterală} = 220 \pi \text{ cm}^2.$$

88. Se circumscrie unui trunchi de piramidă regulată, cu bazele pătrate un trunchi de con. Să se determine aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con, știind că laturile pătratelor de bază ale trunchiului de piramidă sînt egale respectiv cu 70 cm și 40 cm, iar apotema este de 20 cm.

$$R. A_l \approx 6\,088 \text{ cm}^2; A_t \approx 16\,292 \text{ cm}^2; V \approx 65\,603,8 \text{ cm}^3.$$

89. Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este egală cu diferența ariilor bazelor,

iar razele bazelor sînt R și r . Să se exprime în funcție de R și r , volumul trunchiului de con.

Indicație: Notînd cu h înălțimea trunchiului, obținem:

$$\pi(R+r)h = \pi(R^2 - r^2) \rightarrow h = (R-r).$$

$$R. V = \frac{\pi^2}{3}(R^3 - r^3).$$

90. Din două foi de tablă galvanizată trebuie confecționată o pîlnie cu diametrul superior de 100 mm, cel inferior de 20 mm și înălțimea de 50 mm. Cît material se consumă, dacă pentru încheieturi se adaugă 3% ?

$$R. \approx 124,20 \text{ cm}^2.$$

91. Un coș de fabrică, în formă de trunchi de con, înalt de 30 m, are diametrul exterior la bază de 3,6 m și la vîrf de 2,4 m. Diametrul interior al coșului este (pe toată înălțimea) de 1,6 m. Să se afle masa acestui coș, știind că 1 m^3 de zidărie are masa de 1 800 kg.

$$R. 278 \text{ t.}$$

92. Intr-un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, $BC = 45 \text{ cm}$ și $AC = 27 \text{ cm}$ se duce o paralelă MN la AB la $\frac{5}{9}$ din AC . Să se afle ariile laterale ale corpurilor ce se formează prin rotația în jurul catetei AB și în jurul segmentului $MA (M \in AC)$ a lui $AMNB$.

$$R. A_l = 5\,086,8 \text{ cm}^2; A_{l, \text{trunchi con}} = 1\,300 \pi \text{ cm}^2.$$

93. O coloană de beton în formă de trunchi de con are diametrele bazelor, respectiv de 50 cm și 30 cm, iar înălțimea de 6 m. Să se determine masa coloanei, știind că densitatea betonului este de $2\,200 \text{ kg/m}^3$.

$$R. 1\,692,46 \text{ kg.}$$

94. Se dă un trapez isoscel care se rotește în jurul dreptei ce unește mijloacele laturilor paralele. Cunoșcînd că laturile paralele sînt egale, respectiv cu 24 și 36 cm și laturile neparalele sînt de cîte 20 cm, să se determine ariile laterală și totală și volumul corpului generat prin rotație.

$$R. A_l = 1\,884 \text{ cm}^2; A_t = 3\,353,52 \text{ cm}^2; V = 13\,638,276 \text{ cm}^3.$$

95. Un trapez isoscel $ABCD$ se rotește pe rînd în jurul bazelor sale. a) Să se determine aria și volumul corpurilor generate prin rotație știind că laturile paralele sînt egale, respectiv, cu 24 cm și 36 cm, iar laturile neparalele sînt egale cu 10 cm. b) Să se menționeze corpurile ce se formează prin rotația trapezului în jurul laturii neparalele și să se facă schița.

$$R. a) \text{ Aria corp.} = 544 \pi \text{ cm}^2; V = 1\,792 \pi \text{ cm}^3; \text{ aria corp.} = 736 \pi \text{ cm}^2;$$

$$V = 2\,048 \pi \text{ cm}^3; b) \text{ două conuri și un trunchi de con.}$$

IV.23. SFERA

96. O parte din acoperișul unui ateneu avînd forma unei jumătăți de sferă este învelit cu tablă groasă de 3 mm. Ce masă are tabla întrebuițată, știind că densitatea tablei este de $8\,500 \text{ kg/m}^3$, iar raza sferei este de 3,6 m ?

Indicație: Se vor calcula volumele interior și exterior.

$$R. \text{ Masa} \approx 2 \text{ t.}$$

97. Un cazan pentru păcură are forma de cilindru, prevăzut la capete cu câte o jumătate de sferă. Lungimea cazanului (partea cilindrică) este de 10 m, iar diametrul lui este de 4 m. Să se afle capacitatea lui. Câte cazane sînt necesare pentru a umple un rezervor mare cilindric, înalt de 20 m și cu lungimea cercului de bază de 40π m ?

Indicație. Pentru a afla capacitatea cazanului se află întîi volumul și apoi se ține seamă de relația: 1 m^3 corespunde 10 hl.

$$\text{R. } \frac{1\ 520\pi}{3} \text{ hl; 16 cazane.}$$

98. Intr-o sferă cu diametrul de $12\sqrt{2}$ cm este înscris un cilindru. Să se calculeze raza și înălțimea cilindrului, aria laterală și volumul lui, știind că secțiunea axială a cilindrului este un pătrat.

$$\text{R. } r=6\text{ cm; } l=12\text{ cm; } Al=144\pi\text{ cm}^2; V=432\pi\text{ cm}^3.$$

99. Intr-o sferă cu raza de 6 cm este înscris un con echilateral. Să se afle elementele conului (rază, generatoare, înălțime), aria laterală și volumul lui.

$$\text{R. } R=3\sqrt{3}\text{ cm; } G=6\sqrt{3}\text{ cm; } l=9\text{ cm; } Al=54\pi\text{ cm}^2; V=81\pi\text{ cm}^3.$$

100. Unui cub cu muchia de 8 cm i se circumscrie o sferă. Să se afle aria sferei.

$$\text{R. } \text{Aria sferei}=192\pi\text{ cm}^2.$$

101. Care este raportul dintre aria Pămîntului și cea a Lunii, știind că diametrul Pămîntului este egal cu $3\frac{2}{3}$ ori diametrul Lunii ?

$$\text{R. } \frac{121}{9}.$$

102. O sferă are raza de 5 cm; se duce o secțiune la 3 cm de centru. Să se afle volumul conului care are vîrfurile în centrul sferei, iar ca bază secțiunea obținută.

$$\text{R. } V=50,240\text{ cm}^3.$$

103. Intr-un con, 0,125 din înălțime este cu 3 cm mai mică decît $\frac{2}{5}$ din generatoarea sa, iar diferența dintre generatoare și înălțime este 0,2 dm. Să se afle volumul sferei înscrisă în acel con.

$$\text{R. } V=36\pi\text{ cm}^3.$$

104. O sferă cu diametrul de 20 cm este încărcată cu o sarcină electrică de 314 coulombi. Să se calculeze densitatea superficială a sarcinii, știind că ea este egală cu raportul dintre sarcină și aria pe care este distribuită și că se exprimă în coulombi pe cm pătrat.

$$\text{R. } 0,25\text{ C/cm}^2.$$

105. Intr-o sferă cu raza de 8,5 cm se duce o secțiune plană cu raza de 3 cm. Să se calculeze ariile calotelor determinate de această secțiune.

$$\text{R. } S_1=29,36\text{ cm}^2; S_2=878,10\text{ cm}^2.$$

106. Se dă o sferă cu diametrul de 240 cm care se intersectează cu două plane paralele. Să se afle aria și volumul zonei sferice determinate, știind că unul din plane trece prin centrul sferei, iar celălalt la distanța de 30 cm de centrul sferei.

$$\text{R. } 22\ 608\text{ cm}^2; 132\ 822\text{ cm}^3.$$

IV.24. PROBLEME DE GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU

1. Se dă un trapez isoscel în care diferența lungimilor bazelor este de 2 cm iar segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele este de 6 cm; latura neparalelă face cu baza un unghi de 60° . Să se calculeze lungimile bazelor și aria trapezului.

$$R. B=7 \text{ cm}; b=5 \text{ cm}; \text{aria}=6\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

2. Să se găsească pe latura AD a triunghiului ADE un punct I , astfel ca segmentul IM paralel cu baza DE a triunghiului să fie congruent cu ID .

3. Un trapez are baza mare de 23 m, baza mică de 14 m și înălțimea de 12 m. Să se calculeze lungimea segmentului dus în interiorul trapezului, paralel cu bazele și la distanță de 4 m de baza cea mare.

$$R. 20 \text{ m.}$$

4. Se dă dreptunghiul $ABCD$, în care $AD=15 \text{ m}$ și $AB=18 \text{ m}$. Să se construiască un dreptunghi $A'B'C'D'$ cu vîrfurile situate respectiv pe laturile AB , BC , CD și DA , astfel ca raportul $\frac{A'B'}{A'D'} = \frac{1}{2}$.

Indicație: Se vor lua următoarele necunoscute: $AA'=x$, $AD'=y$. Se observă că $\angle AD'A' \equiv \angle BA'B'$ avînd laturile perpendiculare. Rezultă $\triangle AA'D' \sim \triangle BB'A'$; $\triangle AD'A' \equiv \triangle CB'C'$ și $\triangle DC'D' \equiv \triangle BA'B'$. Se găsește $x=8$, $y=14$.

5. Baza unui triunghi este $AB=14 \text{ m}$. Celelalte două laturi sînt $AC=15 \text{ m}$ și $BC=13 \text{ m}$. Se duce o paralelă MN la bază ($M \in AC$, $N \in BC$) astfel încît $AM+BN=MN$. Să se afle cele două segmente, AM și BN .

Indicație: Notăm cele două segmente cu x și y . $MN=x+y$, $MC=15-x$, $NC=13-y$.

$$R. 5 \text{ m}; 4\frac{1}{3} \text{ m.}$$

6. Un paralelipiped dreptunghic are aria laterală de 450 cm^2 și înălțimea de 9 cm. Știind că $\frac{1}{3}$ din lungimea bazei este egală cu $\frac{1}{2}$ din lățimea ei, să se afle volumul și masa, cunoscînd că $\rho=7,8 \text{ g/cm}^3$.

$$R. V=1350 \text{ cm}^3; m=10,530 \text{ kg.}$$

7. Un paralelipiped dreptunghic are înălțimea de 5 cm iar aria laterală de 160 cm^2 . Știind că $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei plus $\frac{1}{3}$ din lățime fac împreună 7 cm, să se afle laturile bazei și volumul paralelipipedului dreptunghic.

$$R. L=10 \text{ cm}; l=6 \text{ cm}; V=300 \text{ cm}^3.$$

8. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2 , înălțimea lui este de 6 m. Dimensiunile dreptunghiului de la bază sînt în raport de $\frac{1}{2}$. a) Să se afle dimensiunile dreptunghiului de bază. b) Aceeași chestiune în cazul cînd raportul dimensiunilor este de $\frac{3}{5}$, aria laterală 256 m^2 și înălțimea de 8 m.

$$R. a) l=2 \text{ m}; L=4 \text{ m}; b) l=6 \text{ m}; L=10 \text{ m.}$$

9. Un rezervor de benzină de forma unui paralelipiped dreptunghic are diagonala bazei de 10 m și această diagonală formează cu una din laturi un unghi de $40^{\circ}30'$. Diagonala paralelipipedului formează cu diagonala bazei un unghi de 75° . Să se calculeze volumul și aria laterală a rezervorului.

Indicație: Se aplică pe rând funcțiile trigonometrice în cele două triunghiuri dreptunghice ce se formează cu cele două diagonale.

$$R. L=7,6 \text{ m}; l=6,5 \text{ m}; l=37,3 \text{ m}; V \approx 1843 \text{ m}^3; Al \approx 1052 \text{ m}^2.$$

10. Baza unui paralelipiped este un romb. Secțiunile diagonale sînt perpendiculare pe planul bazei avînd respectiv ariile de 100 cm^2 și 105 cm^2 , iar lungimea liniei intersecției lor este egală cu 10 cm. Să se determine: a) volumul acestui paralelipiped; b) aria laterală; c) aria totală.

Indicație. Fețele laterale sînt dreptunghiuri cu baza cît latura rombului și înălțimea de 10 cm. Se obține: $l = \sqrt{52,5625} = 7,25 \text{ cm}$.

$$R. a) V=525 \text{ cm}^3; b) Al=290 \text{ cm}^2 c) At=398 \text{ cm}^2.$$

11. Într-un paralelipiped cu baza un dreptunghi, diferența dintre pătratul diagonalei dreptunghiului de bază și pătratul unei laturi a dreptunghiului este de 65, iar suma acestor două lungimi (diagonala bazei și una din laturile dreptunghiului) este de 13 cm. Înălțimea paralelipipedului este media proporțională a aceluiași lungimi. Să se calculeze diagonala paralelipipedului.

$$R. 3\sqrt{13} \text{ cm}.$$

12. O cutie de sticlă (transparentă) are formă de paralelipiped dreptunghic. Una dintre muchiile sale este de 12 cm, iar celelalte sînt necunoscute. Cutia conține o cantitate de apă. Dacă așezăm cutia astfel ca fața cu dimensiunile necunoscute să fie baza, apa se ridică pînă la o înălțime de 2 cm; dacă o așezăm astfel ca una sau alta dintre fețele ei să fie orizontală, apa se ridică o dată pînă la înălțimea de 3 cm și a doua oară pînă la înălțimea de 4 cm. a) Să se afle dimensiunile cutiei. b) Cîtă apă conține cutia ? c) Cîtă apă ar conține cutia dacă ar fi plină ?

$$R. a) 12 \text{ cm}; 18 \text{ cm}; 24 \text{ cm}; b) 864 \text{ cm}^3; c) 5184 \text{ cm}^3.$$

13. Secțiunea transversală printr-o grindă de forma unei prisme drepte avînd lungimea L este un trapez dreptunghic cu perimetrul p și suma laturilor neparalele S . Să se calculeze ariile fețelor laterale paralele ale grinzii, știind că diferența acestor arii este d . *Aplicație numerică:* $L=8 \text{ m}; p=1,6 \text{ m}; S=0,8 \text{ m}; d=3,2 \text{ m}^2$.

Indicație: Se notează cu x și y bazele trapezului și se obține sistemul:
$$\begin{cases} p=x+y+S, \\ Ly-Lx=d \end{cases}$$

$$R. x=0,2 \text{ m}; y=0,6 \text{ m}; \text{Aria}_1=xL=1,6 \text{ m}^2; \text{Aria}_2=yL=4,8 \text{ m}^2.$$

14. Un bazin de înot are forma de paralelipiped dreptunghic. La un moment dat, bazinul cuprinde o anumită cantitate de apă. După un timp oarecare bazinul pierde prin evaporare o cantitate $Q \text{ m}^3$ de apă. Să se calculeze nivelul inițial și cel final din bazin, precum și volumul de apă inițial, știind că aria fundului bazinului este S , iar nivelul la care ar ajunge apa, dacă peste cantitatea inițială s-ar adăuga cea rămasă după

evaporare, ar fi de L m. *Aplicație numerică:* $Q=600 \text{ m}^3$; $S=1\,500 \text{ m}^2$; $L=3 \text{ m}$.

Indicație: Notând cu x înălțimea inițială a apei și cu y înălțimea finală a apei obținem:
$$\begin{cases} x-y=\frac{Q}{S} \\ x+y=L \end{cases}$$

$$\text{R. } x=1,7 \text{ m; } y=1,3 \text{ m; } V_{\text{inițial}}=2\,550 \text{ m}^3.$$

15. Într-o piramidă cu baza un dreptunghi, lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decât lățimea. Dacă mărim lungimea bazei cu 2 cm, iar lățimea cu 2 cm, aria bazei crește cu 44 cm^2 . Știind că fețele laterale mai mici fac cu baza un unghi cu măsura de 45° , să se afle laturile bazei și volumul piramidei.

$$\text{R. } L=12 \text{ cm; } l=8 \text{ cm; } V=192 \text{ cm}^3.$$

16. O piramidă are ca bază un dreptunghi cu perimetrul de 40 cm. Dacă mărim lungimea bazei cu 3 cm și micșorăm lățimea bazei cu 2 cm, aria bazei se micșorează cu 6 cm^2 . Știind că înălțimea piramidei este cât $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei, să se afle laturile bazei, aria laterală și volumul piramidei. Vîrfurile piramidei se proiectează în punctul de intersecție al diagonalelor.

$$\text{R. } Al=(48\sqrt{2}+24\sqrt{13}) \text{ cm}^2; V=192 \text{ cm}^3.$$

17. Diferența între apotemă și înălțimea unei piramide hexagonale regulate este de 8 cm. Știind că apotema poligonului de bază este de 20 cm, să se afle volumul piramidei, ariile laterală și totală (exprimate în dm).

$$\text{R. } V=9,68 \text{ dm}^3; Al=20,10 \text{ dm}^2; At=33,95 \text{ dm}^2.$$

18. O piramidă are baza un trapez isoscel $ABCD$, în care CD este baza mică, AB este baza mare și $[BC]=[AD]$. Înălțimea trapezului este de 15 cm, iar înălțimea piramidei de 1 m. Știind că înălțimea piramidei cade în mijlocul M al bazei mari, iar laturile CD și AB sînt respectiv egale cu cantitățile x și y date de sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{363}x + \sqrt{300}y}{\sqrt{3}} = 580, \\ \frac{\sqrt{52}x - \sqrt{13}y}{\sqrt{13}} = 4 \end{cases}$$

Se cere să se afle volumul piramidei și lungimile muchiilor piramidei.

$$\text{R. } AB=36 \text{ cm; } CD=20 \text{ cm; } BC=17 \text{ cm; } V=14 \text{ dm}^3; VA=VB=101,6 \text{ cm; } VC=VD=101,6 \text{ cm.}$$

19. O piramidă are ca bază un triunghi dreptunghic în care una din catete este de 15 cm, iar cealaltă catetă este mai mică decât ipotenuza. Înălțimea piramidei este cu 20% mai mare decât ipotenuza triunghiului de bază. a) Să se afle aria secțiunii făcute în această piramidă printr-un plan paralel cu baza dus la $\frac{2}{3}$ din înălțime față de planul bazei. b) Să se afle volumul piramidei care are ca bază secțiunea aceasta și vîrfurile comune cu vîrfurile piramidei date.

$$\text{R. a) } A=16\frac{2}{3} \text{ cm}^2; \text{ b) } V=55\frac{5}{9} \text{ cm}^3.$$

20. O piramidă are baza un triunghi dreptunghic ale cărui catete sînt în raportul $\frac{3}{2}$, iar diferența dintre segmentele determinate de înălțimea triunghiului pe ipotenuză este de 2 cm. Să se afle volumul piramidei, știind că înălțimea ei este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decît ipotenuza triunghiului de bază.

$$R. V=27,04 \text{ cm}^3.$$

21. Un elev își construiește o piramidă triunghiulară regulată, cu muchiile din sîrmă. Pentru confecționarea piramidei a folosit 1,08 m sîrmă. Știind că muchia laterală este cu 16 cm mai mare decît latura bazei, să se afle latura triunghiului de bază, muchia piramidei și înălțimea corpului construit.

$$R. 10 \text{ cm}; 26 \text{ cm}; \sqrt{1928/3} \text{ cm}.$$

22. Intr-un trunchi de piramidă regulată, aria laterală este de 480 cm^2 , iar apotema trunchiului 8 cm. Știind că $\frac{1}{3}$ din latura bazei mari întrece cu 3 cm $\frac{1}{4}$ din latura bazei mici, să se afle laturile celor două baze și volumul trunchiului de piramidă.

$$R. L_4=18 \text{ cm}; l_4=12 \text{ cm}; V=\frac{\sqrt{55}}{3}(324+216+144)\text{cm}^3.$$

23. Un dig de beton armat are secțiunea un trapez cu baza mică de 3 m, înălțimea de 2 m, iar laturile neperalele ale trapezului fac cu planul bazei unghiuri de 30° și 45° . Lungimea digului este 100 m. Câți metri cubi de beton sînt necesari pentru construirea digului și ce masă are acest dig, cunoscînd că densitatea betonului este 2500 kg/m^3 .

$$R. V=1146 \text{ m}^3; m=2865 \text{ t}.$$

24. Un triunghi de piramidă patrulateră regulată are apotema de 17 cm iar aria laterală de 1904 cm^2 . Diferența dintre ariile celor două baze este de 896 cm^2 . Să se afle volumul trunchiului de piramidă.

$$R. V=12080 \text{ cm}^3.$$

25. Un trunchi de piramidă patrulateră are latura pătratului bazei mari de 20 cm, iar 25% din apotema trunchiului este cu $1\frac{1}{6} \text{ cm}$ mai mare decît $0,1(6)$ din înălțimea lui.

Diferența dintre apotemă și înălțime fiind de 0,2 dm, să se afle aria laterală a trunchiului.

$$R. Al=560 \text{ cm}^2.$$

26. Un trunchi de piramidă are bazele dreptunghiri; dimensiunile bazei mari sînt în raport de $\frac{3}{4}$, iar diferența acestor dimensiuni este de 4 cm. Știind că raportul perimetrelor celor două baze este $\frac{1}{4}$, iar diagonala trunchiului este de 2,05 dm, să se afle aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă.

$$R. A \approx 203,10 \text{ cm}^2.$$

27. Intr-un trunchi de piramidă hexagonală regulată se cunosc următoarele date:

a) media aritmetică dintre latura bazei mari și latura bazei mici este de 7 cm; b) $\frac{1}{3}$

din apotema bazei mici este egală cu $\frac{1}{4}$ din apotema bazei mari; c) apotema trunchiului de piramidă este medie proporțională între cele două apoteme ale bazelor. Să se calculeze cât la sută din apotema trunchiului de piramidă reprezintă înălțimea corpului.

$$R. L_6=8 \text{ cm}; l_6=6 \text{ cm}; 96,8\%.$$

28. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt în raport de $\frac{1}{2}$. Latura bazei mici micșorată de trei ori și apoi mărită cu 2 cm este cât $\frac{1}{2}$ din latura bazei mari. Fețele laterale ale trunchiului formează un unghi de 60° cu planul bazei. Să se afle volumul trunchiului.

$$R. V = \frac{63\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

29. Diferența laturilor de bază ale unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată este de 2 dm, apotema trunchiului este de 40 dm, iar aria laterală este de 2 400 dm². Să se afle ariile triunghiurilor de bază ale trunchiului, apoi să se compare raportul acestor arii cu raportul dintre laturile triunghiurilor de bază.

$$R. \text{Aria}_1 = \frac{441\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2; \text{Aria}_2 = \frac{361\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2.$$

30. Un elev își construiește, din sîrmă, un model de trunchi de piramidă patrulateră regulată, folosind 156 cm de sîrmă. Știind că perimetrul unei fețe laterale este de 48 cm, iar latura bazei mici este de $\frac{2}{3}$ din latura bazei mari, să se afle laturile celor două baze și muchia laterală a trunchiului de piramidă.

$$R. L=18 \text{ cm}; l=12 \text{ cm}; m=9 \text{ cm}.$$

31. Un dreptunghi cu perimetrul de 34 cm se rotește în jurul laturii mici. Se știe că lungimea întrece cu 7 cm lățimea. Se cer: a) volumul și aria corpului generat; b) volumul și aria prisme patrulateră regulate înscrise în cilindrul rezultat.

$$R. 1) V=2\,260,80 \text{ cm}^3; A=1\,281,12 \text{ cm}^2. 2) V=1\,440 \text{ cm}^3; A=914,40 \text{ cm}^2.$$

32. Un rezervor de benzină în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei în raportul de $\frac{10}{15,7}$, diferența acestor dimensiuni este de 5,7 m, iar înălțimea de 8 m. Cîte cisterne în formă de cilindru sînt necesare pentru a umple acest rezervor, știind că cisterna are diametrul de 3 m, iar lungimea de 4 m?

$$R. 44 \text{ de cisterne}.$$

33. Să se determine R și G ale unui cilindru drept, Știind că înălțimea este cu 5 cm mai mare decît raza, iar raportul lor este de $\frac{7}{2}$.

$$R. R=2 \text{ cm}; G=7 \text{ cm}.$$

34. Să se afle aria laterală și volumul unui cilindru circular drept știind că raza cilindrului este cu 1 cm mai mare decît $\frac{1}{3}$ din generatoare, iar media aritmetică între înălțime și rază este 6,5 m.

$$R. A_l=72\pi \text{ cm}^2. V=144\pi \text{ cm}^3.$$

35. Un tub cilindric confecționat din cupru, avînd densitatea de ρ kg/m³ are masa de m kg. a) Să se calculeze diametrul interior și diametrul exterior al tubului, știind că suma lor este S , iar lungimea tubului este L . b) Să se calculeze diferența dintre aria suprafeței laterale exterioare și aria suprafeței interioare. *Aplicație numerică:* $S=0,2$ m; $L=12$ m; $\rho=8\,900$ kg/m³; $m=134,14$ kg.

Indicație: Dacă notăm razele cu x și y , se obține sistemul:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{m}{\pi \rho L}, \\ x + y = S. \end{cases}$$

R. $x=1,01$ dm; $y=0,99$ dm; ≈ 15 dm².

36. Să se calculeze volumul unui con circular drept, știind că aria laterală este de patru ori mai mare decât aria bazei, iar înălțimea cu 5 cm mai mare ca raza.

Indicație: Notînd $R=x$, $l=y$, se obține din datele problemei:

$$G = \sqrt{l^2 + R^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 4x; y - x = 5.$$

R. $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{125\sqrt{15}}{(\sqrt{15}-1)^3} \approx 19$ cm³.

37. Intr-un con este înscris un cilindru care are aria totală echivalentă cu aria laterală a conului. Unghiul maxim dintre două generatoare de la vârful conului este drept. Să se demonstreze că distanța de la vârful conului pînă la baza superioară a cilindrului este egală cu jumătate din generatoarea conului.

Indicație: Se notează raza cilindrului cu r , iar raza conului cu $(r+x)$, generatoarea conului cu G și din echivalența ariilor se scoate:

$$\pi G(r+x) = 2\pi r(r+x); \text{ apoi } G=2r.$$

38. Un trapez dreptunghic are baza mică egală cu înălțimea. Aceasta este cu 12 cm mai mică decât baza mare, iar latura oblică este de 15 cm. Trapezul se rotește în jurul bazei mari, dînd naștere unui corp al cărui volum și arie se cer.

R. $V=3\,306,420$ cm³; $A=1\,186,92$ cm².

39. Raza unui con circular drept este de 3 dm, iar raza cercului determinat de un plan de secțiune dus la 1 dm de bază este de 10 cm. Să se afle înălțimea și generatoarea conului.

R. $G=3,35$ dm; $l=1,5$ dm.

40. Înălțimea unui trapez dreptunghic este: jumătate din baza mică, de $3\frac{1}{3}$ ori mai mică decât baza mare și cu 2 cm mai mică decât latura ne paralelă a trapezului. Știind că perimetrul trapezului este de 24 cm, să se afle aria laterală a corpului format prin rotirea în jurul laturii perpendiculare pe bază.

R. 251,20 cm².

41. Raza unui con circular drept este de 4 ori mai mare decât $0,3$ din înălțimea lui, iar diferența dintre raza și înălțimea conului este de 2 cm. La $\frac{2}{3}$ din înălțime față de baza conului se face o secțiune paralelă cu baza. Să se afle raportul ariilor laterale ale corpurilor formate: con și trunchi de con. Cît la sută reprezintă aria laterală a trunchiului de con ?

R. $\frac{1}{8}$; 12,5%.

42. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 12 cm, iar suma dintre ipotenuză și cealaltă catetă este de 24 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului dreptunghic în jurul ipotenuzei.

R. $V=259,2\pi \text{ cm}^3$.

43. Baza mică a unui trapez dreptunghic mărită cu o treime a ei este tot atât cât 25% din baza mare, mărită cu lungimea bazei mici. Înălțimea trapezului este de 4 cm, iar diferența bazelor este de 3 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a trapezului dreptunghic în jurul bazei mici.

R. $V=176\pi \text{ cm}^3$.

44. Un turn de formă cilindrică are un vîrf conic a cărui bază este egală cu baza cilindrului. a) Să se calculeze înălțimea totală a turnului, știind că ea este de n ori mai mare decât înălțimea părții cilindrice. b) Volumul total al turnului fiind V , iar raza R , să se calculeze aria laterală a turnului.

Aplicație numerică: $n=6$; $R=3 \text{ m}$; $V=150,72 \text{ m}^3$.

R. a) Înălțimea totală $=12 \text{ m}$; b) aria turnului $\approx 132 \text{ m}^2$.

45. Capsula de protecție a aparatului instalat în vîrfurile unei rachete meteorologice are forma din figura IV.1, a–b. Știind că ea are masa de $m \text{ kg}$ și este confecționată dintr-un aliaj special, avînd densitatea de $\rho \text{ kg/m}^3$, să se calculeze înălțimea. Raza bazei este de $R \text{ cm}$, iar raportul dintre lungimea porțiunii de metal și lungimea porțiunii goale de-a lungul axei de simetrie a capsulei este K . Aplicație numerică:

$m=5,338 \text{ kg}$; $R=10 \text{ cm}$; $\rho=8\,500 \text{ kg/m}^3$; $K=\frac{1}{5}$.

R. $\approx 35 \text{ cm}$.

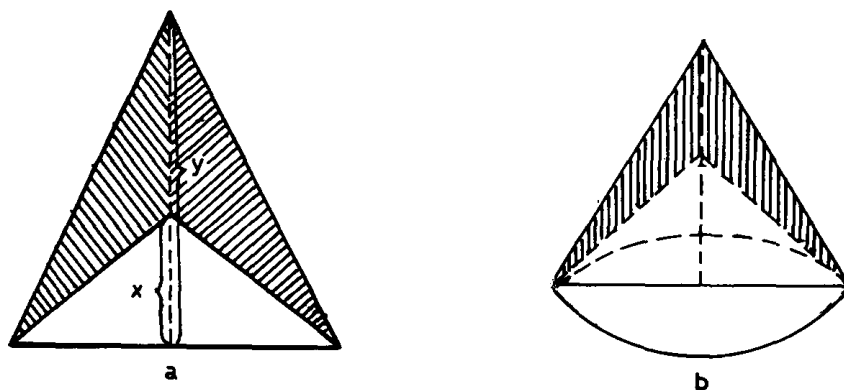


Fig.IV.1

46. Într-un trunchi de con, lungimile razei sînt proporționale cu numerele 3 și 2, iar $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{4}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului are lungimea egală cu 5 cm . Să se afle aria laterală și volumul trunchiului.

R. $Al=100\pi \text{ cm}^2$; $V=30\pi \text{ cm}^3$.

47. Intr-un trunchi de con suma lungimilor razelor este egală cu lungimea unei sfere avînd aria de $400 \pi \text{ cm}^2$. Știind că raza mare întrece cu 1 cm dublul razei mici, iar înălțimea este cît raza mare, să se afle lungimile celor două raze, aria laterală și volumul trunchiului de con.

$$\text{R. } R=7 \text{ cm; } r=3 \text{ cm; } Al=10\sqrt{65} \pi \text{ cm}^2; V=\frac{553\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

IV.25. PROBLEME RECAPITULATIVE DE GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU

A. GEOMETRIE PLANĂ

1. În triunghiul ABC se duc înălțimile AA' și BB' ce se intersectează în H și fac cu AB unghiurile avînd măsurile de 50° și respectiv de 10° . 1) Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Să se arate că: 2) $AC+BC=2(A'C+B'C)$; 3) $A'H^2+A'C^2=\frac{BH^2+AC^2}{4}$.

$$\text{R. } m(\angle A)=80^\circ; m(\angle B)=40^\circ; m(\angle C)=60^\circ.$$

2. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc, în exterior, pătratele $ABDE$ și $ACFG$. BG se intersectează cu EC în P .

Să se demonstreze că: 1) $[EC]=[BG]$; 2) AP este bisectoarea unghiului EPG . 3) Să se arate că triunghiul EPG este dreptunghic.

3. Se dă trapezul isoscel $ABCD$, $[AB]=[DC]$. Pe baza mare BC se iau segmentele $[MB]=[CN]$ în sensuri opuse. Fie Q intersecția segmentelor AN și MD . Să se arate că:

1) $[MD]=[AN]$; 2) triunghiul MQN este isoscel.

3) Notînd cu P intersecția prelungirii laturilor egale ale trapezului isoscel să se arate că PQ este bisectoarea unghiului P .

4) Să se arate că $\triangle PMN$ este isoscel.

4. Într-un cerc cu diametrul $AB=24 \text{ cm}$ se înscrie un trapez isoscel $ABCD$. Latura BC formează cu diametrul un unghi cu măsura 60° . Pe semicercul opus celui în care este înscris trapezul, se consideră un punct M din care se coboară perpendiculara MP pe AB . 1) Să se afle perimetrul poligonului $AMBCD$ știind că unghiul format de coarda MB cu diametrul AB are măsura de 30° . 2) Să se determine poziția lui M pe semicerc, astfel încît perimetrul poligonului să fie minim. 3) Să se calculeze în acest caz perimetrul poligonului.

$$\text{R. } 1) 12(4+\sqrt{3}) \text{ cm; } 3) \text{ Per.minim}=5R.$$

5. Laturile unui paralelogram $ABCD$ sînt $AB=10 \text{ cm}$; $AD=9 \text{ cm}$. Diagonalele $BD \cap AC = \{O\}$. Aria $\triangle AOB=18 \text{ cm}^2$. 1) Să se calculeze diagonalele paralelogramului. 2) Să se construiască paralelogramul $ABCD$.

$$\text{R. } 1) BD=17 \text{ cm; } AC=\sqrt{73} \text{ cm.}$$

6. În Δ isoscel ABC una din laturile egale are lungimea $AB=a$. Fie E mijlocul lui BC și FE mediatoarea laturii AB astfel încât $EF \cap BC = \{E\}$. 1) Să se arate că CE este cît apotema unui pătrat înscris într-un cerc de rază a . 2) Să se arate că există relația

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{AE}.$$

$$R. EC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

7. Se dă latura paralelogramului $ABCD$. Din A se duce perpendiculara AA' pe latura BC iar din B se duce perpendiculara BB' pe CD . Să se arate că există relația:

$$\frac{AB}{BC+AB} = \frac{A'B}{B'C+A'B}.$$

8. Se dă triunghiul ABC , cu $m(\angle A) = 60^\circ$ și $m(\angle B) < 60^\circ$. Fie D simetricul lui C față de latura AB , iar $E = AC \cap BD$. Să se arate că dacă BF , unde $F \in AC$ este bisectoarea unghiului ABD , atunci și DF este bisectoarea unghiului ADE .

9. Perpendicularele pe diagonala BD a dreptunghiului $ABCD$ duse în B și D intersectează laturile DC și BC în M și N . Să se arate că:

$$1) BC^2 + CD^2 = BC \cdot CN + MC \cdot CD; 2) AB \cdot AC = CN \cdot BM; 3) BD^2 = \frac{BN \cdot BC + CD \cdot MD}{2}.$$

4) Cunoscînd că diagonala dreptunghiului este 8 cm iar proiecția ei pe BC este de 6,4 cm, să se calculeze perimetrul triunghiului MND .

$$R. \approx 33,2 \text{ cm}.$$

10. Se dă patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul O cu diagonalele BD și AC ; $BD \cap AC = \{N\}$. Să se determine diagonala BD a patrulaterului știind că $BC = 12$ cm, $AD = 6$ cm, $BN = 8$ cm și $AC = 9$ cm.

Indicație. Se va observa că triunghiurile BNC și NAD sînt asemenea.

$$R. BD = 10,5 \text{ cm}.$$

11. În Δ isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$ și $m(\angle A) = 60^\circ$, fie MD mediatoarea laturii AB și BD bisectoarea unghiului B ($M \in AB$ și $D \in AC$); AP bisectoarea unghiului A ; $P \in BD$; $AP \cap MD = \{N\}$ și $AP \cap BD = \{P\}$.

1) Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

2) Să se arate că ΔNPD este isoscel.

3) Se prelungește $[BA]$ cu segmentul $[AA']$ și $[DB]$ cu $[BB']$ așa fel încît $[AA'] \equiv [BB']$. Să se arate că $\Delta AA'C \equiv \Delta ABB'$.

$$R. m(\angle A) = 36^\circ; m(\angle B) = 72^\circ.$$

12. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, se cunoaște că $AB = 3$ cm și $AC = 6$ cm. Fie M mijlocul laturii AC . Se împarte BC în 5 părți egale prin punctele D, E, F, G pornind de la B . 1) Să se calculeze lungimea segmentului MF . 2) Să se arate că ΔABE este isoscel.

$$R. 1) MF = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm}.$$

13. În cercul O este înscris un triunghi ABC cu $m(\angle B)=48^\circ$. Bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe diametrul care trece prin C . Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

R. $(108^\circ; 24^\circ)$.

14. Lungimile laturilor unui triunghi oarecare ABC sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$. Latura cea mai mare AB este cu 3 cm mai mare decît latura cea mai mică AC . Perpendiculara dusă în B pe BC intersectează perpendiculara în A pe AB și în C pe AC , în M și N . $AM \cap CN = \{P\}$; $MN=15$ cm. 1) Să se afle perimetrul triunghiului ABC . 2) Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului MNP .

Indicație. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

R. 1) 14 cm; 2) 18 cm; 15 cm; 9 cm.

15. Într-un triunghi ABC , $m(\angle C)=30^\circ$. Înălțimea dusă din B determină pe AC segmentele AD și DC care au lungimile invers proporționale cu numerele 1 și $\frac{1}{12}$, iar latura $AC=26$ cm. Se cer: 1) lungimile laturilor triunghiului ABC ; 2) aria triunghiului ABC ; 3) aria triunghiului BDC ; 4) măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

R. 1) $AB=14$ cm; $BC=16\sqrt{3}$; $AC=24$ cm. 2) $104\sqrt{3}$ cm²;
3) $96\sqrt{3}$ cm². 4) $(\angle A) \approx 81^\circ 50'$; $(\angle B) \approx 68^\circ 10'$; $(\angle C)=30^\circ$.

16. Fie punctele B și C pe segmentul $AD=18$ cm, BC este media aritmetică între AB și CD și $\frac{AC}{2}=BD$. În punctul B se ridică o perpendiculară pe AD , ($BE=6$ cm) iar în punctul D perpendiculara $DF=12$ cm, de aceeași parte cu BE . Paralela dusă din E la AB întâlnește perpendiculara dusă din A în punctul G . 1) Să se afle lungimea segmentelor AB , BC și CD . 2) Să se arate că triunghiul GEF este isoscel.

R. $AB=10$ cm; $BC=6$ cm; $CD=2$ cm.

17. În \triangle isoscel ABC , $[AB]=[AC]$; $m(\angle A)=40^\circ$, BD bisectoarea unghiului B taie latura AC în D . Simetricul punctului D față de AB este punctul E iar simetricul punctului D față de BC este F ; $EF \cap AB = \{P\}$ și $EF \cap BC = \{G\}$. 1) Să se arate că triunghiul DEF este isoscel și să se calculeze măsurile unghiurilor lui. 2) Să se arate că $EF \perp BD$. 3) Să se calculeze măsurile unghiurilor poligonului $MPGND$, M și N fiind proiecțiile lui D pe AB și respectiv PC .

R. 1) $m(\angle D)=110^\circ$; $m(\angle E)=m(\angle F)=35^\circ$; 3) $m(\angle G)=m(\angle P)=125^\circ$; $m(\angle M)=m(\angle N)=90^\circ$.

18. ABC este \triangle dreptunghic, $m(\angle A)=90^\circ$; $BC=15$ cm, iar $AB=\frac{4}{5}$ din BC . Punctul M aparține lui AC ; $AM=3$ cm. Se duce $MN \parallel AB$; ($MN \cap BC = \{N\}$). Din M se duce $MG \perp BC$; $MG \cap BC = \{G\}$. 1) Să se calculeze aria $\triangle MGC$. 2) Să se calculeze perimetrul $\triangle MNG$.

R. 1) $8,64$ cm²; 2) $19,2$ cm.

19. Într-un triunghi ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, în care lungimile lui AB și AC sînt invers proporționale cu $1/3$ și $1/4$ iar diferența lungimilor catetelor este de 6 cm, se duce înălțimea AD și mediana AM ($D \in BC$, $M \in BC$). Din M se duce perpendiculara MN pe AM astfel încît $MN \cap AD = \{N\}$. 1) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABD . 2) Să se afle aria triunghiului ANM . 3) Să se afle aria patrulaterului $ABNM$.

R. 1) 43,2 cm; 2) $32\frac{13}{16} \text{ cm}^2$; 3) $117\frac{3}{16} \text{ cm}^2$.

20. ABC Δ dreptunghic, $m(\angle A) = 90^\circ$. Punctul $D \in AC$; se duce $DE \parallel BC$; $E \in AB$. Fie M mijlocul segmentului DE ; $AM \cap BC = \{N\}$. Să se arate că : $[BN] \equiv [NC]$ și $AN < \frac{AB+AC}{2}$.

21. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează sub un unghi avînd măsura de 110° . Se duce o perpendiculară din B pe AC în E , care intersectează pe AD în F . Să se arate că: $AF \cdot AD = BF \cdot BE$. Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului $EFDO$ (O fiind intersecția diagonalelor).

Indicație. $\Delta ABF \sim \Delta BCE$.

R. 110° ; 35° ; 90° ; 125° .

22. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$, diagonala $AC \perp CB$; $[BC] \equiv [AC]$. Înălțimea AD a trapezului este egală cu a . Se cere: 1) aria trapezului; 2) măsurile unghiurilor trapezului; 3) aria triunghiului dreptunghic ce se formează prin prelungirea laturilor neperalele ale trapezului.

R. 1) $\frac{3a^2}{2}$; 2) $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$; $m(\angle B) = 45^\circ$ și $m(\angle C) = 135^\circ$; 3) a^2 .

23. Fie cercul C de centru O și razele OB și OA ce formează $\angle AOB$ avînd măsura de 90° . Se duc tangente prin punctele A și B și se intersectează în Q . 1) Să se arate că OQ este bisectoarea unghiului AOB . 2) Să se arate că diagonalele patrulaterului $OBQA$ sînt perpendiculare.

24. Fie ABC un triunghi isoscel, $[AB] \equiv [AC]$. Punctul O este la intersecția mediatoarelor laturilor egale. Perpendiculara dusă din B pe BC intersectează mediatoarea OE în M , ($E \in AB$), iar paralela dusă din C la AB intersectează mediatoarea OD în N , $m(\angle MAN) = 150^\circ$, ($D \in AC$). 1) Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC . 2) Cunoscînd $AB = 4a$ cm, să se exprime în funcție de "a" aria triunghiului ABC .

R. 1) $m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C) = 60^\circ$; 2) $4a^2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$.

25. În ΔABC se duce bisectoarea AD ($D \in BC$). Simetricile punctului D față de AC și AB sînt respectiv M și N . Să se arate că: 1) ΔDMN este isoscel; 2) $m(\angle NDM) = m(\angle B) + m(\angle C)$; 3) $AD \perp MN$.

26. Un trapez isoscel are lungimea bazei mari de 8 cm, a bazei mici de 2 cm și un unghi cu măsura de 45° . Să se afle aria acestui trapez cu ajutorul unei construcții ajutătoare (nu se vor utiliza relațiile metrice, funcțiile trigonometrice sau proprietatea triunghiului dreptunghic isoscel).

27. Se dă un pătrat $ABCD$. Se construiește pe latura BC un triunghi isoscel OBC avînd măsura unghiurilor de la bază de 15° . Să se arate că ΔAOD este echilateral.

Indicație. Se va lua în considerație particularitatea ce o are un Δ dreptunghic cu un unghi de 15° . (Înălțimea dusă din unghiul drept pe ipotenuză este $1/4$ din ipotenuză.)

28. Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $AD=CB=a$. Se prelungesc segmentele AD și BC ; $(AD \cap BC = \{M\})$. Fie MH bisectoarea unghiului M care intersectează pe DC în H . Se consideră N și G mijloacele segmentelor DC și AB . Să se arate că: $MH \cap NG = \emptyset$.

Indicație. Din N se duc paralele la AD și CB egale cu a .

29. Avem Δ dreptunghi ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$ și punctul $M \in BC$. Simetricul lui M , față de AC este punctul N , simetricul lui M față de AB este punctul P , iar D și E sînt proiecțiile lui M pe AB și pe AC . 1) Să se arate că triunghiurile AEN și ADP sînt congruente. 2) Să se demonstreze că punctele N , A și P sînt coliniare. 3) $NC \cap MP = \{G\}$. Să se arate că triunghiul MGC este isoscel. 4) Să se arate că există relația:

$$\frac{AD}{AB+AD} = \frac{CM}{CB+CM}.$$

30. Intr-un triunghi ABC măsura unghiului exterior B este de trei ori mai mare decît măsura unghiului A al triunghiului și cu $\frac{4}{9}$ dr mai mare decît măsura unghiului C al triunghiului. Prin vîrfurile A al triunghiului se duce o paralelă la baza BC . Bisectoarea interioară a unghiului B întîlnește această paralelă în punctul M iar latura AC a triunghiului în punctul N . 1) Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC . 2) Să se arate că triunghiurile ABN și MNC sînt echivalente. 3) Să se arate că există relația $AB \cdot NB = MN \cdot BC$.

R. $m(\angle A) = 40^\circ$; $m(\angle B) = 60^\circ$; $m(\angle C) = 80^\circ$.

31. Aria unui trapez este de 48 cm^2 , raportul lungimilor bazelor este $\frac{3}{5}$, iar înălțimea lui este de 6 cm . 1) Să se afle lungimile bazelor trapezului. 2) Cît la sută din aria trapezului reprezintă aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neperalele ale trapezului și avînd ca bază, baza mică a trapezului?

R. $B = 10 \text{ cm}$; $b = 6 \text{ cm}$; $56,25\%$.

32. Intr-un trapez diferența lungimilor bazelor este 20 cm , iar linia mijlocie a trapezului este de $66,6\%$ din baza mare. Una din laturile neperalele și cu baza mare determină un unghi a cărui măsură este de 60° , cealaltă latură neperalelă este lungă de 20 cm . La distanța de $4\sqrt{3} \text{ cm}$ de baza mare se duce o paralelă la baze. 1) Ce fel de trapez este în condițiile problemei? 2) Să se calculeze înălțimea trapezului. 3) Să se afle lungimea paralelei dusă la baza mare.

R. 1) Trapezul este isoscel; 2) $10\sqrt{3} \text{ cm}$; 3) 22 cm .

33. În triunghiul ABC , $m(\angle A) = 60^\circ$ iar $m(\angle B) = 45^\circ$. Bisectoarea unghiului A întîlnește latura BC în D , apoi se duce $DN \perp AB$ și se prelungește această perpendiculară pînă

se taie cu prelungirea laturii AC în M . Să se arate că: 1) $AD = \frac{2}{3}$ din MN ; 2) $AD^2 = CM \cdot AB$; 3) $AN^2 = DN \cdot MN$.

34. Într-un paralelogram $ABCD$ bisectoarele unghiurilor consecutive A și B se întâlnesc pe latura CD în punctul E ($E \in CD$). 1) Să se arate că triunghiul BCE este isoscel. 2) Știind că lungimile bisectoarele AE și BE sînt în raportul de $4/3$ iar diferența proiecțiilor lor pe latura AB este de 2,8 cm, să se afle aria paralelogramului și lungimea segmentelor AE și EB .

R. 2) 48 cm^2 ; $AE=8 \text{ cm}$; $BE=6 \text{ cm}$.

35. Într-un triunghi dreptunghic isoscel ABC se înscrie un dreptunghi ce are două vîrfuri pe ipotenuza triunghiului, iar celelalte două vîrfuri pe catetele triunghiului. Raportul dimensiunilor dreptunghiului este de $2/5$, iar ipotenuza triunghiului dreptunghic este de 45 cm. 1) Să se afle dimensiunile dreptunghiului. 2) Cît la sută reprezintă lățimea dreptunghiului din înălțimea triunghiului dat ?

R. 1) 10 cm și 25 cm; 2) $44\frac{4}{9}\%$.

36. Se dă triunghiul isoscel ABC , $[AB]=[AC]$ și înălțimea AD . Fie E și F simetricile punctului D față de laturile congruente ale triunghiului, $EF \cap AC = \{M\}$; $EF \cap AD = \{O\}$; $EF \cap AB = \{N\}$. 1) Să se arate că patrulaterul $BCEF$ este un trapez isoscel. (Se pot folosi cunoștințe diferite și se pot da cel puțin trei demonstrații diferite.) 2) Să se determine natura patrulaterului $DCEM$ și să se arate că este echivalent cu patrulaterul $BDNF$. 3) Să se demonstreze că AD este bisectoare pentru un unghi al triunghiului AEF ; la fel pentru un unghi al triunghiului EDF . 4) Să se studieze natura și elementele patrulaterului $ADEF$. 5) Să se arate că există relația:

$$\frac{AN+AM}{AB+AC} = \frac{AO+ON}{AD+BD} = \frac{AN}{AC}.$$

37. Într-un trapez isoscel $ABCD$, cu baza mare $BC=0,20 \text{ m}$ se înscrie un dreptunghi a cărui arie este de 48 cm^2 , lungimea dreptunghiului fiind baza mică (AD) a trapezului. $BA \cap CD = \{E\}$. Perpendiculara dusă din E pe AD este de 4 cm. 1) Să se afle aria trapezului $ABCD$; 2) Să se demonstreze $\triangle BDE \equiv \triangle CAE$. 3) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului EBC . 4) Să se arate că aria triunghiului EAD este a treia parte din aria dreptunghiului înscris, iar raportul dintre aria dreptunghiului și aceea a trapezului este de $4/7$. 5) Cum se poate construi (fără calcule sau măsurători) un dreptunghi a cărui arie este jumătate din aria trapezului ?

R. 1) 84 cm^2 ; 3) 10 cm.

38. Raportul lungimilor bazelor unui trapez $ABCD$ este de $2/5$. Latura ne paralelă $BC=12 \text{ cm}$ și face cu baza mare AB un unghi cu măsura de 60° iar latura ne paralelă AD face cu baza mare un unghi cu măsura de 30° . Să se calculeze: 1) aria $\triangle MDC$ ($AB \cap CD$); 2) aria $\triangle ACD$; 3) raportul ariilor $\triangle BCD$ și $\triangle MAB$. 4) Să se arate că $\triangle MAC \rightarrow \triangle MBD$. 5) O fiind punctul de intersecție al diagonalelor trapezului, să se arate că $\triangle AOD$ este echivalent cu $\triangle BOC$.

R. 1) $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 2) $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 3) $6/25$.

39. Pe latura AD a unui dreptunghi $ABCD$ se ia un punct N așa fel încât $\frac{NA}{ND}=4$; pe latura BC a dreptunghiului se ia un alt punct M așa fel încât $\frac{MB}{MC}=\frac{2}{3}$. Perimetrul dreptunghiului este de 52 cm, iar raportul dintre cele două dimensiuni ale dreptunghiului este $\frac{3}{10}$. 1) Să se calculeze lungimea segmentului MN . 2) Să se arate că prelungirile segmentului MN în ambele sensuri, până la intersecția cu prelungirile laturilor AB și CD sînt două segmente, unul congruent cu MN și altul cu $\frac{MN}{2}$.

R. $MN=10$ cm.

40. Într-un paralelogram $ABCD$ cu unghiul ascuțit în A se prelungeste AB (latura mai mică a paralelogramului) cu un segment BF ; $FD \cap AC = \{E\}$. Latura AB este cu 1 cm mai mică decît suma segmentelor AE și EC de pe diagonala AC și cu 1 cm mai mare decît segmentul AE ; se mai știe că $\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$. Să se afle: 1) lungimea segmentului BF ; 2) lungimea laturii AB ; 3) mărimea raportului $\frac{AF}{CD}$. 4) Să se arate că există relația: $\frac{EC \cdot BF}{AE - EC} = AB$.

R. 1) $BF=2$ cm; 2) $AB=4$ cm; 3) $\frac{AF}{CD}=\frac{3}{2}$.

41. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mare CD congruentă cu înălțimea AD iar baza mică $AB=5$ cm; se ia un punct E la mijlocul înălțimii AD . 1) Știind că triunghiul BCE este dreptunghic în E să se arate că aria trapezului, în acest caz, este de 250 cm^2 și latura BC a trapezului este de 25 cm. 2) Să se arate că jumătate din înălțimea trapezului este medie proporțională între baza mică și înălțimea trapezului. 3) Să se demonstreze că există relația $\frac{AE - AB}{AB} = \frac{CD - DE}{DE}$.

42. Raportul lungimilor bazelor unui trapez este $\frac{1}{3}$. Latura ne paralelă $BC=6\sqrt{2}$ cm face cu baza mare AB un unghi de 45° , iar diferența bazelor este de 8 cm. Să se calculeze: 1) aria ΔMAB cunoscînd că $AD \cap BC = \{M\}$; 2) raportul ariilor ΔDCB și ΔMAB ; 3) aria ΔADC ; 4) să se arate că $\Delta MAC \sim \Delta MBD$; 5) să se arate că $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ știind că $AC \cap BD = \{O\}$.

R. 1) 54 cm^2 ; 2) $\frac{2}{9}$; 3) 12 cm^2 .

43. Într-un triunghi dreptunghic ABC raportul catetelor $\frac{AB}{AC}=\frac{7,8}{10,4}$ și diferența proiecțiilor lor pe ipotenuză este de 2,8 cm. Bisectoarea unghiului B intersectează cateta AC în D ($D \in AC$). Să se afle: 1) perimetrul triunghiului ABC ; 2) raportul ariilor celor două triunghiuri formate în triunghiul ABC prin ducerea bisectoarei AD ; 3) aria

patrulaterului $ABED$ (E fiind piciorul perpendicularei dusă din A pe BC).

R. 1) 24 cm; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $14,60 \text{ cm}^2$.

44. Un triunghi isoscel obtuzunghi ABC are perimetrul de 72 cm și 0,125 din baza BC a triunghiului este de 5 ori mai mică decât una din laturile egale ale triunghiului. Prin vârful A al triunghiului se duce o perpendiculară pe BC ($AB \cap BC = \{E\}$). Să se afle: 1) lungimile laturilor triunghiului ABC ; 2) lungimea segmentelor AE și EC ; 3) cât la sută reprezintă baza triunghiului isoscel din ipotenuza triunghiului dreptunghic ABE .

R. 1) 20 cm, 20 cm, 32 cm; 2) $AE=15 \text{ cm}$, $EC=7 \text{ cm}$; 3) 128%.

45. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A)=90^\circ$, AB micșorată cu $3\frac{1}{3}\%$ din ea este de două ori mai mare decât 0,25 din cateta AC iar cateta AC mărită cu 0,75 din ea este cu 8 cm mai mare decât AB . Se duce bisectoarea BE ($E \in AC$) și mediana AG ($G \in BC$); $BE \cap AG = \{I\}$. Să se afle: 1) raportul lungimilor catetelor triunghiului ABC ; 2) aria triunghiului AGC . 3) Considerând $m(\angle B)=60^\circ$ să se demonstreze că triunghiul BIG este dreptunghic în I și să se afle raportul dintre EG și BE . 4) În acest caz particular, cât la sută reprezintă aria triunghiului BIG din aria triunghiului ABC ?

R. 1) $\frac{3}{4}$; 2) 12 cm^2 ; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 25%.

46. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=2a$ linia centrelor O și O' ale cercurilor înscris și circumscris acestui triunghi este egală cu segmentul AO ce unește vârful unghiului drept cu centrul cercului înscris în triunghi. Să se afle: 1) măsurile unghiurilor triunghiului ABC ; 2) raportul lungimilor catetelor; 3) raportul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză; 4) raportul ariilor cercurilor înscris și circumscris.

R. 1) 90° , 60° , 30° ; 2) $\sqrt{3}$; 3) 3; 4) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

47. Un triunghi ABC are aria de 360 cm^2 . Pe baza BC se ia un punct oarecare D și un alt punct M la mijlocul segmentului AD . Se cere: 1) aria triunghiului MBC ; 2) valoarea raportului ariilor triunghiurilor ABM și BMD ; 3) să se demonstreze că:

$$\frac{\text{aria } \triangle ABM + \text{aria } \triangle AMC}{\text{aria } \triangle MBD + \text{aria } \triangle MCD} = 1.$$

4) Cât la sută reprezintă aria triunghiului CMD din aria triunghiului AMC ?

R. 1) 180 cm^2 ; 2) 1; 4) 100%.

48. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A)=90^\circ$, bisectoarea unghiului C intersectează înălțimea AD în E și latura AB în F iar bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în P . 1) Să se arate că bisectoarele se intersectează sub un unghi având măsura de 45° . 2) Considerând FP diametrul unui cerc să se arate că arcul \widehat{MN} cuprins între punctele de intersecție ale cercului cu cele două bisectoare este de 90° . Să se arate că triunghiul AFE este isoscel.

B. GEOMETRIE IN SPAȚIU

1. Fie planul P și un punct $A \notin P$, se duc: perpendiculara AM pe plan și oblicele egale AB și AC , astfel ca unghiul BMC să fie drept. Presupunând că $AM=2$ cm, iar $m(\angle BAM)=60^\circ$, să se calculeze distanța BC dintre picioarele B și C ale oblicelor (fig. IV.2). R. $BC=2\sqrt{6}$ cm.

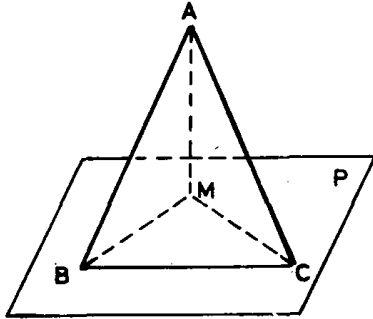


Fig.IV.2

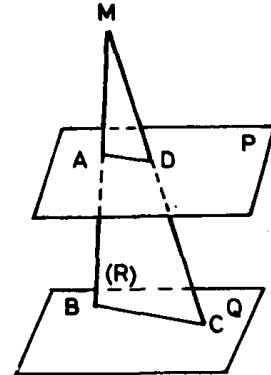


Fig.IV.3

2. Se dă un punct M la distanța $MA=3$ cm de un plan P și la distanța $MB=8$ cm de un alt plan Q , paralel cu primul. Segmentul $BC=6$ cm. $C \in Q$. MC intersectează planul P în D . Să se afle perimetrul triunghiului MAD (fig.IV.3). R. 9 cm.

3. Un vas de formă cubică plin cu alcool are masa de 52,688 kg, iar vasul gol are masa de 2 kg. Să se afle înălțimea vasului, știind că densitatea alcoolului este de 792 kg/m^3 .

Indicație. Vom afla, în prealabil, masa netă a alcoolului. Volumul alcoolului din vas se va obține împărțind masa sa la densitate: $V = \frac{50 \cdot 688}{0,792} = 64 \text{ dm}^3$.

R. 4 dm.

4. Se dă un cub $ABCD A' B' C' D'$ a cărui muchie are lungimea a . a) Să se calculeze distanța AP de la vârful A la diagonală CA' a cubului.

Indicație. Observăm că triunghiul $A'AC$ este dreptunghic în A , muchia AA' a cubului fiind perpendiculară pe planul bazei, este perpendiculară pe toate dreptele din plan. Scriem în două moduri deosebite dublul ariei triunghiului $A'AC$ și avem $AP = \frac{AC \cdot AA'}{A'C}$. Mărimea segmentului AC se deduce din triunghiul dreptunghic CDA ; $AC = a\sqrt{2}$.

$$\text{R. } PA = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Observație. Se înțelege că aceeași valoare se obține pentru oricare din distanțele de la un vîrf al cubului la o diagonală a acestuia.

5. Se dă prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$. Lungimea laturii pătratului bazei este de 2 dm, iar a diagonalei AC' a prisme de 4 dm. 1) Să se arate că

triunghiul ACC' este isoscel. 2) Să se calculeze aria totală a prisme. 3) Presupunem că prisma este metalică și după ce o topim, vrem să confecționăm alta care are baza un dreptunghi cu lungimea de 2 dm și lățimea $\sqrt{2}$ dm. Să se arate că înălțimea prisme confecționate este congruentă cu diagonala prisme inițiale.

Indicație. 1. $AC = 2\sqrt{2}$. Triunghiul $C'CA$ este dreptunghic în C , $C'C = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2. Aria totală se compune din aria a două pătrate $ABCD$ și $A'B'C'D'$ la care se adaugă patru fețe dreptunghiulare, fiecare având dimensiunile 2 dm și $2\sqrt{2}$ dm, adică o arie laterală de $16\sqrt{2}$ dm²; aria totală = $8(1+2\sqrt{2})$ dm².

3. Volumul prisme inițiale = $8\sqrt{2}$ dm³. Prin topire, volumul rămâne același, numai forma se schimbă. Dacă vrem să facem din același metal o altă prismă dreptunghiulară, cu dimensiunile bazei de 2 dm și $\sqrt{2}$ dm, având deci o arie de $2\sqrt{2}$ dm² ea va trebui să aibă o înălțime egală cu: $\frac{V}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 4$ dm, adică cu diagonala prisme inițiale.

$$\text{R. 2) } 8(1+2\sqrt{2}) \text{ dm}^2.$$

6. O groapă prismatică, cu baza un triunghi echilateral, cu latura de 2 m și adâncă de 4 m, este plină cu îngrășămintă animale. Aceste îngrășămintă se împrășteie pe suprafața unui lot de flori în formă de hexagon cu latura de 10 m. Ce grosime are stratul de îngrășămintă ?

$$\text{R. } \approx 0,026 \text{ m.}$$

7. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un vas paralelipipedic închis, având dimensiunile 2 dm, 3 dm, 4 dm. El conține apă, care ocupă $\frac{3}{8}$ din volumul său. Se cere înălțimea pînă la care se ridică lichidul cînd culcăm vasul; pe rînd, pe cîte una din fețele sale.

$$\text{R. } 1,125 \text{ dm; } 1,5 \text{ dm; } 0,75 \text{ dm.}$$

8. Un cub $ABCD A'B'C'D'$ este înscris într-o sferă cu raza de 2 cm. Să se afle volumul cubului.

Indicație. Diagonalele cubului trec prin centrul O al sferei. Fie a lungimea laturii cubului. Triunghiul ACC' este dreptunghic. (1) $a^2 + AC^2 = AC'^2$; (2) $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Inlocuind această valoare a lui AC^2 în

$$(1) \text{ și ținînd seama că } AC' = 4 \text{ cm, volumul cubului va fi } \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 \approx 12,331 \text{ cm}^3;$$

$$\text{R. } V \approx 12,331 \text{ cm}^3.$$

9. O prismă dreaptă, cu baza un triunghi echilateral, are volumul $27\sqrt{3}$ cm³ și înălțimea de 12 cm. Să se afle suma lungimilor tuturor muchiilor.

$$\text{R. } 54 \text{ cm.}$$

10. Se dă o prismă dreaptă $ABCD A'B'C'D'$ cu baza $ABCD$, un romb. Diagonalele $A'C$ și $B'D$ ale prisme au lungimile $A'C = 8$ cm, și $B'D = 5$ cm, iar muchiile laterale ale prisme sînt de 2 cm. Să se calculeze latura rombului de bază și aria sa.

$$\text{R. } \ell = \frac{9}{2}; 3\sqrt{35} \text{ cm}^2.$$

11. O piramidă pătrată regulată are apotema de 12 cm și muchia laterală de 13 cm.
a) Să se calculeze volumul și aria totală.

R. a) $V \approx 363 \text{ cm}^3$; aria totală $= 340 \text{ cm}^2$.

12. Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei are lungimea de 1 m, iar aria laterală este de 260 dm^2 . Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

Indicație. Aria laterală cunoscută se compune din patru triunghiuri egale. Se obține valoarea apotelei piramidei 13 dm. Aplicând teorema lui Pitagora se obține și lungimea unei muchii.

R. 1) 13 dm; 2) 13,92 dm; 3) 400 dm^3 .

13. Să se afle volumul unui tetraedru regulat $ABCD$ a cărui muchie are lungimea ℓ .

Aplicație numerică: $\ell = 10 \text{ cm}$.

Indicație. $V = \frac{\ell^3 \sqrt{2}}{12}$.

R. $V \approx 117,450 \text{ cm}^3$.

14. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi dreptunghic ABC , cu catetele $AB = 30 \text{ cm}$ și $AC = 40 \text{ cm}$. Muchia laterală $VA = 32 \text{ cm}$ și este perpendiculară pe planul bazei. Se cere: 1) lungimile înălțimilor BB' și CC' ale piramidei coborâte din B pe fața VAC și din C pe fața VAB ; 2) aria totală a piramidei.

R. 1) 30 cm; 40 cm; 2) $2\,720 \text{ cm}^2$.

15. S-au construit 10 corturi pentru un grup de elevi. Fiecare cort avea forma unui paralelipiped drept, cu baza un pătrat, cu latura de 4 metri și acoperișul în formă de piramidă regulată, cu înălțimea congruentă cu aceea a paralelipipedului și congruentă cu diagonala pătratului de bază. Pentru fixarea unui cort se leagă vârful piramidei cu frînghii trase în prelungirea muchiilor laterale ale ei și fixate apoi cu cîte un țărnuș în pămînt. Să se calculeze cîți metri pătrați de pînză trebuie pentru aceste corturi.

R. $1\,382,4 \text{ m}^2$.

16. Un cristal de cuarț este format dintr-o prismă hexagonală regulată și două piramide regulate, cu vîrfurile în S și S' . Știind că cele două piramide sînt egale, că masa cristalului este de 15,6 g, că densitatea sa este de $2\,600 \text{ kg/m}^3$, că latura hexagonului este 1 cm, iar înălțimea prisme este jumătate din distanța dintre vîrfurile piramidelor, să se calculeze distanța SS' .

R. $\approx 3,44 \text{ cm}$.

17. Un cub are muchia egală cu a . Să se determine aria laterală a unei piramide care are vîrfurile în centrul bazei superioare, iar baza piramidei are vîrfurile în mijloacele laturilor bazei inferioare. Aplicație numerică: $a = 3 \text{ cm}$.

R. $13,5 \text{ cm}^2$.

18. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ este egală cu 10 m, aria bazei este egală cu $75\sqrt{3} \text{ m}^2$. La distanța $2\sqrt{3} \text{ m}$ de vîrf facem o secțiune DEF paralelă cu baza. Să se afle volumul piramidei formate $VDEF$.

R. 18 m^3 .

19. Într-o piramidă patrulateră regulată este înscris un cub astfel încât patru vîrfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru vîrfuri se află în planul bazei. Să se determine volumul cubului dacă latura bazei piramidei este $a=4$ cm, iar înălțimea este de $h=8$ cm (fig.IV.4.).

Indicație. $\Delta VO'N \sim \Delta VOD$. Dar, x fiind muchia cubului:

$$O'N = \frac{x\sqrt{2}}{2}, OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, VO = h, VO' = h - x \rightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{x}{a},$$

$$x = \frac{ah}{h+a} = \frac{8}{3} \text{ cm}, V = \ell^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 \text{ cm}^3.$$

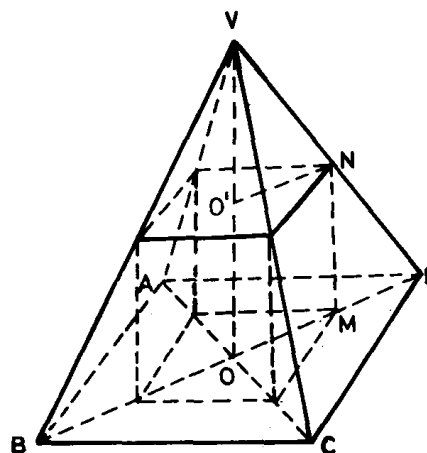


Fig.IV.4

20. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea de 9 m. La 3 m de vîrf se duce o secțiune paralelă cu baza, avînd aria de $24\sqrt{3} \text{ m}^2$. Să se determine raportul volumelor celor două piramide, cea dată și cea obținută prin secțiune.

R. $\frac{27}{1}$.

21. Să se determine volumul piramidei octogonale regulate cu latura bazei de 6 dm și cu muchiile laterale înclinate pe planul bazei cu un unghi de 60° .

Indicație. Se calculează R cercului circumscris octogonului, apoi muchia piramidei prin trigonometrie.

R. $V \approx 790 \text{ dm}^3$.

22. Într-un trunchi de con $R=13$ cm, $r=5$ cm, iar generatoarea este înclinată pe bază cu un unghi de 45° . Să se afle: aria laterală a trunchiului de con, aria totală și volumul.

R. Aria laterală $= 144\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2$; Aria totală $= \pi(144\sqrt{2} + 169 + 25) \text{ cm}^2$. Volumul $= \frac{8\pi}{3}(169 + 25 + 65) \text{ cm}^3$.

23. Să se determine aria totală și volumul piramidei patrulatere regulate care are muchia laterală $M=12$ dm, știind că muchia este înclinată pe planul bazei cu un unghi de 60° .

Indicație. Aflăm înălțimea piramidei $I = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$, apoi apotema piramidei $A = 3\sqrt{14}$. Aria laterală $\approx 190 \text{ dm}^2$. Aria totală $\approx 262 \text{ dm}^2$.

R. $V = 144\sqrt{3} \text{ dm}^3$.

24. Un vas cilindric închis, avînd raza de 10 cm și generatoarea de 15 cm, conține lichid cît $\frac{1}{3}$ din volumul său. Să se afle aria porțiunii din capacele vasului care este acoperită de lichid, vasul fiind în poziție orizontală.

Indicație. Volumul lichidului este a treia parte din volumul vasului, întrucît cînd s-a întors vasul nu s-a introdus, nici nu s-a scos nimic din lichid: $\frac{1500\pi}{3} \text{ cm}^3 = 500\pi \text{ cm}^3$. Volumul lichidului se obține înmulțind aria A a segmentului de cerc cu înălțimea cilindrului, de unde avem:

$$A = \frac{500\pi}{15} = \frac{100\pi}{3} \approx 104,7 \text{ cm}^2.$$

R. $\approx 104,7 \text{ cm}^2$.

25. Un rezervor cilindric de fontă cu raza de 7 m iar înălțimea de 12 m, este plin cu benzină, a cărei densitate este de 700 kg/m^3 . Să se afle în câte vagoane-cisternă se va putea încărca toată benzina din acel rezervor, știind că într-un vagon încap $10\,000 \text{ kg}$ benzină.

R. ≈ 129 vagoane.

26. Un tub cilindric de sticlă are masa de 80 g când este gol și de 140 g când se introduce în el mercur pînă la o înălțime de 4 cm. Densitatea mercurului fiind de $13\,600 \text{ kg/m}^3$, să se afle diametrul interior al tubului.

Indicație. Masa mercurului este de $140 - 80 = 60 \text{ g}$, iar $V = \frac{m}{\rho}$. În cazul de față masa fiind dată în grame volumul se va afla în cm^3 : $V = \frac{60}{13,6} \approx 4,4 \text{ cm}^3$

R. $\approx 1,18 \text{ cm}$.

27. Un vagon-cisternă plin cu ulei este format dintr-o parte cilindrică, avînd lungimea de 5 m și din două emisfere avînd raza egală cu 1,20 m (ca și partea cilindrică). Să se afle masa uleiului din acest vagon, densitatea uleiului fiind de 920 kg/m^3 .

R. 31,6 t.

28. Un ax de oțel cu lungimea de 1,40 m și diametrul de 84 mm se strunjește astfel, încît diametrul să se reducă la 80 mm. Să se calculeze cît la sută din masa inițială se pierde prin strunjire.

Indicație. Volumul pierdut prin strunjire va fi: $V_1 - V_2 = 1400(42^2 - 40^2) \text{ mm}^3$. Dacă notăm cu ρ densitatea oțelului, masa axului nestrunjit va fi $V_1 \rho \text{ mg}$, a axului strunjit $V_2 \rho \text{ mg}$, iar a oțelului pierdut prin strunjire $(V_1 - V_2) \rho \text{ mg}$. Raționăm astfel: dacă la o masă egală cu $V_1 \rho \text{ mg}$ se pierd $(V_1 - V_2) \rho \text{ mg}$, atunci la 100 mg se vor pierde: $\frac{100(V_1 \rho - V_2 \rho)}{V_1 \rho} = \frac{100(V_1 - V_2)}{V_1}$.

R. $\approx 9,29\%$.

29. Aria totală a unui cilindru este în douăzeci din aria unui cerc cu raza R . Știind că diametrul cilindrului este egal cu înălțimea lui, să se calculeze volumul în funcție de R .

R. $\approx 1,2 R^3$

30. Un cilindru circular drept are generatoarea G egală cu diametrul $2R$ al bazei. Să se determine G și R știind că aria totală a cilindrului este egală cu de patru ori aria unei sfere cu raza de 0.25 m.

R. $\approx 0,41 \text{ m}$; $\approx 0,82 \text{ m}$.

31. Într-un cilindru circular drept se duce un plan paralel cu axa cilindrului care taie din cercul bazei un arc de 120° . Înălțimea cilindrului este de 10 cm, iar distanța OI , de la centrul cercului de bază, la planul secant, este de 2 cm. Să se determine aria secțiunii.

Indicație. Secțiunea paralelă cu axa cilindrului este un dreptunghi $ABCD$, a cărei înălțime AD este chiar $OO' = 10 \text{ cm}$. Baza sa este o coardă AB care subîntinde 120° . AB fiind coardă subîntinsă de arc de 120° , este latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

R. $40\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

32. Aria laterală a unui con este de 10 cm^2 . Dacă îl desfășurăm, obținem un sector circular cu unghiul la centru de 36° . Se cere aria totală a conului.

R. 11 cm^2 .

33. Un elev a confecționat un con dintr-o bucată de carton avînd forma unui sfert de cerc, a cărui arie este de $9\pi \text{ cm}^2$. Să se calculeze volumul conului astfel obținut,

$$R. \frac{9\pi\sqrt{15}}{16} \text{ cm}^3.$$

34. Secțiunea axială VAB făcută într-un vas de formă conică este un triunghi dreptunghic isoscel, a cărui arie este de 18 cm^2 . Printr-un mic orificiu în V se toarnă mercur pînă la jumătate din înălțimea vasului. Ce masă va avea mercurul din vas, știind că densitatea mercurului este de $13\,600 \text{ kg/m}^3$.

Indicație. Mercurul din vas ia forma vasului. Volumul său va fi diferența dintre V_1 al vasului, adică a conului mare cu vîrf în V , și V_2 volumul conului mic cu același vîrf și care reprezintă partea goală a vasului.

$$R. m \approx 942 \text{ g.}$$

35. Astupăm vîrfurile unei pîlnii înalte de 12 cm și turnăm în ea $301,44 \text{ ml}$ apă. Apa se ridică la o înălțime de 8 cm . Care este capacitatea pîlniei ?

$$R. \approx 1 \text{ litru.}$$

36. Un triunghi dreptunghic ABC are ipotenuza $BC=a$ și catetele $AC=b$, $AB=c$, astfel ca $c < b$. Se rotește acest triunghi pe rînd în jurul celor două catete. Să se afle ariile laterale ale corpurilor astfel obținute și să se spună care e mai mare dintre ele. Același lucru pentru volum. Să se afle și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei. Caz numeric: $c=9 \text{ cm}$; $b=12 \text{ cm}$.

Indicație. Deoarece a este lungimea ipotenuzei, putem scrie: $c < b < a$. Prin rotirea în jurul catetei AB , obținem un con cu raza bazei b , înălțimea c și generatoarea a ; iar prin rotirea în jurul catetei AC , un alt con cu raza bazei c , înălțimea b și generatoarea a . Notînd cu A_{AB} și A_{AC} ariile laterale ale celor două conuri, avem: $A_{AB}=\pi ba$; $A_{AC}=\pi ca$. Comparînd valorile lui A_{AB} și A_{AC} se vede că $A_{AB} > A_{AC}$. Tot astfel, notînd cu V_{AB} și V_{AC} volumele celor două conuri și fiindcă $c < b$, rezultă $V_{AB} < V_{AC}$.

$$A_{BC}=\frac{\pi bc(b+c)}{a}, \quad V_{BC}=\frac{1}{3}\frac{\pi b^2c^2}{a}.$$

In cazul numeric:

$$A_{AB}=180\pi \text{ cm}^2, \quad A_{AC}=135\pi \text{ cm}^2, \quad A_{BC}=151,2\pi \text{ cm}^2,$$

$$V_{AB}=432\pi \text{ cm}^3, \quad V_{AC}=324\pi \text{ cm}^3, \quad V_{BC}=259,200\pi \text{ cm}^3.$$

37. Să se calculeze raza sferei circumscrise unui con drept cu generatoarea de 37 cm și raza bazei de 12 cm .

$$R. \approx 19,5 \text{ cm.}$$

38. Înălțimea unui con este $VO=8 \text{ m}$, iar generatoarea sa $VA=10 \text{ m}$. a) Să se afle volumul sferei S înscrise în con. b) Punctul $M \in VA$, simetricul lui M față de OA este M' iar față de VO este M'' . Să se arate că $O \in M'M''$.

$$R. a) 36\pi \text{ m}^3.$$

39. Cîte bile avînd diametrul de 10 mm putem confecționa din 5 kg de plumb ? Cîte kg de alamă ne trebuie pentru a confecționa un număr egal de bile ? (Densitatea plumbului este $11\,350 \text{ kg/m}^3$, iar densitatea alamei este de $8\,400 \text{ kg/m}^3$.)

Indicație. Volumul unei bile cu diametrul de $10 \text{ mm}=1 \text{ cm}$ este: $V=\frac{\pi}{6} \text{ cm}^3$. Dacă bila este de plumb,

va avea o masă $m_p = \frac{11,35\pi}{6}$ g, iar dacă este de alamă va avea o masă $m_A = \frac{8,4\pi}{6}$ g. (Masa a fost obținută în grame, deoarece volumul s-a calculat în centimetri cubi.) Găsim numărul n de bile de plumb ce se pot confecționa din 5 kg: $n = 5\ 000 : \frac{11,35\pi}{6} \approx 841$.

Cum fiecare bilă de alamă are masa m_A g, pentru a vedea câtă alamă ne trebuie pentru ca să confecționăm tot n bile, vom înmulți m_A cu n , adică: $m_A \cdot n = \frac{5 \cdot 8,4}{11,35}$ kg = 3,70 kg de alamă.

R. 841 bile; 3,70 kg de alamă.

40. O bilă de cupru goală în interior are masa de $2,5344\pi$ kg. Raza ei interioară este de 3 cm. Cît este de mare raza exterioară, știind că densitatea cubului este $8\ 800\text{ kg/m}^3$?

Indicație. Fie R raza bilei. Va trebui ca: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 324\pi \Rightarrow R^3 = 243 = 3^5 = 3^3 \cdot 3^2 \Rightarrow R = 3\sqrt[3]{3^2}$ cm

41. Dintr-un cub de fildeș cu muchia $l = 6$ cm, vrem să tăiem o sferă, astfel ca partea pierdută să fie cît mai mică posibil. Cît la sută se pierde ? Care este masa părții pierdute, dacă densitatea fildeșului este $1\ 920\text{ kg/dm}^3$.

Indicație. Pentru ca partea pierdută să fie cît mai mică, trebuie să tăiem din cub numai atît cît să ajungem la sfera înscrisă în el, adică la sfera de diametru egal cu muchia l a cubului. Volumul V al părții pierdute va fi diferența dintre volumul cubului și al sferei înscrise:

$$V = l^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{l}{2}\right)^3 = l^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right).$$

Volumul cubului fiind l^3 , vom lucra prin regula de trei simplă și vom găsi pierderea în procente:

$$\frac{100l^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)}{l^3} = 100 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{50(6-\pi)}{3}.$$

Obținem o pierdere de 47,66%. Masa părții pierdute este: $m = V\rho \approx 197,68$ g.

Observație. Mărima muchiei l a cubului s-a eliminat din calculul procentual ceea ce era natural, deoarece în această problemă volumul cubului nu influențează asupra procentului de pierdere.

R. 47,66%; $m \approx 197,68$ g.

42. Se strunjește o sferă metalică cu raza $R = 100$ mm, pînă cînd i se micșorează raza cu 10 mm. Se topesc resturile de la strunjire și se confecționează din ele un obiect de formă conică, avînd raza bazei egală cu raza sferei inițiale. Ce înălțime are conul obținut ?

R. 108,4 mm.

43. Considerăm un cilindru și un con echilateral, circumscrise unei sfere. Să se arate că: 1) aria totală a cilindrului este medie proporțională între aria sferei și aria totală a conului; 2) volumul cilindrului este medie proporțională între celelalte două volume; 3) raportul fiecărui volum la aria sa totală este egal cu o treime din rază.

Indicație. Un plan secant dus prin axa conului ne dă un cerc mare al sferei, înscris în același timp într-un pătrat (care reprezintă secțiunea făcută în cilindru) și un trunchi echilateral (care reprezintă secțiunea din con)(fig.IV.5).

Notînd cu R raza sferei, $OD = R$, avem $OB = 2 \cdot R$ și cum $OB = OA \Rightarrow OA = 2R$ și deci $AD = 3R$. Avem $6\pi R^2 =$ aria totală a cilindrului. Pentru aflarea ariei laterale a conului, cunoaștem: înălțimea conului $= AD = 3R$; $AB = BC = 2BD$; dar $BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow 3BD^2 = 9R^2$, $BD = R\sqrt{3}$. Rezultă că aria laterală a

conului $= \pi BD \cdot AB = \pi R\sqrt{3} \cdot 2R\sqrt{3} = 6\pi R^2$. Aria bazei conului $= \pi BD^2 = \pi (R\sqrt{3})^2 = 3\pi R^2$. Aria totală $= 6\pi R^2 + 3\pi R^2 = 9\pi R^2$.

1) Pentru a răspunde la prima întrebare trebuie să arătăm că:

$$(A_t \text{ cil})^2 = A_{sf} \cdot A_t \text{ con.}$$

$$\text{Înlocuind obținem: } (6\pi R^2)^2 = 4\pi R^2 \cdot 9\pi R^2; 36\pi^2 R^4 = 36\pi^2 R^4.$$

2) Pentru volumul corpurilor avem: volumul sferei $= \frac{4}{3}\pi R^3$; volumul cilindrului $= \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$; volumul conului $= \frac{1}{3} \cdot 3\pi R^2 \cdot 3R = 3\pi R^3$.

Demonstrăm ușor egalitatea: $(V \text{ cil})^2 = V_{sf} \cdot V \text{ con}$, adică:

$$(2\pi R^3)^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 3\pi R^3.$$

$$3) \quad \frac{\text{Volumul sferei}}{\text{Aria sferei}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{1}{3}R; \quad \frac{\text{Volumul cilindrului}}{\text{Aria totală a cilindrului}} = \frac{2\pi R^3}{6\pi R^2} = \frac{1}{3}R;$$

$$\frac{\text{Volumul conului}}{\text{Aria totală a conului}} = \frac{3\pi R^3}{9\pi R^2} = \frac{1}{3}R.$$

44. Să se afle raza unei sfere de fontă cu masa de 10 kg, cunoscând că densitatea fontei este 7 200 kg/m³.

$$R. \approx 0,7 \text{ dm.}$$

45. Generatoarea unui cilindru este $\frac{3}{4}$ din raza cercului de bază. Știind că acest cilindru are aria totală de $56\pi \text{ cm}^2$, să se afle volumul. Din acest cilindru confecționăm o prismă hexagonală regulată maximă. Cât la sută din volum s-a pierdut?

$$\text{Indicație. Pierdere} = \pi r^2 h - \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = r^2 h \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \approx r^2 h \cdot 0,55 = 26,40 \text{ cm}^3.$$

$$\frac{V \text{ pierd}}{V \text{ cil}} = \frac{48 \cdot 0,55}{48\pi} = \frac{0,55}{3,14} = 0,175; 0,175 \cdot 100 = 17,5\%.$$

$$R. V = 48\pi \text{ cm}^3; \approx 17,5\% \text{ pierdere.}$$

46. Să se afle volumul corpului de rotație, obținut prin rotirea unui hexagon regulat în jurul unei diagonale. Să se compare acest volum cu volumul sferei circumscrise lui. Se dă $l_6 = a$.

Indicație. Volumul acestui corp este format din volumul a două conuri și al unui cilindru.

$$R \text{ con} = R \text{ cil} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; l \text{ con} = \frac{a}{2}; l \text{ cil} = a. V \text{ corp} = \pi \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{4a}{3} = \pi a^3; V \text{ sferă} = \frac{4\pi a^3}{3}; \frac{V \text{ sferă}}{V \text{ corp}} = \frac{\frac{4\pi a^3}{3}}{\pi a^3} = \frac{4}{3}.$$

$$R. V = \pi a^3; \frac{V \text{ sf}}{V \text{ corp}} = \frac{4}{3}.$$

47. Un cilindru are raza R . Să se calculeze: aria totală, volumul cilindrului și diagonala secțiunii axiale știind că secțiunea este un pătrat.

$$\text{Indicație. } At = 2\pi R(R+G) = 2\pi R(R+2R) = 6\pi R^2; V = \pi R^2 G = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

$$R. 6\pi R^2; 2\pi R^3; 2R\sqrt{2}.$$

48. Soclul unei statui are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Latura pătratului bazei mari este de 0,84 m, înălțimea trunchiului este de 1,18 m și apotema de 1,2 m. Să se afle aria laterală.

$$R. \approx 3 \text{ m}^2.$$

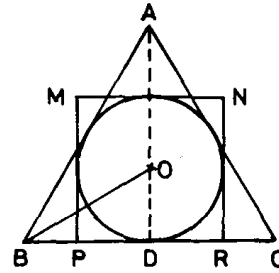


Fig. IV.5

49. Să se afle volumul trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă diagonalele lui sînt de 9 cm, iar laturile bazelor sînt de 7 cm și 5 cm.

R. 109 cm^3 .

50. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt de 2 cm și 6 cm. Fața laterală formează cu planul bazei un unghi de 60° . Să se afle volumul trunchiului.

R. $\frac{26\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

51. Raza bazei unui con circular drept este 3 m. Secțiunea paralelă la bază la o distanță de 3 m de vîrf are raza de 2m. Să se afle volumul și aria laterală a conului.

R. $42,390 \text{ m}^3$; $50,8690 \text{ m}^2$.

52. Un vas are formă de con cu vîrf D în jos. Secțiunea axială este un triunghi echilateral. În el se lasă să cadă o sferă de rază r . În vas se toarnă apă, astfel încît suprafața apei formează un plan tangent la sferă. Care este adîncimea apei după ce se scoate sfera ?

Indicație. Pentru a putea calcula adîncimea apei după ce se scoate sfera, va trebui să scoatem volumul sferei din volumul conului care conține lichid pînă la suprafața sferei, deci volumul ABD . Notăm: V =volumul conului ABD ; H =înălțimea conului ABD ; i și r_1 înălțimea și raza conului de apă fără sferă; V_1 =volumul conului de apă fără sferă. Secțiunea este un triunghi echilateral $\Rightarrow m(\angle D_1)=30^\circ$. Cunoaștem de asemenea raza sferei= r ; $\Rightarrow OD=2r$ și, ținînd seama că $OC=r$, $\Rightarrow H=3r$. Notăm raza conului (CB) cu x , conform aceleiași teoreme $BD=2x$. Din triunghiul DBC , avem: $4x^2-x^2=9r^2$; $x^2=3r^2=R^2$; $R=r\sqrt{3}$; $V=3\pi r^3$,

$V_1=3\pi r^3 - \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{5\pi r^3}{3}$. Scoțînd sfera din apă, nivelul apei scade și urmează să calculăm înălțimea

conului nou format: $V = \frac{\pi r_1^2 i}{3}$. Nu cunoaștem pe r_1 și pe i , pe care le putem determina din triunghiul dreptunghic $DD'N$, unde D' este centrul bazei conului obținut după scoaterea sferei, iar N intersecția diametrului cu generatoarea. Notînd $DD'=i=y$, avem: $\text{tg } 30^\circ = \frac{ND'}{DD'}$, de unde $ND'=r_1=y \text{tg } 30^\circ = \frac{y}{\sqrt{3}}$;

Volumul apei va fi $\frac{\pi r^2}{3} \cdot i = \frac{\pi \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot y}{3} = \frac{\pi y^3}{9}$. Volumele $\frac{5\pi r^3}{3}$ și $\frac{\pi y^3}{9}$ sînt egale, deci $\frac{5\pi r^3}{3} = \frac{\pi y^3}{9}$, de unde: $y^3=15r^3$. Adîncimea apei $i = \sqrt[3]{15} r$.

R. $\sqrt[3]{15} r$.

53. Într-un vas în formă de con, cu vîrf în jos cu înălțimea de 12 dm, baza conului fiind orizontală, se toarnă 301,44 l de apă. Apa se urcă în vas pînă la 8 dm. Să se afle capacitatea vasului întreg.

R. 324π litri.

54. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Conul este înscris într-o sferă. Să se calculeze volumul sferei.

R. $\frac{25^3\pi}{48} \text{ m}^3$.

55. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Să se afle volumul sferei înscrise în con.

R. $36\pi \text{ m}^3$.

56. Un con circular drept are baza de 4 cm și generatoarea de 50 cm. La depărtare de 10 cm de vîrf se face o tăietură printr-un plan paralel cu baza. Să se afle aria totală și volumul conului care are ca bază cercul de secțiune și vîrf în centrul bazei conului dat.

$$R. At \approx 4\,689 \text{ cm}^2; V \approx 3\,722 \text{ cm}^3.$$

57. Un con circular drept are volumul $12,56 \text{ dm}^3$ și lungimea cercului de bază de $12,56 \text{ dm}$. Să se afle aria totală.

$$R. At \approx 35,17 \text{ dm}^2.$$

58. Un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 15 cm și o catetă de 12 cm se rotește în jurul ipotenuzei. Să se calculeze volumul și aria corpului format.

$$R. 151,20\pi \text{ cm}^2; 259,200\pi \text{ cm}^3.$$

59. Să se afle volumul sferei circumscrise paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile 2 cm, 3 cm, 4 cm.

Indicație. Dacă se notează cu a ; b ; c dimensiunile paralelipipedului, diagonala d este dată de relația:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \text{ Raza sferei circumscrise este: } R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

$$R. V = \frac{29\pi \sqrt{29}}{6} \text{ cm}^3.$$

60. Într-o sferă de rază r se face o secțiune cu un plan la distanța d de centru. Să se afle raportul ariilor calotelor formate și aria cercului de secțiune.

Indicație. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi r(r-d)}{2\pi r(r+d)} = \frac{r-d}{r+d}$, $A_{\text{cercului}} = \pi(r^2 - d^2)$. Aria celei de-a doua calote se poate afla scăzînd

din aria sferei aria primei calote: $A_2 = A_{\text{sferă}} - A_1 = 4\pi r^2 - 2\pi r(r-d) = 2\pi r(r+d)$.

61. Într-o sferă cu raza de 14 cm este înscrisă o prismă triunghiulară regulată, care are diagonalele unei fețe laterale de 26 cm. Să se afle latura bazei prisme (fig. IV.6).

Indicație. Metoda 1. Avem $A'B$ = diagonala unei fețe: $A'B = 26$; AA' = înălțimea prisme, pe care o notăm cu x . $MO = \frac{x}{2}$; OB = raza cercului circumscris triunghiului ABC ;

MB = raza sferei = 14. Din $\triangle MOB \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$;

$$\frac{x^2}{4} = R^2 - r^2, \text{ adică } x^2 = 4R^2 - 4r^2.$$

$$(1) x^2 = 4 \cdot 196 - 4r^2. \text{ Din } \triangle ABA' \text{ avem: } x^2 = A'B^2 - AB^2 = 26^2 - AB^2 = 676 - AB^2; \text{ dar } AB = l_3 = r\sqrt{3}, \text{ deci:}$$

$$x^2 = 676 - 3r^2. (2)$$

Din relațiile (1) și (2) avem: $676 - 3r^2 = 4 \cdot 196 - 4r^2$;

$$r = 6\sqrt{3}, \text{ de unde } l_3 = r\sqrt{3} = 18 \text{ cm.}$$

Metoda a 2-a. $A'B = 26 \text{ cm}$ = diagonala feței; $MO = x$; AA' = înălțimea prisme = $2x$; MB = raza sferei = 14 cm; $OB = y$ = raza cercului circumscris triunghiului de bază al prisme. Din triunghiul dreptunghic MOB avem:

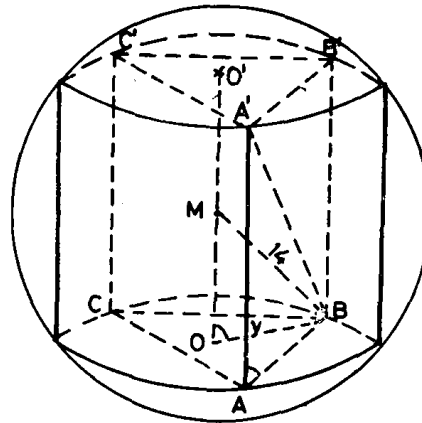


Fig. IV.6

$MO^2 + OB^2 = MB^2; x^2 + y^2 = 196$. Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ avem: $A'A^2 + AB^2 = A'B^2$, $4x^2 + 3y^2 = 676$ (fiindcă $AB = l_3 = r\sqrt{3}$).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 196 \\ 4x^2 + 3y^2 = 676 \end{cases} \cdot \text{Obținem } y^2 = 108, \text{ de unde } AB^2 = 3y^2 = 324, \text{ iar } AB = 18.$$

62. O piesă este compusă dintr-un vas cilindric $ABCD$ (secțiune) cu diametrul de 0,20 m, care este introdus într-un alt vas de forma unui trunchi de con, $ABFE$ (secțiune) ce are generatoarea de 0,9 m (fig.IV.7). Știind că generatoarea trunchiului de con face cu înălțimea cilindrului un unghi de 10° , să se afle capacitatea vasului în formă de trunchi de con.

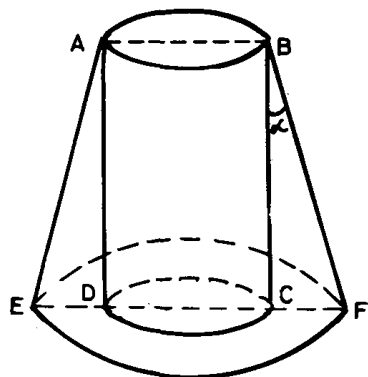


Fig.IV.7

Indicație. $CF = 0,9 \cdot (\sin 10^\circ) = 0,9 \cdot 0,174 = 0,15$; EF (diametrul mare) $= DC + 2CF = 0,20 + 0,30 = 0,50$ m. $R = 0,25$ m, $I = BC = 0,9 \cos 10^\circ = 0,88$; V (trunchiul de con) $= \frac{\pi \cdot I}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{3,14 \cdot 0,88}{3} \cdot (0,0625 + 0,01 + 0,025)$. Volumul aflat în m^3 se transformă în dm^3 și se află astfel capacitatea ținând seama că $1 dm^3 = 1 \ell$. Se

obține $V = 89 dm^3 \Rightarrow$ capacitatea $\approx 90 \ell$.

63. Un buștean lung de 5 m ce are un cubaj de $1,6 m^3$ se taie printr-o secțiune paralelă cu baza, dusă pe la mijlocul lungimii sale. Să se afle diametrul secțiunii.

Indicație. Folosim formula $V = C^2 L \cdot \frac{1}{4\pi}$, unde C este lungimea cercului mijlociu, iar $\frac{1}{4\pi}$ are valoarea aproximativă 0,08, deci $1,6 = C^2 \cdot 5 \cdot 0,08$, de unde $C^2 = 1,6 : 0,4 = 4$, iar $C = 2$ m. Diametrul va fi $2 : 3,14 \approx 0,64$ m.

R. $D \approx 0,64$ m.

64. Un trunchi de con circular drept are $r = 3$ cm, $R = 8$ cm și înălțimea de 12 cm. Să se calculeze volumul și aria laterală.

R. $388\pi cm^3$; $143\pi cm^2$.

65. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza mare de 15 cm și înălțimea de 2 cm. Să se calculeze volumul conului complet.

R. $2700\pi \cdot cm^3$.

66. Într-un trunchi de con se dau raza mare de 5 cm, raza mică de 3 cm, iar înălțimea de 12 cm. Din el sînt tăiate două conuri, astfel încît generatoarele unuia sînt în continuare cu generatoarele celui alt. Să se determine volumul părții rămase. (fig.IV.8).

Indicație. Notăm cu i înălțimea conului ABE și cu I înălțimea conului DEC . Din figură avem $i + I = H$, iar din asemănarea triunghiurilor AGE și EFC obținem: $\frac{r}{R} = \frac{i}{I}$. Ținînd seama de proprietatea proporțiilor, obținem: $\frac{r}{R+r} = \frac{i}{I+i}$. Cum $I+i=H$, avem $\frac{r}{R+r} = \frac{i}{H}$, de unde $i = 4,5$ cm, apoi $I = H - i = 12 - 4,5 = 7,5$ cm. Cunoaștem elementele conurilor necesare pentru aflarea volumelor. Din

volumul trunchiului scădem suma volumelor celor două conuri: $V_{tr} = \frac{12\pi}{3}(25+9+15) = 196\pi \text{ cm}^3$.

$$V_1 = \frac{25\pi}{3} \cdot 7,5 = 62,500\pi \text{ cm}^3; \quad V_2 = \frac{9\pi}{3} \cdot 4,5 = 13,5\pi \text{ cm}^3.$$

$$V_1 + V_2 = 76\pi \text{ cm}^3. \text{ Partea rămasă} = 196\pi - 76\pi = 120\pi \text{ cm}^3.$$

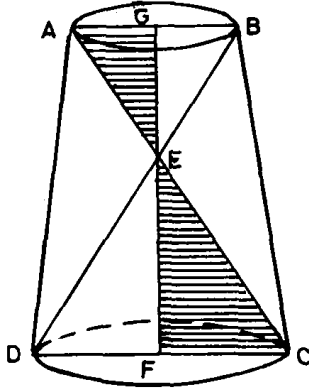


Fig. IV.8

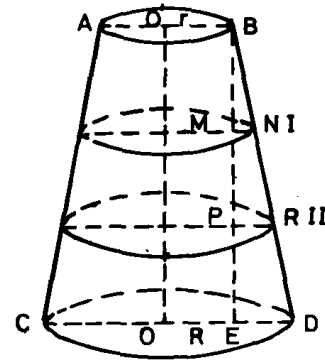


Fig. IV.9

67. Un trunchi de con are înălțimea de 18 cm, iar razale bazelor de 5 cm și 11 cm. Înălțimea este împărțită în trei părți egale de către două plane paralele cu bazele. Să se afle ariile secțiunilor (fig. IV.9).

Indicație. Secționând trunchiul cu un plan axial, obținem trapezul $ABCD$. Coborând înălțimea din B pe DC , se formează triunghiurile dreptunghice: 1) $\triangle BED \sim \triangle BMN$; 2) $\triangle BED \sim \triangle BPR$.

$$R. 49\pi \text{ cm}^2; 81\pi \text{ cm}^2.$$

68. Trunchiul de con cu razale de 3 m și 5 cm și un con de aceeași înălțime au volumele egale. Să se afle raza bazei conului.

$$R. 7 \text{ cm}.$$

69. Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se găsesc punctele E și F astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{3}{4}$. 1) Cunoscând că aria triunghiului EFD este de 74 m^2 , să se calculeze

volumul piramidei care are ca bază pătratul $ABCD$ și înălțimea $\frac{6}{2}$ din latura pătratului de bază. 2) Se face în piramidă o secțiune paralelă cu baza ce împarte înălțimea în raportul de $\frac{1}{3}$ față de vîrf. Să se afle aria laterală a trunchiului de piramidă ce se formează.

$$R. 784 \text{ m}^2.$$

70. Într-un triunghi dreptunghic isoscel ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$. Se duce bisectoarea $AD = a$ ($D \in BC$) și din punctul D se duce bisectoarea DE a unghiului ADC ($E \in AC$). Se cere: 1) perimetrul patrulaterului $ABDE$; 2) să se arate că $AB \parallel DE$; 3) să se calculeze volumul corpului format prin rotirea completă a triunghiului ABC în jurul lui BC .

$$R. 1) a(1+2\sqrt{2}); 3) \frac{2\pi a^3}{3}.$$

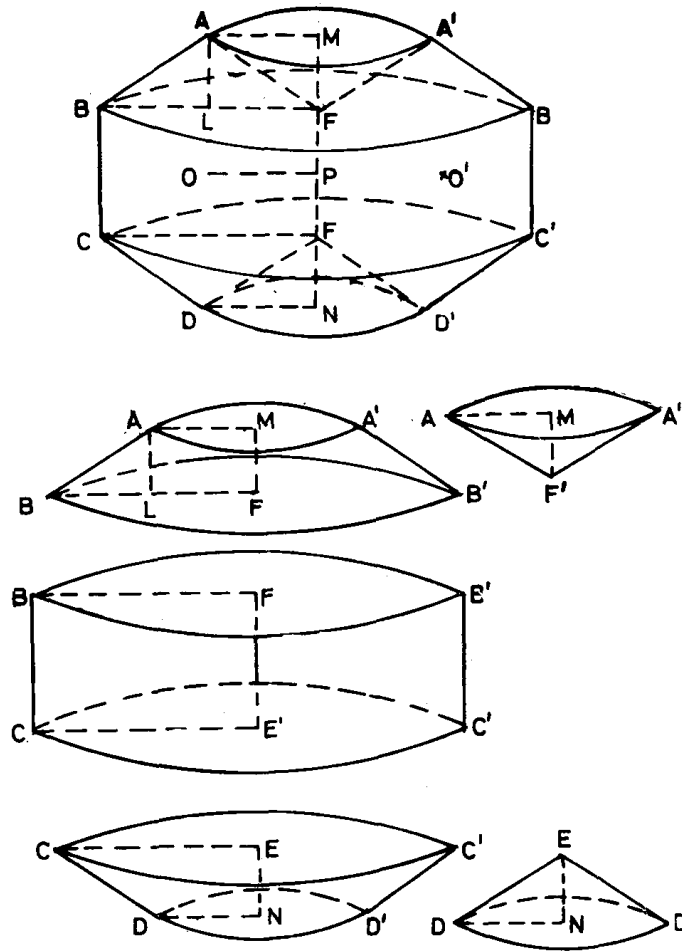


Fig.IV.10

71. Să se afle volumul solidului născut prin rotația completă a unui hexagon regulat cu latura de 2 cm în jurul unei laturi (fig.IV.10).

Rezolvare. 1) Considerăm hexagonul $ABCDEF$. Trunchiul de con $ABB'A'$ născut din rotirea laturii AB în jurul laturii EF are: raza cercului mare $R=BF=l_3=AB\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ cm, raza cercului mic $r=AM=LF=AL=1$ cm. Volumul $V_1=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{\pi \cdot 1}{3}(12+3+6)=7\pi$ cm³.

2) Cilindrul $BCB'C'$ născut din rotirea laturii BC în jurul laturii EF are raza $R=BF=2\sqrt{3}$ cm, înălțimea $H=EF=BC=2$ cm, iar volumul $V_2=\pi R^2 \cdot H=24\pi$ cm³.

3) Volumul conului

FAA' născut din rotirea laturii AF are: raza cercului de bază $r=AM=\sqrt{3}$ cm, înălțimea $FM=1$ cm, deci volumul $V_3=\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{\pi \cdot 3 \cdot 1}{3}=\pi$ cm³.

4) Volumul corpului născut prin rotirea hexagonului este: $V=2V_1+V_2-2V_3=14\pi+24\pi-2\pi=36\pi$ cm³ $\approx 113,04$ cm³.

72. Pentru construcția unui pilon de beton necesar la podul de peste Dunăre s-au întrebuințat următoarele materiale: a) cimentul reprezintă $\frac{1}{4}$ din masa lui și încă 500 chintale; b) pietrișul și nisipul reprezintă $\frac{2}{5}$ din masa pilonului și încă 800 chintale, exceptând masa cimentului; c) fier beton cu masa de 2 500 chintale. Pilonul are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată avînd raportul laturilor bazelor $\frac{1}{3}$, aria

totală 210 m² și aria laterală 120 m². Să se calculeze: 1) masa totală a pilonului; 2) volumul acestui pilon.

R. ≈ 10 857 chintale, 156 m³.

73. Un teren de forma unui triunghi dreptunghic cu latura cea mai mare de 24 dam era folosit astfel: $\frac{1}{3}$ din el și încă 10 dam² pentru teren de sport; $\frac{2}{9}$ din restul terenului pentru parcat mașinile agricole. Restul de 0,42 hectare pentru cultivat zarzavaturi. Terenul a fost amenajat pentru construcția unei școli ce ocupă o suprafață pătratică cu două vîrfuri pe catetele triunghiului dreptunghic și două vîrfuri pe ipotenuză. Să se afle: 1) aria întregului teren; 2) suprafața ocupată de clădirea școlii; 3) cît la sută reprezintă suprafața ocupată de școală din suprafața ce era ocupată inițial de terenul de sport. 4) Clădirea școlii fiind de forma unui paralelipiped cu aria laterală de 2 940 m², să se afle volumul școlii.

R. 1) 96 dam², 2) 36 dam², 3) ≈85%, 4) 44 100 cm³.

74. Un teren în forma unui triunghi dreptunghic avînd latura cea mai mică de 25 m a fost folosit astfel: $\frac{1}{3}$ din suprafața terenului și încă 10 m² pentru un teren de sport, $\frac{2}{7}$ din suprafața rămasă pentru parcat mașinile agricole, iar 350 m² s-au folosit pentru cultivat diverse zarzavaturi. S-a amenajat acest teren pentru a se construi pe el o creșă de forma unui cub avînd unul din colțuri comun cu unghiul drept al terenului, iar un colț al clădirii pe ipotenuza triunghiului dreptunghic. Să se afle: 1) aria terenului și perimetrul lui; 2) cît la sută reprezintă suprafața ocupată de clădire din suprafața întregului teren; 3) volumul clădirii.

R. 1) 750 m², 150 m; 2) ≈41,5%; 3) ≈5 495 m³.

75. O locuință personală de forma unui paralelipiped dreptunghic s-a construit pe un teren de forma unui triunghi isoscel, avînd un unghi comun, iar una din muchiile clădirii pe lungimea cea mai mare a terenului. Înălțimea clădirii este de $\frac{2}{5}$ din perimetrul bazei clădirii. Înainte de construcția clădirii, terenul era folosit pentru cultivat zarzavaturi, astfel: $\frac{1}{4}$ din suprafață și încă 9 m² pentru cultivat ceapă, $0,3$ din terenul rămas cultivat cu roșii, iar restul terenului de 94 m² era cultivat cu cartofi. Să se afle: 1) aria terenului; 2) aria laterală a clădirii.

R. 1) 200 m²; 2) 640 m².

76. Un teren de forma unui trapez isoscel, cu baza mare 54 m, baza mică 24 m a fost împărțit cu un gard astfel: în prima zi cu 4 m mai puțin decît 25% din perimetrul lui; a doua zi 50% din perimetrul rămas, iar a treia zi, restul de 50 m. Suprafața terenului a fost împărțită în trei parcele invers proporționale cu numerele 6; $\frac{2}{3}$ și 0,375.

Pe cele două parcele mai mici s-au cultivat zarzavaturi iar pe parcela cea mai mare s-a construit o cisternă pentru apă, de forma unui trunchi de con cu aria totală de 108π m², aria laterală de 50π m², iar raportul razelor bazelor sale de $\frac{3}{7}$ (cisterna-trunchi de con este cu baza mică în sus). Să se afle: 1) aria terenului; 2) ariile celor trei parcele; 3) cîți litri de apă s-au pompat în cisternă, dacă apa s-a ridicat pînă la 75% din înălțimea ei, față de bază.

R. 1) 780 m²; 2) 30 m², 270 m², 480 m²; 3) 219 125 litri.

77. Un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, are $AB = 6$ cm și $BC = 12$ cm. Se duce mediana AM . Înălțimea BP a triunghiului ABM intersectează pe AC în D , iar prelungirea lui MD taie pe AB în N . Se cunoaște că $\frac{PD}{BP} = \frac{1}{3}$. 1) Să se afle aria triunghiului MNB . 2) Să se arate că aria triunghiului MDC este a treia parte din aria triunghiului ABC . 3) Să se arate că $\triangle NDC$ este isoscel. 4) Să se arate că $\triangle BNC$ este echilateral. 5) Să se calculeze volumul corpului format din rotația completă a triunghiului ABC în jurul lui BC .

R. 1) $18\sqrt{3}$; 5) 108π cm³.

78. Un teren agricol de formă dreptunghiulară are lungimea cu 1 km mai mare decât lățimea, iar perimetrul lui este egal cu perimetrul unui alt teren de forma unui pătrat cu aria 15 625 ha. Terenul se împarte în trei parcele astfel încât raportul primelor două este de $\frac{3}{4}$, iar al ultimelor două $\frac{4}{5}$. Pe parcela cea mai mică s-au cultivat roșii, cartofi și mazăre, proporțional cu numerele $\frac{1}{3}$; 0,6 și $\frac{4}{9}$. Parcela cea mai mare a fost cultivată cu grâu, iar cealaltă cultivată cu porumb. Să se afle: 1) ariile celor trei parcele; 2) ariile suprafețelor cultivate cu roșii, cartofi, mazăre; 3) cât la sută din aria suprafeței totale reprezintă aria suprafeței ocupată prin construirea unui siloz de forma unui paralelipiped dreptunghic cu înălțimea cât $\frac{5}{3}$ din lățime, lățimea $\frac{3}{4}$ din lungime și suma tuturor muchiilor sale egală cu suma muchiilor unui cub cu aria totală de 96 dam². 4) Să se calculeze volumul silozului.

R. 1) 39 km²; 52 km²; 65 km²; 2) 9 km²; 18 km²; 12 km²; 3) $\frac{1}{1300}\%$; 4) 60 dam³.

79. Pe două semidrepte Ox și Oy făcând un unghi xOy a cărui măsură este de 120° se iau două segmente $OA = OB = a$, iar pe perpendiculara în O pe planul xOy se ia un segment $[OC]$ congruent cu diagonala pătratului de latură a . 1) Să se demonstreze că $\triangle ABC$ este echilateral. Să se afle: 2) aria totală și volumul piramidei $COAB$; 3) aria triunghiului ABP (P fiind mijlocul segmentului OC); 4) aria și volumul corpului obținut prin rotația completă a triunghiului ABP în jurul lui AB (A se socotește exprimat în cm).

R. 2) $a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm², $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ cm³; 3) $\frac{3a^2}{4}$ cm²; 4) $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ cm², $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$ cm³.

80. Un trunchi de con cu aria laterală de 100π cm² este circumscris unei sfere cu raza de 4 cm. Se cere aria totală a cilindrului înscris în trunchiul de con cu una din baze comună cu baza mică a trunchiului de con și cu aceeași înălțime ca și trunchiul de con.

R. 40π cm².

81. O piramidă cu vârful în V are ca bază un romb $ABCD$ cu $m(\angle A) = 60^\circ$ și diagonala $BD = 4a$. Înălțimea $VO = 2a\sqrt{3}$ (O centrul rombului). Din această piramidă se scoate un con circular drept cu același vîrf, iar baza un cerc cu centrul O , raza conului fiind jumătate din raza cercului înscris în romb (a este socotit în cm). Se cere: 1) volumul

și aria laterală a piramidei; 2) cât la sută reprezintă volumul conului din volumul piramidei; 3) lungimile muchiilor VA și VB ; 4) măsura unghiurilor formate de muchiile VA și VB cu planul bazei.

R. 1) $16a^3 \text{ cm}^3$; $8a^2\sqrt{15} \text{ cm}^2$; 2) $\approx 17\%$; 3) $VA = 2a\sqrt{6} \text{ cm}$; $VB = 4a \text{ cm}$; 4) 45° ; 60°

82. Un trapez $ABCD$ are baza mare $BC = 30 \text{ cm}$, baza mică $AD = 9 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$ și $CD = 17 \text{ cm}$. Se cere: 1) aria trapezului; 2) să se construiască acest trapez; 3) să se afle aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele având ca bază, baza mare a trapezului; 4) să se afle volumul corpului format prin rotația completă a trapezului în jurul bazei mari.

R. 1) 156 cm^2 ; 3) $171\frac{3}{7} \text{ cm}^2$; 4) $V = 1\,024\pi \text{ cm}^3$.

83. O cisternă de formă sferică pentru vin este montată într-un suport de beton de formă conică, așa fel încât cisterna este tangentă la generatoarele și baza conului. Generatoarea conului este de 25% din înălțimea lui plus 8m, iar raportul acestora este de $5/4$. Pentru a umple vasul cu vin era necesar un număr de pompe ce trebuiau să funcționeze un anumit număr de ore. S-au adus încă 4 pompe în plus și vasul s-a umplut cu 2 ore mai devreme. Dacă inițial ar fi fost cu 2 pompe mai puțin decât în plan atunci vasul s-ar fi umplut cu două ore mai târziu. Se cere: 1) capacitatea cisternei; 2) câte pompe erau necesare pentru a umple vasul conform planului și în câte ore.

R. 1) $36\pi \text{ kl}$; 2) 8 pompe; 6 ore.

84. Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este de $5\,500 \text{ cm}^2$; $3\frac{1}{3} \%$ din raza bazei mici este cu 79 cm mai mică decât raza bazei mari, iar diferența acestor raze este de 50 cm. 1) La ce distanță de planul bazei mici se întâlnește generatoarea cu axa conului din care face parte trunchiul? 2) Să se determine măsura unghiului format de generatoare cu planul bazei mari și măsura unghiului ce se formează la vârful conului din care face parte trunchiul. 3) Turnând apă într-un vas de forma și dimensiunile trunchiului de con considerat, până la o înălțime egală cu 40% din înălțimea trunchiului de con față de baza mare, să se calculeze ce cantitate de apă în litri este turnată în vas.

R. 30 cm; 3) $38,7261$.

85. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Razele bazelor sînt în raport de $1/2$, iar suma lor este de 12 cm. 1) Să se calculeze aria laterală a trunchiului de con. 2) Să se calculeze volumul conului întreg din care face parte trunchiul dat.

R. 1) $48\sqrt{10} \pi \text{ cm}^2$; 2) $512\pi \text{ cm}^3$.

86. Un teren în formă de dreptunghi $ABCD$ este folosit astfel: $0,375$ din suprafața lui și încă 10 m^2 pentru teren de sport; $2/5$ din restul suprafeței, și încă 4 m^2 pentru răsaduri de flori. Restul terenului de 140 m^2 este folosit pentru parcat mașinile agricole. Se face, pe acest teren, un șanț de canalizare pe direcția bisectoarei dusă din B care intersectează latura AD în punctul P . Se știe că raportul ariilor suprafețelor

ABP și $ABCD$ este $1/4$. 1) Se cere aria terenului. 2) Să se calculeze dimensiunile terenului. 3) Să se calculeze lungimea șanțului.

R. 1) 400 m^2 ; 2) $10\sqrt{2} \text{ m}$; $20\sqrt{2} \text{ m}$; 3) 20 m .

87. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ latura este cât media proporțională a numerelor 6 și $8\frac{1}{6}$. În această piramidă se face o secțiune $A'B'C'D'$ paralelă cu baza avînd latura de 5 cm . Diagonala BD' a trunchiului de piramidă ce se formează este cât baza de numerație a numărului 65 care scris în baza zece este 59. Să se afle: 1) aria secțiunii diagonalei $B'D'D$; 2) volumul piramidei.

R. 1) $18\sqrt{2} \text{ cm}^2$; 2) $V=171,5 \text{ cm}^3$.

88. Pe un teren de forma unui trapez isoscel cu perimetrul de 48 m și baza mică de 6 m s-a construit o cisternă cilindrică avînd baza tangentă la laturile trapezului. Înălțimea cisternei este $\frac{2}{\sqrt{3}}$ din raza cercului. Să se afle: 1) aria terenului; 2) volumul cisternei.

R. $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $162\pi \text{ m}^3$.

89. Media aritmetică a dimensiunilor bazei unui paralelipiped dreptunghic este 20 cm ; $2/3$ din dimensiunea cea mai mare a bazei, micșorată apoi cu 25% din ea este cât dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului micșorată cu 6 cm . Muchia paralelipipedului este, în cm , media proporțională a numerelor 20 și 5 . Pe lungimea AD a dreptunghiului $ABCD$, baza paralelipipedului, se ia un punct N așa fel încît $NA/ND=7$, iar pe lungimea BC , opusă lui AD se ia un alt punct M așa fel încît $MB/MC=3/5$. Să se calculeze: 1) dimensiunile paralelipipedului; 2) cât la sută reprezintă dimensiunea cea mai mare din dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului; 3) diagonala paralelipipedului (cu aproximație în minus de o zecime); 4) lungimea segmentului MN ; 5) cu cât trebuie prelungite laturile dreptunghiului pentru a intersecta prelungirile segmentului MN în ambele sensuri.

R. 1) 24 cm , 16 cm , 10 cm ; 2) 150% ; 3) $30,5 \text{ cm}$. 4) $MN=20 \text{ cm}$; 5) 4 cm ; 12 cm .

90. Baza unei piramide este un triunghi ale cărui laturi sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{74}$ și $\frac{1}{102}$, iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mai mică a triunghiului este 31 cm . Înălțimea piramidei este cu 25% mai mare decît înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secțiune paralelă cu baza piramidei, secțiune al cărei perimetru este $0,54 \text{ m}$. Să se calculeze: 1) laturile triunghiului de bază a piramidei; 2) laturile triunghiului de secțiune; 3) cât la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a secțiunii; 4) volumul piramidei inițiale.

R. 1) 20 cm , 37 cm , 51 cm ; 2) 10 cm , $18,5 \text{ cm}$, $25,5 \text{ cm}$; 3) 200% ; 4) 1530 cm^3 .

91. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare este de $18\sqrt{3} \text{ cm}$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45° . La $2/3$ din înălțime față de bază se face

o secțiune paralelă cu baza piramidei. Să se calculeze: 1) media aritmetică între latura bazei piramidei și înălțimea piramidei; 2) volumul piramidei; 3) volumul piramidei avînd ca bază secțiunea efectuată; 4) raportul volumelor celor două piramide; 5) cît la sută reprezintă aria bazei piramidei inițiale din aria bazei piramidei a doua?

R. 1) $3(\sqrt{3}+1)$; 2) $54\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 3) $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 4) $\frac{1}{27}$; 5) 900%.

92. O piramidă are ca bază un triunghi ABC ale cărui laturi sînt proporționale cu numerele 12, 16, 20, iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mai mică este 2 cm. Înălțimea piramidei este cu 0,8(3) cm mai mare decît înălțimea triunghiului de bază referitor la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secțiune paralelă cu baza piramidei al cărei perimetru este 0,04 m. Să se calculeze: 1) laturile triunghiului de bază al piramidei; 2) laturile triunghiului de secțiune făcută în piramidă; 3) înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare; 4) volumul piramidei inițiale; 5) cît la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a triunghiului de secțiune ?

R. 1) 3 cm, 4 cm, 5 cm; 2) 1 cm; $1\frac{1}{3}$ cm; $1\frac{2}{3}$ cm;
3) 2,4 cm; 4) $6,5 \text{ cm}^3$; 5) 300%.

93. O piramidă are ca bază un triunghi al cărui perimetru este 15 cm laturile lui sînt trei numere consecutive. Se face o secțiune paralelă cu baza, avînd latura cea mai mare a triunghiului de secțiune de 1,5 cm. Să se calculeze: 1) laturile bazei piramidei; 2) perimetrul triunghiului de secțiune; 3) media proporțională între laturile mijlocii ale triunghiului de bază și cel de secțiune.

R. 1) 4 cm, 5 cm, 6 cm; 2) 3,75 cm; 3) 2,5.

94. O prismă dreaptă are ca bază un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea AB egală cu 133,(3)% din lățimea BC , iar înălțimea prisme este cu 25% mai mare decît dimensiunea cea mai mare a bazei. 0,125 din lungimea dreptunghiului este cu 1 cm mai mică decît $33\frac{1}{3}\%$ din lățimea lui. Din punctele A și C se duce cîte o perpendiculară pe diagonala BD a dreptunghiului. Figura $AA'CC'$ este baza unei alte prisme drepte cu aceeași înălțime ca și prima prismă (A și C sînt picioarele perpendicularelor duse pe diagonala BD ; A' și C' $\in BD$). 1) Să se afle volumul prisme inițiale. 2) Să se arate că $AA'CC'$ este un paralelogram. 3) Să se determine laturile și diagonalele paralelogramului $AA'CC'$. 4) Să se calculeze unghiul format de diagonala prisme inițiale cu planul bazei.

R. 1) $V=480 \text{ cm}^3$; 3) $AA'=4,8 \text{ cm}$; $AC'=\sqrt{30,28} \text{ cm}$;
 $AC=10 \text{ cm}$; $A'C'=2,8 \text{ cm}$; 4) 45° .

95. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este $a \text{ cm}$; muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60° . Se face o secțiune paralelă cu baza pe la mijlocul înălțimii. Să se afle raportul volumelor celor două corpuri formate prin această secțiune.

R. $\frac{1}{7}$.

96. $\frac{2}{7}$ din latura unei piramide patrulatere regulate este cu 2 cm mai mare decît 0,2 din latura unei prisme patrulatere regulate înscrisă în piramidă, cu baza pe planul bazei piramidei. Raportul dintre latura bazei piramidei micșorată cu un sfert din dublul laturii piramidei și latura prisme micșorată cu 3 cm este 1. Diagonala trunchiului de piramidă ce se formează prin înscrierea prisme este –în cm– media proporțională a numerelor 40,5 și 8. Să se afle: 1) volumul piramidei; 2) aria laterală a prisme.

R. 1) $V \approx 1\,372\text{ cm}^3$; 2) Aria laterală = 240 cm^2 .

97. 25% din înălțimea unui con mărită cu 2 cm este cît 0,6 din generatoarea lui micșorată cu 2 cm, iar media lor aritmetică mărită cu 1 cm este cît cea mai mare dintre ele. Să se calculeze: 1) cît la sută reprezintă raza conului din raza unei sfere înscrisă în acest con; 2) volumul sferei înscrisă în con; 3) aria laterală a conului; 4) raportul volumelor sferei și conului.

R. 1) 200%; 2) $36\pi\text{ cm}^3$; 3) $60\pi\text{ cm}^2$; 4) $\frac{3}{8}$.

98. $\frac{1}{11}$ din raza bazei unui con este cu 8 cm mai mică decît raza unui cerc de secțiune paralelă cu baza conului făcută la o distanță de bază, egală cu media proporțională între numerele 144 și 9 (socotită în cm). Raportul razelor trunchiului de con format prin planul de secțiune este $\frac{5}{11}$, iar înălțimea trunchiului este împărțită de două plane de secțiune paralele cu bazele în trei părți egale. Să se afle razele cercurilor de secțiune.

R. (raza conului = 32 cm) 10 cm; 14 cm; 18 cm.

99. Să se afle aria unei sfere circumscrise paralelipipedului dreptunghic, cu dimensiunile invers proporționale cu numerele 0,25, $\frac{1}{6}$ și 0,125, iar diferența dintre suma dimensiunilor bazei paralelipipedului și muchia lui este 1 cm. Să se determine raportul dintre numărul care exprimă raza sferei și media proporțională dintre numerele 29 și 4.

R. $29\pi\text{ cm}^2$; $\frac{1}{4}$.

100. Suma dintre diagonalele unui paralelogram și una dintre laturile sale este 165 cm. Suma diagonalelor întrece cu 12 cm dublul acestei laturi a paralelogramului, iar diferența dintre această latură a paralelogramului și diagonala cea mai mică este de 11 cm. 1) Să se afle volumul piramidei care are ca bază acest paralelogram, iar înălțimea cît $33\frac{1}{3}\%$ din latura paralelogramului. 2) Cît la sută reprezintă diagonala mică a paralelogramului din înălțimea lui ?

R. 1) $6\,936\text{ cm}^3$; 2) 166,6(6)%.

101. Intr-o prismă cu baza un triunghi dreptunghic în care raportul catetelor este $\frac{3}{4}$ iar diferența dintre proiecțiile lor pe ipotenuză este de 2,8 cm, se înscrie un cilindru cu aceeași înălțime ca și prisma. 1) Să se calculeze raportul volumelor cilindrului și

al prisme în care este înscris cilindrul. 2) Să se calculeze a patra proporțională între raza cilindrului, înălțimea triunghiului dreptunghic dusă din vârful unghiului drept și cateta cea mai mică.

R. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 14,4.

102. Un cub este înscris într-o piramidă patrulateră regulată astfel încât patru vîrfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru vîrfuri se află pe planul bazei. 1) Să se determine aria totală a cubului știind că 0,75 din latura bazei piramidei întrece cu 2 cm 0,125 din înălțimea ei, iar raportul acestora este $\frac{1}{2}$. 2) Să se arate că numărul care exprimă volumul piramidei este același cu cel ce exprimă aria totală a cubului. 3) În ce raport se află ariile bazelor cubului și piramidei ?

R. 1) $42\frac{2}{3} \text{ m}^2$; 2) $42\frac{2}{3} \text{ m}^3$; 3) $\frac{4}{9}$.

103. Într-un con cu unghiul din vîrf de 90° se înscrie un cilindru. Diagonala secțiunii axiale (un pătrat) a cilindrului este $a\sqrt{2}$ cm. Baza cilindrului este pe planul bazei conului iar generatoarele lui întîlnesc generatoarele conului respectiv. Să se determine raportul dintre aria totală a cilindrului și aria laterală a conului.

R. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

104. Într-un trunchi de con, diferența pătratelor celor două raze este 16, iar suma lor este 8 cm. Diferența razelor reprezintă $16,6\%$ din înălțimea trunchiului. Din el se taie două conuri ce au ca baze, bazele trunchiului, iar generatoarele unuia sînt în prelungirea generatoarelor celuilalt. Să se determine: 1) volumul trunchiului de con; 2) cît la sută reprezintă înălțimea conului cel mare din înălțimea conului mic; 3) raportul înălțimilor celor două conuri; 4) raportul dintre volumul părții rămase după scoaterea celor două conuri și volumul trunchiului de con.

R. $196\pi \text{ cm}^3$; 2) $166,6\%$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{30}{49}$.

105. Într-un triunghi ABC , $\frac{1}{9}$ din AC este cît $0,1$ din latura AB și $\frac{3}{5}$ din AB este cu 3 cm mai mare decît $0,3(3)$ din AC . Înălțimea BD este de 8 cm. Să se afle: 1) perimetrul triunghiului ABC ; 2) înălțimea dusă din vârful C în triunghiul ABC . 3) Triunghiul ABC este baza unei piramide cu înălțimea VA , această înălțime fiind cu 25% mai mare decît înălțimea BD a triunghiului de bază. Să se afle unghiul format de muchia VB cu latura AB a triunghiului de bază. 4) Să se afle volumul piramidei $VABC$.

R. 1) $(19 + \sqrt{73}) \text{ cm}$; 2) $7,2 \text{ cm}$; 3) 45° ; 4) 120 cm^3 .

106. Baza unei prisme este un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, în care cateta AB este $0,75$ din AC iar de patru ori AC micșorată cu 7 cm este de trei ori mai mare decît AB . Înălțimea prisme întrece înălțimea AD a triunghiului de bază ($D \in BC$) de cinci ori. Se face o secțiune în prismă printr-un plan care trece prin muchia laterală BB' a prisme și prin bisectoarea BE a unghiului B al triunghiului de bază ($E \in AC$). Să se afle: 1) perimetrul triunghiului ABC ; 2) proiecțiile catetelor pe ipotenuza BC ; 3) volumul prisme cu baza BEC și cu aceeași înălțime ca și prisma inițială.

R. 1) 12 cm ; 2) $1,8 \text{ cm}$; $3,2 \text{ cm}$; 3) 45 cm^3 .

107. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi echilateral (ABC) și ca înălțime una dintre muchiile sale laterale VA . Suma muchiilor egale împreună cu perimetrul triunghiului de bază este 139,5 cm, iar raportul dintre latura triunghiului de bază și una din muchiile laterale egale este $\frac{2,5}{4}$. Pe latura AB a triunghiului de bază se ia punctul $M(M \in AB)$ care împarte latura AB în raportul 2/7. Din M se duce o paralelă la muchia VB , care taie înălțimea piramidei în $N(N \in VA)$ și o paralelă MG la BC latura triunghiului de bază care taie latura AC a triunghiului în punctul $G(G \in AC)$. Să se calculeze: 1) aria triunghiului MNG ; 2) volumul piramidei $VABC$.

R. 1) $\approx 19 \text{ cm}^2$; 2) $V \approx 2050 \text{ cm}^3$.

108. Mediana BE dusă pe una din laturile egale ale unui triunghi isoscel ABC (cu baza BC) împarte perimetrul triunghiului în două părți: $AB+BE$ și $BC+CE$. Prima

parte este mai mică decât a doua și raportul celor două părți este $7\frac{1}{2}$. Se cunoaște că $\frac{1}{3}$ din partea cea mai mică mărită cu $\frac{1}{5}$ din ea este cu 9 cm mai mică decât partea cea mai mare. Înălțimea AD și mediana BE se taie în $G (D \in BC)$. 1) Să se calculeze aria triunghiului ABC . 2) Să se demonstreze că patrulaterul $GECD$ este echivalent cu triunghiul ABG . 3) Să se calculeze înălțimea triunghiului AGE corespunzătoare laturii AE . 4) Să se calculeze aria și volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului isoscel în jurul uneia dintre laturile egale.

R. 1) 48 cm^2 ; 2) 16 cm^2 ; 3) $3,2 \text{ cm}$; 4) $211,2\pi \text{ cm}^2$; $307,2\pi \text{ cm}^3$.

109. Într-un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, cateta AB mărită cu 25% din ea este cu 13 cm mai mică decât suma catetelor triunghiului iar 0,125 din AB este de 15 ori mai mică decât AC . Triunghiul ABC este baza unei piramide a cărei înălțime VA este $\frac{17}{60}$ din înălțimea AD a triunghiului $ABC (D \in BC)$. Se face o secțiune printr-un plan paralel cu baza la distanța de $\frac{17}{20}$ din înălțimea piramidei față de vîrf și o altă secțiune prin muchia VA și mediana AE relativă la ipotenuză ($E \in BC$). Să se afle: 1) volumul trunchiului de piramidă format prin prima secțiune; 2) aria triunghiului din secțiunea VAE .

R. 1) $\approx 70 \text{ cm}^3$; 2) $38\frac{1}{2} \text{ cm}^2$.

110. Într-un romb $ABCD$ diagonala mică AC este $2\sqrt{5} \text{ cm}$ iar suma dintre latura rombului și proiecția ei pe diagonala mare este de $5+2\sqrt{5} \text{ cm}$. Fie AN înălțimea dusă din A pe CD și AM înălțimea dusă din A pe BC ; apoi $AM \cap BD = \{E\}$ și $AN \cap BD = \{F\}$. Să se calculeze: 1) aria rombului; 2) mărimea înălțimii rombului AM (sau AN), valoarea rapoartelor AF/FN și OF/FD . 3) Să se arate că patrulaterul $MCNA$ este înscritibil. 4) cît la sută reprezintă aria pentagonului $MCNFE$ din aria patrulaterului $MCNA$? 5) Să se afle volumul piramidei ce are ca bază rombul $ABCD$ știind că

muchia SA a piramidei este perpendiculară pe planul bazei și formează cu muchia SC a piramidei un unghi de 30° .

$$\text{R. 1) } 20 \text{ cm}^2; 2) AM=4 \text{ cm}; \frac{AF}{FN}=\frac{5}{3}; \frac{OF}{FD}=\frac{1}{3}; 4) 68,75\%; 5) \frac{40\sqrt{15}}{3} \text{ cm}^3.$$

111. Baza unei prisme drepte este un triunghi ABC . Pe prelungirea laturii AC se ia un punct D astfel ca $\angle BAC \equiv \angle CBD$. Segmentul AD este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decât segmentul CD , iar $AD+CD=13$ cm. Latura BC a triunghiului ABC este de 2 cm și înălțimea prisme este $\sqrt{65}$ cm. 1) Să se arate că BD este media proporțională a segmentelor AD și CD . 2) Să se afle laturile triunghiului ABC . 3) Să se afle aria laterală a prisme.

$$\text{R. 2) } AB=\sqrt{10} \text{ cm}; AC=5\frac{4}{7} \text{ cm}; 3) \frac{53+7\sqrt{10}}{7}\sqrt{65} \text{ cm}^2.$$

112. Într-un cilindru circular drept este înscrisă o prismă cu baza un triunghi echilateral ABC avînd latura de $12\sqrt{3}$ cm. Din centrul O al bazei cilindrului se duce o paralelă OD la latura BC a triunghiului ($D \in AC$). Înălțimea prisme este $12\sqrt{3}$ cm și este egală cu înălțimea cilindrului. Să se afle: 1) volumul cilindrului; 2) volumul prisme cu baza ABC . 3) Notînd cu M piciorul perpendicularei dusă din O pe latura BC ($M \in BC$), să se afle volumul prisme avînd ca bază patrulaterul $ODCM$ și aceeași înălțime ca și cilindrul.

$$\text{R. 1) } 1\,728\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3; 2) 3\,888 \text{ cm}^3; 3) 1\,080 \text{ cm}^3.$$

113. Una din laturile unui paralelogram este cu 11 cm mai mare decât diagonala mică a lui și 0,5 din diagonala mare micșorată cu 25% din diagonala mică este 27 cm. Suma dintre diferența menționată mai sus și latura considerată este 78 cm. Paralelogramul este baza unei piramide în care se face o secțiune paralelă cu baza ce împarte înălțimea piramidei în raportul de $3/5$ socotit de la vîrf. Se știe că înălțimea piramidei este cu 25% mai mică decât diagonala mică a paralelogramului. Să se calculeze: 1) diagonalele paralelogramului; 2) volumul piramidei; 3) volumul piramidei care are ca bază secțiunea făcută în piramida inițială și vîrfurile comune cu prima.

$$\text{R. 1) } 40 \text{ cm}, 74 \text{ cm}; 2) 12\,240 \text{ cm}^3; 3) 645,46875 \text{ cm}^3.$$

114. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ (BC baza mare) diagonala BD este perpendiculară pe latura neparalelă CD . 0,125 din înălțimea AB a trapezului este cu 1 cm mai mică decât 20% din CD . Raportul acestora este $4/5$ ($AB/CD=4/5$). Se cere: 1) perimetrul trapezului $ABCD$; 2) aria triunghiului ACD ; 3) aria triunghiului DCE (E fiind punctul de intersecție al paralelei dusă din C la AB și prelungirea diagonalei mici BD); 4) distanța punctului A la latura CD ; 5) aria și volumul corpului format prin rotația completă a trapezului $ABCD$ în jurul bazei mici.

$$\text{R. 1) } 45\frac{1}{3} \text{ cm}; 2) 42\frac{2}{3} \text{ cm}^2; 3) 37,5 \text{ cm}^2; 4) 8\frac{8}{15} \text{ cm}; 5) \frac{1\,232\pi}{3} \text{ cm}^2, \frac{2\,816\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

115. Într-o prismă dreptunghiulară oblică înălțimea $A'M$ a feței laterale $ABB'A'$ este și înălțimea prisme ($M \in AB$), iar $\frac{MA}{MB} = 1$. Lățimea dreptunghiului de bază este de 6 cm iar diferența dintre diagonala și lungimea dreptunghiului este de 2 cm. Segmentul ce unește vârful A' cu O (punctul de intersecție al diagonalelor bazei) este de 5 cm. Să se afle: 1) volumul prisme; 2) măsura unghiului format de muchia AA' cu latura AB a dreptunghiului de bază; 3) aria triunghiului AMO ; 4) volumul piramidei ce are ca bază triunghiul AMO și vârful în A' .

R. 1) 192 cm^3 ; 2) 45° ; 3) 6 cm^2 ; 4) 8 cm^3 .

116. Într-o piramidă dreptunghiulară cu muchiile laterale egale se cunosc următoarele date: 40% din diagonala bazei micșorată cu 0,1(6) din lățimea bazei este de două ori mai mică decât lățimea, iar diferența dintre diagonală și lățime este de 4 cm. Muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60° . Se face o secțiune paralelă cu baza al cărei perimetru este de 7 cm. Să se afle: 1) cât la sută reprezintă diagonala bazei din lungimea bazei; 2) volumul piramidei inițiale; 3) volumul trunchiului de piramidă obținut prin secțiunea dată; 4) aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă; 5) diagonala trunchiului de piramidă.

R. 1) 125%; 2) $80\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 3) $\frac{315\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$; 4) $\frac{12,5 \cdot 15\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$; 5) $\frac{5\sqrt{13}}{2} \text{ cm}$.

117. Un turn de formă cilindrică are un acoperiș de forma unei piramide hexagonale regulate cu baza $ABCDEF$ și vârful V . Înălțimea cilindrului este de 20 m. Triunghiul VAD este echilateral. Baza superioară a cilindrului este un cerc înscris în hexagonul $ABCDEF$. Muchia laterală a piramidei este de $4\sqrt{3} \text{ m}$. Să se afle volumul cilindrului.

R. $180\pi \text{ m}^3$.

118. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, în care cunoaștem următoarele: bisectoarea unghiului B întâlnește cateta AC în E și este perpendiculară pe mediana AD ($D \in BC$), segmentul AE este de 6 cm. Înălțimea piramidei este muchia $VA = 10\sqrt{3} \text{ cm}$. Aflați: 1) perimetrul triunghiului dreptunghic ABC ; 2) volumul piramidei $VABC$; 3) volumul piramidei $VABD$ (are ca bază triunghiul ABD și același vârf ca și prima piramidă). 4) Să se arate că jumătate din ipotenuza triunghiului ABC este medie proporțională între cateta cea mai mare a triunghiului și proiecția bisectoarei BE pe această catetă.

R. 1) $18(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$; 2) 540 cm^3 ; 3) 270 cm^3 .

119. Într-o prismă cu baza un trapez isoscel $ABCD$, în care linia mijlocie este de 6,5 cm și cu 2,5 cm mai mică decât baza mare, se înscrie un cilindru a cărui înălțime este egală cu 10 cm și egală cu înălțimea prisme. Se consideră apoi prisma care are ca bază triunghiul BOC (O fiind centrul cercului de bază a cilindrului) și aceeași înălțime cu prisma inițială, precum și corpul care are ca bază sectorul MON și aceeași înălțime ca a prisme (sau a cilindrului). Să se afle: 1) volumul prisme cu baza $ABCD$; 2) volumul cilindrului înscris; 3) volumul prisme cu baza BOC ; 4) volumul corpului care are ca bază sectorul MON .

R. 1) 390 cm^3 ; 2) $90\pi \text{ cm}^3$; 3) $97,5 \text{ cm}^3$; 4) $22,5\pi \text{ cm}^3$.

120. O piramidă are ca bază un triunghi ABC în care $BC=16$ cm, $AB=10$ cm, iar înălțimea $AD=8$ cm ($D \in BC$). Înălțimea piramidei este de 30 cm. Fie E, F, G respectiv mijloacele laturilor AB, AC și BC ale triunghiului ABC . Să se afle volumul piramidei care are ca bază patrulaterul $DEFG$ și același vîrf cu prima piramidă.

R. 200 cm^3 .

121. Un triunghi isoscel ABC , $[AB]=[AC]$, este înscris în cercul O a cărui rază mărită cu 20% este cît una din laturile egale ale triunghiului isoscel micșorată cu 25%, iar dublul razei cercului mărită cu 2 cm și apoi împărțită la lungimea laturii considerate a triunghiului micșorată cu 2 cm dă cîtul 2. Fie BM înălțimea dusă din B pe AC și AE bisectoarea din A pe BC ; $BM \cap AE = \{N\}$. Paralela dusă din A la BC intersectează perpendiculara dusă din B pe BC în D ; $BD \cap AD = \{D\}$. Se cere: 1) perimetrul patrulaterului $ABCD$; 2) înălțimea BM ; 3) să se demonstreze că $\frac{m(\angle A)}{2} = m(\angle ABD) = \frac{m(\angle BOC)}{4}$; 4) să se arate că $BE^2 = \frac{BM \cdot BN}{2}$; 5) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC .

R. 1) 28,8 cm; 2) 7,68 cm; 5) $131,072\pi \text{ cm}^3$.

122. Aria unui triunghi ABC este de 24 cm^2 . Punctul $D \in BC$ și M este mijlocul lui AD . Fie E și F simetricele punctului M față de AB și AC , $ME \cap AB = \{H\}$ și $MF \cap AC = \{N\}$. Proiecția laturii AB pe latura BC a triunghiului este segmentul BG ($G \in BC$). Se cunoaște că $2/3$ din lungimea BC este cu 0,5 dm mai mare decît segmentul BG și $4/3$ din BG este cît jumătate din BC micșorată cu $1/6$ din aceasta. Se cere: 1) să se arate că aria $AMB + \text{aria } AMC = 1/2$ aria ABC ; 2) să se arate că aria patrulaterului $ANMH$ este $1/2$ din aria patrulaterului $AEMF$; 3) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC .

R. 3) $64\pi \text{ cm}^3$.

123. Într-un trapez $ABCD$ ($AB = \text{baza mare}$) diagonalele AC și BD se întîlnesc în punctul O . Aria triunghiului AOB este de 60 cm^2 . Se știe că 0,125 din baza mică este cu 0,3 dm mai mică decît 20% din baza mare, iar raportul mărimilor celor două baze este $5/2$. Se cere: 1) să se demonstreze că triunghiurile AOD și BOC sînt echivalente; la fel pentru triunghiurile ADC și DBC ; 3) aria trapezului; 4) volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB (baza mare a trapezului); 5) să se construiască un dreptunghi echivalent cu trapezul $ABCD$; 6) printr-un punct M situat pe baza mică a trapezului să se ducă o dreaptă în interiorul trapezului așa fel ca să-l împartă în două părți echivalente.

R. 1) 14 cm; 3) $117,6 \text{ cm}^2$; 4) $240\pi \text{ cm}^3$.

124. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ (AB este baza mare) circumscris unui cerc O a cărui rază este cu 3,5 cm mai mică decît linia mijlocie a trapezului și 0,3 din raza cercului mărită cu $2/3$ din ea este cu 1,7 cm mai mare decît 20% din linia mijlocie a trapezului. Raportul bazelor trapezului este $2/2,5$. Se cere: 1) aria trapezului $ABCD$;

2) să se arate (fără calcul) că linia mijlocie a trapezului este egală cu una din laturile neoparalele ale trapezului; 3) să se arate că triunghiul COB este dreptunghic și aria lui este $1/4$ din aria trapezului; 4) notînd cu M , respectiv N , mijloacele bazelor DC și AB ale trapezului să se arate că triunghiurile MOC și NOB sînt asemenea; 5) să se arate că $MN^2 = DC \cdot AB$; 6) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a trapezului în jurul bazei mari AB .

$$R. 1) 39 \text{ cm}^2; 6) \frac{676}{3} \pi \text{ cm}^3.$$

125. Într-un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle B) > m(\angle C)$, bisectoarea unghiului B taie mediana AD în M iar cateta AC în N ($D \in BC$) și $0,6$ din măsura unghiului B micșorată cu 25% din ea este de 5 ori mai mare decît $1/6$ din măsura unghiului C al triunghiului. Se cere: 1) lungimea laturilor triunghiului ABC cunoscînd ipotenuza de $6\sqrt{3}$ cm; 2) să se arate că triunghiurile AMB și AMC sînt echivalente; 3) să se arate că triunghiul ABD este echilateral, triunghiul BND este dreptunghic și triunghiul AND este isoscel; 4) să se afle volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul catetei AC .

$$R. 1) BC = 6\sqrt{3} \text{ cm}; AB = 3\sqrt{3} \text{ cm}; AC = 9 \text{ cm}; 4) 81\pi \text{ cm}^3.$$

126. Într-un triunghi isoscel ABC , $[AB] = [AC]$, se cunoaște că $0,375$ din una din laturile egale ale triunghiului este cu 2 cm mai mare decît 20% din raza cercului O circumscris triunghiului și raportul dintre raza cercului și una din laturile egale este $2,5/4$. Fie AD înălțimea triunghiului isoscel. Prin O (centrul cercului), se duce o paralelă la AB care întâlnește pe BC în N iar pe AC în M ; fie M' simetricul punctului M față de BC și A' punctul de intersecție obținut prin prelungirea laturii AB și a dreptei pe care se află segmentul MM' . Să se arate că: 1) triunghiul $AA'M$ este isoscel; 2) punctele N , D și M' sînt coliniare. 3) Cît la sută reprezintă mărimea razei cercului O din lungimea laturii AB a triunghiului isoscel? Să se calculeze volumul piramidei ce are ca bază triunghiul ABC știind că înălțimea piramidei este egală cu înălțimea AD a triunghiului ABC .

$$R. 3) 62,5\%; 4) 8,192 \text{ cm}^3.$$

127. Ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, se împarte în opt părți egale și se notează cu M punctul cel mai apropiat de C . Se împarte cateta AC în 3 părți egale și se notează cu N punctul cel mai apropiat de C și cu D punctul cel mai apropiat de A . Prin D se duce o paralelă la BC , care taie pe AB în E ($E \in AB$). Se cunoaște că diferența dintre $0,4$ din ipotenuza BC și 25% din AC este de 2 cm, iar triplul catetei AC comparată cu 20% din ipotenuza BC formează raportul $24/2$. 1) A cîta parte din aria triunghiului ABC este aria triunghiului MNC și AED ? 2) Să se demonstreze că triunghiul ADM este echivalent cu triunghiul MNC iar aria triunghiului AMC este cît întregul ariei triunghiului MND . 3) A cîta parte din aria triunghiului ABC este aria pentagonului $BMNDE$? 4) Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul ipotenuzei BC .

$$R. 1) \frac{1}{24} \text{ și } \frac{1}{9}; 3) \frac{61}{72}; 4) v = \frac{4,8^2 \pi 10}{3} \text{ cm}^3.$$

128. În trapezul $ABCD$ cu aria de 48 cm^2 , avînd baza mică AD , se duce $AE \parallel DC$, ($E \in BC$) astfel încît $\frac{CE}{EB} = \frac{1}{2}$. Se duce $DF \parallel AB$, ($F \in BC$); $DF \cap AE = \{M\}$, $DF \perp AE$ și punctul M este mijlocul segmentului DF . Se cunoaște că $2/5$ din baza mică este cu 1 cm mai mică decît $0,125$ din perimetrul triunghiului ABE , iar dublul bazei mici mărită cu 2 cm este în raport de $1/2$ față de perimetrul triunghiului ABE . Se cere: 1) perimetrul trapezului; 2) să se arate că triunghiul ABE este dreptunghic; 3) să se arate că patrulaterul $ADEF$ este un romb; 4) să se arate că triunghiul ABF este isoscel. 5) O fiind punctul de intersecție al diagonalei trapezului, să se demonstreze că triunghiurile AOB și COD sînt echivalente. 6) Să se calculeze volumul și aria corpului format prin rotația triunghiului ABE în jurul laturii BE .

R. 1) 34 cm ; 6) $V = 76,8\pi \text{ cm}^3$; aria $= 67,2\pi \text{ cm}^2$.

129. Se consideră $ABCD$ romb (diagonala mare BD); latura AB mărită cu $\frac{3}{5}$ din ea este cu 5 cm mai mare decît BD micșorată cu $0,125$ din ea. 25% din BD mărită de 3 ori comparată cu AB mărită cu 20% din ea dă raportul a căruia valoare este 1 . Se duce $AM \perp BC$, ($M \in BC$) și $AN \perp CD$, ($N \in CD$) $AM \cap BD = \{E\}$ și $AN \cap BD = \{F\}$. 1) Se cere a patra proporțională între diagonalele AC , BD și latura rombului. 2) O fiind punctul în care se intrsectează diagonalele rombului să se arate că există relația: $\frac{2AO}{AM+AN} = \frac{OE+OF}{2CM}$. 3) Să se afle aria și volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB a rombului. 4) Rombul dat fiind baza unei piramide a cărei înălțime este VO , să se calculeze volumul piramidei $VABCD$ știind că muchia VA este de 25 cm . 5) Se face o secțiune $A'B'C'D'$ paralelă cu baza $ABCD$ la $3/4$ din înălțime față de bază, în piramida $VABCD$. Să se calculeze volumul piramidei $VA'B'C'D'$.

R. 1) $\frac{100}{3}$ 3) $420\pi \text{ cm}^2$; $1\ 200\pi \text{ cm}^3$; 4) $4\ 000 \text{ cm}^3$; 5) $62,5 \text{ cm}^3$.

130. Fie punctele $A(-7; 0)$ și $B(5; 0)$ într-un sistem de axe de coordonate ortogonale. Prin A și B se duc dreptele d_1 și d_2 care fac cu sensul pozitiv al axei xx' unghiuri cu măsurile de 30° și respectiv de 120° ; $d_1 \cap d_2 = \{M\}$. Triunghiul ABM este baza unei piramide $SABM$, în care $SA = SB = SM = x$ și $m(\angle ASB) = 120^\circ$. Să se afle: a) coordonatele punctului M ; b) suma muchiilor piramidei; c) volumul piramidei. (Dimensiunile în cm .)

R. a) $M(2; 3\sqrt{3})$; b) $(18 + 18\sqrt{3}) \text{ cm}$; c) 36 cm^3 .

131. Într-un plan P se dau două drepte perpendiculare d_1 și d_2 care se intersectează în O . Distanțele de la un punct M nesituat în planul P , la dreptele d_1 și d_2 sînt egale cu $3a$ respectiv $4a$ iar distanța de la M la O este de $3a\sqrt{2}$. Să se calculeze distanța de la M la planul P în funcție de a .

Indicație. Fie B proiecția lui M pe planul P și A și C proiecțiile lui M pe d_1 și d_2 . Conform teoremei celor trei perpendiculare $BA \perp d_1$ și $BC \perp d_2$ și astfel $OABC$ este dreptunghi.

R. $MB = a\sqrt{7}$.

132. Intr-un trunchi de con aria laterala este $4\pi a^2$, înălțimea egală cu a iar generatoarea sa este cât suma razelor bazelor. Să se calculeze, în funcție de a , razele bazelor și aria laterală a conului din care provine trunchiul.

Indicație. Se obține sistemul: $R+r=2a$ și $R-r=a\sqrt{3}$.

$$\text{R. } R=a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right); r=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right); Al=\frac{\pi a^2}{6}(12+7\sqrt{3}).$$

133. Intr-o emisferă cu raza R se înscrie un con circular drept. a) La ce distanță x de bază trebuie dus un plan paralel cu baza astfel încât aria zonei sferice să fie egală cu aria laterală a trunchiului de con tăiat de conul înscris în emisferă ? b) Să se indice o metodă grafică pentru construcția segmentului x .

Indicație. b) Se ridică o perpendiculară pe diametrul emisferei egală cu diametrul și din ea vom scădea apoi latura pătratului înscris în cercul de rază R și vom obține astfel segmentul x .

$$\text{R. a) } x=R(2-\sqrt{2}).$$

V. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Dacă aria unui paralelipiped dreptunghic este egală cu dublul pătratul diagonalei sale, atunci el este un cub.

Indicație. $2(ab+ac+bc)=2(a^2+b^2+c^2)$.

2. Se dă un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu $\frac{2}{3}$ din diametru. 1) Să se afle aria totală, aria laterală și volumul conului. 2) Se desfășoară suprafața laterală a conului, obținându-se astfel un sector de cerc. Câte grade are unghiul acestui sector ? 3) La ce distanță de vârful conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza astfel ca lungimea cercului de secțiune să fie 9π cm ?

R. 1) 60π cm²; 96π cm²; 96π cm³; 2) 216° 3) 6 cm.

3. Se dă expresia: $E = \left(\frac{4x^2}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} + \frac{8x-7}{1-2x} \right) : \frac{1-2x}{2x+1}$.

1) Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă este $E = -2x+1$; să se stabilească mulțimea valorilor lui x , pentru care expresia dată nu are sens.

2) Să se afle mulțimea numerelor reale pozitive pentru care $-2x+1 \geq \frac{2}{3}$.

R. 1) $\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$; 2) $x \in \left(0, \frac{1}{6} \right]$.

4. Se dau mulțimile $A = \{x; 1; 4; 5\}$; $B = \{3; 6; 1; 4; 5\}$, în care $x \in \mathbb{N}$ și x este baza sistemului de numerație din relația: $\frac{20}{120} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1000}{120} = 1$.

Să se determine: a) $C_A B$; b) $B-A$; c) $A \cup B \cap A$ și $A \cap B \cup B$.

R. a) $C_A B = \emptyset$; b) $B-A = \{6\}$.

5. a) Dacă x și y sînt două numere strict pozitive atunci $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Să se arate că dacă $x+y=k$, cea mai mare valoare a produsului xy este $\frac{k^2}{4}$. b) În aceleași condiții să se arate că cea mai mică valoare a lui x^2+y^2 este $\frac{k^2}{2}$.

Indicație: Inegalitatea se mai poate scrie: a) $(x+y)^2 \geq 4xy \rightarrow (x-y)^2 \geq 0 \rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{k^2}{4}$; max. $xy = \frac{k^2}{4}$.

b) $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \geq k^2 - 2 \cdot \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{2}$ adică cea mai mică valoare a lui x^2+y^2 este $\frac{k^2}{2}$.

6. Intr-o piramidă $VABC$ cu baza un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, muchia CV este perpendiculară pe planul bazei. Din punctul C se duc perpendicularele CD și CE

pe VA respectiv VB . Să se arate că există relația: $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{VE}{BE} \cdot \frac{AD}{VD}$.

7. Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M și N situate de o parte și de alta a lui BC . Cum trebuie alese punctele M și N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cît mai mare? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

R. Patrulaterul $BMCN$ este un pătrat.

8. Să se afle valoarea maximă a funcției $f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 22}{x^2 - 4x + 6}$; ($x \in \mathbb{N}$).

Indicație. $f(x) = 3 + \frac{4}{x^2 - 4x + 6} = 3 + \frac{4}{(x-2)^2 + 2}$.

R. 5.

9. Se consideră $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + x^2 + 1$. a) Să se afle cîtul și restul împărțirii lui $f(x)$ la $(2x^2 - x)^2$ fără a efectua împărțirea. b) Să se arate care din următoarele afirmații este adevărată, $f(x) < 0$; $f(x) = 0$; $f(x) > 0$; pentru $x \in \mathbb{R}$. c) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ ia cea mai mică valoare $x \in \mathbb{N}$?

R. a) Cîtul este 1; restul este 1; c) $x = 0$.

10. Să se demonstreze că dacă $a > 0$; $b > 0$; și $a+b=1$ atunci $0 \leq ab \leq \frac{1}{4}$ și $\frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 \leq 1$.

Indicație. $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \geq 0$; $(a+b)=1$ și $a^2 + b^2 + 2ab = 1$.

11. Pentru ce valori ale lui $x \in [-4, 4]$ și $x \in \mathbb{Z}$ expresia $x^4 - 5x^2 + 4$ este divizibilă cu 5.

Indicație. Cel puțin unul din factorii expresiei date, trebuie să fie divizibil cu 5.

R. $\{3; -3\}$; $\{4; -4\}$; $\{1; -1\}$; $\{2; -2\}$.

12. Se dau polinoamele: $P(x) = 2x^3 + x^2 - xm - 1$; $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + nx + 1$. a) Să se determine m , n astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $2x-1$ iar $Q(x)$ să se dividă cu $2x+1$. b) Cu valorile aflate pentru m și n să se simplifice fracția $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

R. a) $m = -1$; $n = 3$; b) $\frac{2x-1}{2x+1}$.

13. Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care fracția $\left(\frac{5}{4}\right)^n > 2$.

Indicație. n fiind minim, se înlocuiește cu 1, 2, 3, 4.

R. $n=4$.

14. Se dă $f(x) = \frac{3x^6 + 6x^3 + 10}{x^6 + 2x^3 + 2}$. Să se determine valoarea lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x)$ este

maximă. b) Să se afle valoarea maximă a lui $f(x)$.

R. a) $x=-1$, b) $f(x)=7$.

15. Să se afle volumul și aria laterală a unui con înscris într-un tetraedru regulat de muchie " a ".

$$\mathbf{R.} \quad V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{108}; \quad Al = \frac{\pi(a\sqrt{3})}{6} \cdot \frac{(a\sqrt{3})}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

16. Fie M un punct pe diagonala AC a trapezului $ABCD$ (AB bază mare) și MP , MN paralele duse la AB , respectiv AD ($N \in DC$ și $P \in BC$). a) Să se arate că $m(\angle CNP) = m(\angle ABD)$. b) Paralela din N la BC taie pe BD în R . Să se arate că punctele B , N și mijlocul Q al segmentului RP sînt coliniare. c) Care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$ astfel ca să aibă loc relația $NP = \frac{2}{3}DB$?

R. c) $\frac{MC}{MA} = 2$.

17. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care $m(\angle ABC) = 150^\circ$ și diagonala BD perpendiculară pe AB . Fie E proiecția lui C pe AD și F intersecția laturii BC cu cercul circumscris triunghiului DEC , avînd centrul O . Să se arate că: 1) DF este perpendiculară pe BC ; 2) punctele E , O , F sînt coliniare; 3) BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului DEC . 4) Să se demonstreze că $BD^2 = BF \cdot AD$. 5) Dacă $AB = 2a$, ($a > 0$), să se calculeze perimetrul patrulaterului $BDEF$.

R. 5) $2a(\sqrt{3} + 1)$.

18. Să se demonstreze că expresia $E = x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy + x + y$ este divizibilă cu 2 oricare ar fi x și y numere naturale.

Indicație: $E = (x+y)(x+1)(y+1)$; considerăm toate cazurile: x par, y impar etc.

19. Se dă $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) > 0$.

20. Fie a un număr natural, $a \in \mathbb{N}$. Să se găsească o mulțime de patru numere naturale: x , y , z , t , așa încît efectuînd operațiile: $x + a$; $y - a$; $z \cdot a$; $t : a$ să obținem același rezultat numeric.

Indicație. Fie m rezultatul comun; astfel obținem: $x = m - a$; $y = m + a$; $z = m/a$; $t = am$; $m \geq a$. Dacă notăm cu n un număr natural arbitrar, obținem: $x = a(n-1)$ ș.a.m.d.

R. $E_n = \{a(n-1); a(n+1); n; a^2n\}$, (o infinitate de soluții pentru un a dat).

21. Fie $F(x) = \frac{6x^2 + 4x^2\sqrt{2} - 4}{2x + 2 + x\sqrt{2}}$. Să se aducă $F(x)$ la forma cea mai simplă.

R. $2x + x\sqrt{2} - 2$.

22. Fie $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$. a) Să se aducă $f(x)$ la forma cea mai simplă. b) Pentru ce valori ale lui x , $f(x) < 0$? c) Să se determine mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{N}$ pentru care $f(x)$ este un număr întreg.

R. a) $\frac{x-4}{x+2}$; b) $-2 < x < 4$; c) $\{0, 1, 4\}$.

23. Se dă $f(x) = \frac{a^4(x+a)^3}{a^4(a^2+x^2)+2a^5x} : \left\{ 2(x-a) : \left[\frac{ax-2x-a^2+2a}{ax} : \left(\frac{x(a-2)}{a} - \frac{a-2}{x} \right) : \frac{1-\frac{2}{a} : \frac{x}{2a}}{a-2} + \frac{a-2}{a} \right] + 2a - x - 2 \right\}$ Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p : f(x) \in \mathbb{N}$.

R. $f(x) = 1$.

24. a) Să se rezolve ecuația: $\frac{a^2(b+c)}{a-x} = \frac{b^2(a+c)}{b-x}$, unde necunoscuta este x iar a, b și c sînt constante diferite de 0. b) Să se verifice că rădăcina ecuației de la punctul a) este și rădăcina ecuației: $\frac{b^2(a+c)}{b-x} = \frac{c^2(a+b)}{c-x}$ (în aceleași condiții).

R. a) $x = \frac{abc}{ab+bc+ca}$.

25. Să se aducă următoarea expresie la forma cea mai simplă:

$$P(y) = \frac{a(9y^4 - 16)}{y + \frac{4}{3y}} + 9y^3 - 7 + \frac{\frac{3}{y} - 2}{\frac{1}{ay}}; \quad (a \neq 0; y \neq 0) \text{ și apoi să se determine } a \text{ astfel ca}$$

polinomul obținut să fie de gradul întâi în y . Care este acest polinom?

R. $P(y) = 14y - 10$; pentru $a = -1$.

26. Să se rezolve inecuația: $\frac{7y-5}{y+4} \leq 3$ și apoi să se determine mulțimea numerelor întregi care o verifică.

R. Toate numerele întregi din intervalul $\left[-4, \frac{17}{4}\right]$.

27. Se dau expresiile:

$$A(x) = \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}}; \quad B(x) = \left(\frac{x}{x-5} + \frac{x-5}{x} - 2 \right) : \frac{25}{x}.$$

a) Să se aducă $A(x)$ și $B(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se rezolve ecuația $A(x) + B(x) + \frac{3x^2 A(x) \cdot B(x)}{4} = 0$.

c) Să se reprezinte grafic : $y = \frac{1}{A(x)} + \frac{1}{B(x)}$.

d) Să se calculeze valorile numerice ale lui $A(x)$ și $B(x)$ pentru

$$x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{1\frac{1}{3}} - \sqrt{3,8025} + 3,1(6).$$

e) Dacă $y \neq 1$ și $x = \frac{y}{y-1}$ să se arate că:

$$[(x+y)^3 - x^3 - y^3][(x+y)^5 - x^5 - y^5] = 15x^5y^5(xy-1).$$

$$\text{R. a) } A(x) = \frac{1}{x-2}; B(x) = \frac{1}{x-5}; \text{ b) } x_1 = -\frac{14}{3}; x_2 = 2(\text{nu convine}) \text{ d) } \frac{15}{37}; -1\frac{7}{8}.$$

28. Se dă expresia:

$f(x) = [x^8 - x^8(4 \cdot 4^{99} - 4^{100} + 2^{24} - 4^{12}) - x^5] + x^5 \cdot (4^{27} - 2^{54})^3 - x^3 + 1, x \in \mathbf{R}; x \neq 1.$ a) Să se arate că $f(x)$ este pozitivă. b) Să se arate că $f(x)$ se divide prin: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. c) Să se verifice că $f(x) + x^5 - 2x^4 + x^3 \geq 0$.

29. Se dă inecuația: $\frac{2x-1}{6} - \frac{x+4}{2} > \frac{x-1}{9}$ definită pe mulțimea $A = \{2; -2; 3; -3; 5\}$. Să se determine mulțimea $x \in \mathbf{Z}$ ce satisface inecuația.

$$\text{R. } \{-3\}.$$

30. Se dă rombul $ABCD$ unde $m\angle(A) = 60^\circ$, O este intersecția diagonalelor, E simetricul lui O față de AD și M intersecția dreptelor OE și AD .

1) Să se arate că punctele C, D și E sînt pe aceeași dreaptă (coliniare).

2) Să se arate că patrulaterul $ABCE$ este trapez dreptunghic.

3) Dacă N este piciorul perpendicularei din O pe AE să se arate că $[AN] \equiv [NM] \equiv [OM]$ și că MN este paralelă cu AO .

4) Să se arate că patrulaterul $ANMO$ poate fi înscris într-un cerc. Care este centrul cercului?

5) Să se arate că $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$.

31. Se dă expresia: $f(x) = x^4 - x^4(4 \cdot 2^{99} + 2 \cdot 8^{33} - 6 \cdot 2^{99})^3 - x^3 + x^3 \cdot [(x^{100} - 3x^{99} - x^{99}(x-3))] - x + 1$.

Să se verifice că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

32. Se consideră expresia: $E(x,y) = x(x+2y)^2 - (x-y)(x^2+xy+y^2) - 4x^2y$.

a) Să se aducă la forma cea mai simplă și să se descompună rezultatul în factori.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei date pentru: $x=2$ și $y = -\frac{31}{2}; 5,1(6) + 3,5$.

$$\text{R. a) } y^2(4x+y); \text{ b) } 2\frac{1}{8}.$$

33. Să se arate că: $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1) + 2(x^{16}+1)$ este pătratul unui binom.

$$\text{R. } (x^{16}+1)^2.$$

34. Să se arate că suma pătratelor a trei numere consecutive mărită cu 1 este un număr divizibil cu 3.

35. Fie $E = \frac{x^2+2x+11}{x^2+2x+6}$. Să se afle valoarea maximă a lui E .

R. $E=2$.

36. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Se duc perpendicularele AA' și BB' pe diagonalele BD și AC . Să se arate că $A'B' \parallel CD$.

Indicație. Se observă că patrulaterul $ABA'B'$ este inscriptibil.

37. Să se afle valoarea minimă a fracției $\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+3}$

Indicație. $x^2-2x+1 = x^2-2x+1+2-2$.

R. 0.

38. Se dă un triunghi ABC în care $AB=AC=6$ cm și $m(\angle A)=120^\circ$. Fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi și D punctul diametral opus lui A . a) Să se arate că triunghiul BCD este echilateral. b) Fie (Δ) perpendiculara în O pe planul triunghiului BCD și un punct M pe (Δ) . Să se arate că $[MB] \equiv [MC] \equiv [MD]$. c) Se consideră tetraedul $MBCD$. Să se arate că muchiile opuse sînt perpendiculare ($MB \perp CD$). d) Să se calculeze volumul tetraedului știind că $MB=6\sqrt{3}$ cm.

R. d) $54\sqrt{6}$ cm³

39. Se consideră două conuri avînd ca axă de rotație dreapta (Δ) . Baza unui con este cercul circumscris triunghiului echilateral BCD , iar baza celuilalt con este cercul înscris în același triunghi. a) Care este raportul volumelor celor două conuri, dacă înălțimile lor sînt egale ? b) Care este raportul volumelor celor două conuri dacă secțiunile lor axiale sînt triunghiuri echilaterale ?

R. a) $\frac{4}{1}$; b) $\frac{8}{1}$.

40. Fie piramida $VABCD$ cu baza dreptunghiul $ABCD$ în care $AB=16$ cm; $BC=12$ cm iar M și N mijloacele lui AB respectiv BC și Q mijlocul muchiei VA , $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC] \equiv [VD]$. Să se determine raportul volumelor piramidelor $QMNB$ și $VABCD$.

R. $\frac{1}{16}$.

41. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt invers proporționale cu: 0,1(6); 0,125; 0,1 iar diagonala paralelipipedului este de 10 cm. Să se afle dimensiunile acestui paralelipiped.

R. $3\sqrt{2}$ cm; $4\sqrt{2}$ cm; $5\sqrt{2}$ cm.

42. Se dă șirul de rapoarte egale $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{4}{c} = \frac{8}{d}$ și $ab=d=2c$. 1) Să se calculeze a , b , c , d . 2) Dacă șirul de rapoarte egale este $\frac{1}{a} = \frac{4}{b} = \frac{8}{c} = \frac{2}{d}$ și $ab=c=d^2$ să se calculeze în acest caz a , b , c , d .

R. 1) 4; 8; 16; 32; 2) 2; 8; 16; 4.

43. Se dă ecuația $\left[\left(\frac{3x^6 - x^{12} - 1}{x^3 - x^6 + 1} - x^3 \right) : (x^2 + x + 1) - x^4 + x^3 \right] = 1$ și mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$;

$B = \{x; 1; 3; 4\}$; $x \in \mathbb{N} | x$ este rădăcina ecuației date și $x \in B$. Să se arate valoarea de adevăr a propoziției $p: (C_A B = C_B A = \{2\})$.

R. Falsă.

44. Care este numărul de două cifre care micșorat cu 5 să fie egal cu triplul răsturnatului său.

R. 92.

45. Pe un șantier, prin săparea unor fundații s-au format trei grămezi de pământ în formă de con circular drept. Suma dintre lungimea cercului de bază și generatoarea primei grămezi este egală cu 30,12 m. Diferența dintre diametrul cercului de bază și generatoarea aceleiași grămezi este egală cu 3 m. Volumul celei de-a doua grămezi reprezintă $1\frac{1}{8}$ din volumul primei grămezi iar a treia grămadă are volumul cu $3\pi \text{ m}^3$ mai mare decât prima grămadă. a) Să se afle volumul total al celor trei grămezi de pământ. b) Câte camioane cu capacitatea de 2 m^3 sînt necesare pentru transportul pământului din cele trei grămezi în timp de o zi, știind că fiecare camion face zilnic opt transporturi?

R. a) $V = 53\pi \text{ m}^3$; ($V_1 = 16\pi \text{ m}^3$; $V_2 = 18\pi \text{ m}^3$; $V_3 = 19\pi \text{ m}^3$; b) ≈ 10 camioane.

46. Se dă fracția:

$$E(x) = \frac{8x^3 + 12x^2 + 50x + 75 - 20x(2x+3)}{4x^2 - 4x - 15}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă. b) Să se afle valoarea numerică a expresiei $E(x)$ pentru

$$x = \frac{6,8(3) - 5\frac{5}{6}}{1,0816 + 0,9184}.$$

R. a) $2x-5$; b) -4 .

47. Un lăcătuș vrea să-și construiască dintr-o bară metalică o piesă care să aibă forma unei prisme drepte, avînd ca baze triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza de 10 cm. Proiecția uneia din catete pe ipotenuză este egală cu 3,6 cm, iar înălțimea în centimetri egală cu $\frac{3}{8}$ din numărul care exprimă mărimea ariei triunghiului de bază.

Știind că bara metalică are formă de cilindru, la care se cunoaște că raportul dintre aria laterală și aria totală este $\frac{9}{14}$, că diametrul cercului de bază este cu 1 cm mai

lung decât înălțimea cilindrului și că densitatea metalului din care este construită bara cilindrică este de $7,8 \text{ g/cm}^3$, se cere: 1) masa barei metalice 2) să se dovedească că, se poate construi piesa din bară, folosind operația de pilire și tăiere; 3) să se afle masa metalului înlăturat din bară la construirea piesei.

R. ($V_1 = 216 \text{ cm}^3$; $V_2 = 706,500 \text{ cm}^3$) 1) $m_1 = 5\,510,70 \text{ g}$; 3) $m_2 = 3\,825,90 \text{ g}$.

48. Se dă expresia $f(x)=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$. Să se arate că dacă $x=2k+1$ cu $k \in \mathbb{N}$, $f(x)$ nu se poate termina cu 5.

49. Să se arate că expresia $F=7^{2n+1}+2^{3n+5}+2 \cdot 2^{3n}$ este divizibilă cu 41.

Indicație. $49^n \cdot 7 + 8^n \cdot 32 + 2 \cdot 8^n + 7 \cdot 8^n - 7 \cdot 8^n = F$.

50. Aria unui teren în formă de trapez este de 5 500 m². Știind că înălțimea este de 50 m și baza mică întrece cu 10 m jumătatea bazei mari, să se afle dimensiunile bazelor trapezului.

R. 140 m; 80 m.

51. Să se treacă numărul 5 211₇ în baza 10.

R. 1 821₁₀.

52. Un siloz în formă de cilindru circular drept are diametrul interior egal cu jumătate din înălțime, iar suma dintre rază și înălțime este egală cu 15 m. a) Să se afle volumul părții interioare a silozului. b) Ce greutate are grâul ce se poate depozita în acest siloz, dacă 1 hl de grâu cântărește 78 kg?

R.a) 108π m³ ≈ 339,12 m³; b) 264 513,6 kg 9,8 ≈ 2 952 233 N.

53. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^2y + y^2x - 2x - 2y - xy + 2}{xy - 2}; \quad E_2 = \frac{x^2 - y^2 - 2y - 1}{x - y - 1}.$$

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuația: $\left(\frac{E_1 + E_2}{x + y} - x\right)(x + 1) = 0$.

R. 1) $E_1 = x + y - 1$; $E_2 = x + y + 1$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

54. Diagonalele unui trapez isoscel se intersectează în punctul O . 1) Să se afle distanțele de la O la baza mare și la baza mică a trapezului, știind că aceste distanțe sînt direct proporționale cu numerele 8,5 și 3,5 și că $\frac{2}{5}$ din distanța la baza mare este cu 4 cm mai mare decît 40% din distanța la baza mică. 2) Dacă baza mică a trapezului este de 14 cm, latura ne paralelă de 26 cm și perimetrul de 100 cm, să se afle măsura unghiului format de o diagonală cu baza mare și să se deducă apoi că diagonalele sînt perpendiculare. 3) Pe perpendiculara în O pe planul trapezului se ia un punct V așa încît $OV = 40$ cm. Să se afle volumul piramidei care are ca bază trapezul dat și ca vîrf punctul V .

R. 1) 17; 2) 45°; 3) $V = 7\,680$ cm³.

55. Se dă expresia: $f(x) = \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^2}{y^3 + x^2y - x^3 - xy^2} \right) \cdot \frac{y(x-y)}{x} + 53$ și mulțimea

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ să se dividă cu } 2 \text{ și cu } 9 \text{ și } 29 < x < 90\}$. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției $p: f(x)$ este un element al mulțimii A .

R. $f(x) = 54$; p adevărată.

56. Se dă expresia: $\frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{ab+bc+ac+c^2}$. Să se arate că această expresie este divizibilă cu 3; a, b, c diferite de 0; a, b, c , aparțin lui N .

57. Se dă expresia $E = \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 2}{y^3 - y^2 - y - 2}$. Să se determine mulțimea valorilor lui $y \in N$, pentru care E este un număr întreg.

R. $y \in \{0, 1, 3, 4, 6\}$

58. Într-o prismă dreaptă în care bazele sînt pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ se cunoaște că perimetrul bazei $ABCD$ este $\frac{3}{4}$ din perimetrul secțiunii $A'D'CB$ (în formă de dreptunghi) iar $A'B$ este cu 4 cm mai mare ca latura AB . Să se calculeze lungimea laturii pătratului $ABCD$, aria secțiunii $A'D'CB$, înălțimea prismei, aria totală și volumul prismei.

R. 6 cm; 60 cm^2 ; 8 cm; $A_t = 264 \text{ cm}^2$; $V = 288 \text{ cm}^3$.

59. Să se aducă la forma cea mai simplă.

$$E = \left(\frac{y-x}{x^4 - x^2 y^2} + \frac{1}{x^3 - x^2 y + y^3 - xy^2} \right) \cdot \left(\frac{x^7 - x^5 y^2 - x^4 y^3 + x^2 y^5}{8x^3 y - y^4} \right) \cdot \frac{4x^2 + 2xy + y^2}{3x^2 + xy}.$$

R. 1.

60. Se dă un triunghi ABC în care $m(\angle A) = 2m(\angle B)$ și $AB = 6 \text{ cm}$. Bisectoarea unghiului A taie pe BC în D . Se cunoaște că $AD = 5 \text{ cm}$ și $\frac{DB}{DC} = \frac{5}{7}$. Bisectoarea unghiului ADC taie pe AC în N . 1) Să se afle înălțimea ΔABC dusă din $\angle A$ pe BC . 2) Dacă $VD = 3 \text{ cm}$ este înălțimea piramidei cu baza ABD să se afle aria totală a acestei piramide.

R. 1) $\frac{24}{5} \text{ cm}$; 2) 42 cm^2 .

61. Se dă expresia:

$$E = \left[\left(\frac{x^3 - \sqrt{2,0(3) + 61 \frac{29}{30}}}{x^2 + 2x + 4} \right)^3 + 1 \right] \cdot \frac{x^2 - 5x + 7}{x + 2}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă. Pentru ce valoare a lui x , $E < -2$?

R. $E = (x-1)(x+2)$; $-1 < x < 0$.

62. Se dă $f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{(x+3)(x-1)}$. Să se determine mulțimea valorilor lui $x \in Z$ pentru ca $f(x) < 0$.

R. $-3 < x < 1$.

63. Un con este înscris într-un cilindru cu aceeași înălțime; generatoarele lor fac un unghi cu măsura de 30° . În con este înscrisă o sferă. 1) Să se exprime volumul acestor corpuri în funcție de raza bazei cilindrului. 2) Să se arate că volumele menționate sînt invers proporționale cu 3; 1; $\frac{27}{4}$. 3) Considerînd suma între generatoare și raza conului egală cu 45 cm, să se afle aria laterală a conului.

$$R. 1) \pi R^3 \sqrt{3}; \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}; \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{27}. 3) 450\pi \text{ cm}^2.$$

64. Să se efectueze: $\left(\frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x^4 - x^2 - 2} \right)^2 + \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 2} + 1.$

$$R. \frac{4x^4}{(x^2 - 2)^2}.$$

65. Laturile bazei unei piramide triunghiulare sînt invers proporționale cu $\frac{1}{6\sqrt{2}}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{14}$, iar diferența dintre laturile cele mai mari ale triunghiului este de 2 cm. Înălțimea piramidei este cu 20% mai mare decît latura cea mai mare a bazei. Se cere volumul piramidei.

$$R. V = 29,4 \text{ cm}^3.$$

66. Să se rezolve ecuația:

$$\left\{ \left[\left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 3^2 \cdot 2^5 \cdot 5^0}{2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3} + x^3 \right) \cdot \frac{25x}{5x+2} \right] - 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{5} + 1 \right) = 0.$$

$$R. -5; 5.$$

67. O gospodină a cumpărat cu suma de 111 lei lingurițe de 5 lei bucata și cuțite cu 27 lei bucata. Cîte lingurițe și cîte cuțite s-au cumpărat ?

$$R. 6 \text{ lingurițe și } 3 \text{ cuțite.}$$

68. Se dă ecuația: $\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = x - 3$ definită pe mulțimea $A = \{3; 4; 5; 6\}$. Să

se determine valoarea de adevăr a propoziției $r: \{x \in \mathbb{N} | x \text{ o soluție a ecuației este un element al mulțimii } A\}$.

$$R. \text{ Propoziția } r \text{ este adevărată.}$$

69. Se dă sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x}{a+2} - \frac{y}{a-2} = 1 \\ 3x + 2y = a - 1 \end{cases}$$

Să se discute sistemul în funcție de a .

$$R. \begin{cases} a \neq -\frac{2}{3} & \text{sistem compatibil și determinat,} \\ a = -\frac{2}{3} & \text{sistem incompatibil.} \end{cases}$$

70. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x^3+x^2y-2x^2-2xy+x+y}{xy(x-1)^2} = 5 \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}, \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7} \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right).$$

71. O piramidă are ca bază un trapez dreptunghic $ABCD$ în care $\angle A \equiv \angle D$ și $m(\angle A) = 90^\circ$. Fața piramidei VBC este un triunghi echilateral și este perpendiculară pe planul bazei. Se știe că $AB=AD=3$ cm și $DC=6$ cm. Se cere: 1) volumul piramidei; 2) unghiurile trapezului de bază.

R. 1) $\frac{27\sqrt{6}}{4}$ cm³; 2) $m\angle(B)=135^\circ$; $m\angle(C)=45^\circ$.

72. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă:

$$\left(1: \frac{x-2}{x^2-\frac{4b+4a}{a+b}}\right)^2 - \frac{2}{x^2-4} \left[\frac{(x^3-8)(x+2)^2}{x^2+2x+4}\right] + 1. \quad \text{R. } (x+1)^2.$$

73. a) Să se afle valoarea maximă a expresiei $E = \frac{4y^2-16y+24}{y^2-4y+5}$. b) Pentru ce valori ale lui $y \in \mathbb{N}$, E este un număr întreg?

R. a) 8; b) $y \in \{1, 2, 3\}$.

74. Se dă ecuația: $\frac{16x^4-y+8x^3y-2x}{(4x^2+2x+1)(2x+y)} = 3$.

După simplificarea fracției să se rezolve ecuația.

R. $x=2$.

75. Aria totală a unei prisme patrulater regulate este de 1 602 cm² iar latura bazei este de 9 cm. Să se calculeze diagonala unei fețe laterale a prisme.

R. 41 cm.

76. Să se efectueze $\left(\frac{\frac{\sqrt{108}+\sqrt{300}}{\sqrt{3}}-x^4}{2+x} + 8x - 4x^2\right) : (x+2)^2$. R. $2-x$.

77. Se dă mulțimea $A = \{2; 3\}$ și $f(x) = \frac{6}{2x-3}$.

Să se determine $x \in A$ pentru care $f(x)$ este un număr întreg pozitiv.

R. a) $x = \{2; 3\}$.

78. a) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$f(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{x+1} \left(x - \frac{1}{1-\frac{x-1}{x+1}}\right) - \frac{x^2+x+1}{x^4-x^3-x+1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

b) Să se stabilească domeniul de definiție a lui x pentru ca $f(x) < 2$.

c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: \{x \in \mathbb{N} | 2 < x < 3\}$.

R. a) $\frac{x-1}{x+1}$; b) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1, \infty)$; c) falsă.

79. Într-un trunchi de con este înscris un cilindru având aceeași înălțime și una din baze comună. Generatoarele celor două corpuri sînt invers proporționale cu numerele 0,25 și 0,20 iar diferența lor este de 2 cm. Aria laterală a trunchiului de con este cu $60\pi \text{ cm}^2$ mai mare decît aria totală a cilindrului. Se cere înălțimea conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului de con dat, avînd ca bază, baza cea mică a trunchiului de con.

R. $\frac{8}{3} \text{ cm}$.

80. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A , să se arate că: $(a+b+c)^2 = 2(a+b)(a+c) > 8bc$.

Indicație. $2(a+b)(a+c) > 8bc$; $a^2 + ac + ab > 3bc$; $a^2 - bc + ac - bc + ab - bc > 0$.

81. Se dă ecuația:

$$\frac{\frac{x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 6x - 1}{x^2 - 1} - 10x^2 - 2}{x^2 + 6x - 1} = 10$$

definită de mulțimea $A = \{-5; -4; -3; +3; +4; +5\}$. Să se arate că soluțiile ecuației aparțin lui A .

R. $x = \{-3; 3\}$, deci $x \in A$.

82. Dacă un muncitor ar lucra 8 zile la o lucrare, al doilea ar termina-o în 18 zile. Dacă primul ar lucra 10 zile, atunci al doilea ar termina-o în 15 zile. În cîte zile ar termina lucrarea, dacă ar lucra împreună ?

R. 12 zile.

83. Unghiul la centru al unui sector de cerc este de 60° . Raza cercului este de 9 cm. Să se calculeze raza cercului înscris în sectorul de cerc.

R. 3 cm.

84. Două brigăzi ale unei asociații agricole seamănă sfeclă de zahăr pe o tarla în formă de triunghi ce are baza de 16 km. Pentru efectuarea lucrării se împarte tarla în două parcele proporționale cu numărul lucrătorilor din fiecare brigadă. Știind că împărțirea s-a făcut printr-o dreaptă paralelă cu baza, dreaptă care are o lungime de 12 km și este dusă la o distanță de 750 de metri de bază, iar numărul lucrătorilor este de 96, să se afle: a) aria fiecărei parcele; b) numărul lucrătorilor din fiecare brigadă.

R. a) Aria tarlalei = 24 km^2 ; Aria I = $13,5 \text{ km}^2$; aria a-II-a = $10,5 \text{ km}^2$;
b) numărul lucrătorilor este 54 și 42.

85. Se dă ecuația: $\frac{8x^3y + 16x^4 - y - 2x}{(2x + 4x^2 + 1)(2x + y)} = 7$ definită pe mulțimea $A = \{2; 3; 4; 5\}$. După

simplificarea fracției să se rezolve ecuația.

R. $x = 4$ deci $x \in A$.

86. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{1+ax} \cdot \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} \cdot \frac{\sqrt{1-b^2x^2}}{1+ax} \cdot \frac{(1+ax)^2}{1+bx} = x.$$

R. $x=1$.

87. O piramidă are ca bază un trapez isoscel în care se cunosc $AD=BC=10$ cm, baza mare $AB=15$ cm. Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în O . Fie $VO=8$ cm înălțimea piramidei și $OB=9$ cm. Să se afle perimetrul triunghiului VOD .

R. 24 cm.

88. Raportul dintre aria laterală și cea totală a unui cilindru circular drept este $\frac{4}{7}$, iar diametrul bazei cilindrului este cu 4 cm mai mare ca generatoarea. Să se afle volumul cilindrului.

R. 288 cm^3 .

89. Să se arate că expresia y^2-3y+2 este divizibilă prin 2 dacă $y \in \mathbb{N}$.

R. $(y-1)(y-2)$ este produsul a două numere consecutive.

90. O grămadă de pietriș are forma conică cu raza bazei de 2 m și generatoarea de 2,5 m. Câte căruțe trebuie pentru a transporta pietrișul depozitat în 10 grămezi? 1 m^3 de pietriș are masa de 3 t, iar într-o căruță se încarcă 0,5 t.

R. 377 căruțe.

91. Să se construiască un pătrat cunoscându-se suma dintre diagonală și latura sa.

92. Perimetrul unui dreptunghi este de 120 cm, iar dimensiunile sale sînt direct proporționale cu numerele 9 și 11. 1) Să se calculeze dimensiunile dreptunghiului.

2) Să se afle aria laterală și volumul conului cu raza egală cu baza dreptunghiului și cu înălțimea egală cu înălțimea dreptunghiului.

R. 1) 33 cm; 27 cm; 2) $\approx 4\,414,21 \text{ cm}^2$; $9\,801\pi \text{ cm}^3$.

93. Să se verifice că sistemul:

$$\begin{cases} \frac{y^3+x^2+xy^2-y^2-x-y}{y^2-1+x-y} = 4 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$$

admite o soluție $x=3$ și $y=1$.

94. Într-un atelier mecanic s-a cerut unor lucrători să execute din bare cilindrice de metal niște piese care să aibă forme de prisme drepte cu baza pătrat. Cunoscându-se că diametrul bazei $D=2$ dm și generatoarea $G=3$ dm și că diagonala pătratului bazei prisme trebuie să fie egală cu diametrul cercului de bază al cilindrului, iar înălțimea prisme egală cu generatoarea barei cilindrice, se cere: 1) să se afle latura pătratului de bază a prisme; 2) să se arate cît la sută din greutatea barei cilindrice se înlătură în oținerea unei singure piese cerute. 3) Știind că trei muncitori pot lucra 24 de piese în patru ore, cîte piese pot lucra 5 muncitori în două ore?

R. 1) $L_4=\sqrt{2}$ dm; 2) 36% (cu aproximație); 3) 20.

95. Se dau expresiile: $E_1 = \frac{x^4 + x - 2x^3}{x^3 - x^2 - x}$; $E_2 = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$. 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 . 2) Să se rezolve ecuația $E_1 \cdot E_2 + 2(x-1) + 1 = 9a^2$ în care x este necunoscută. 3) Să se arate că ecuația $E_1 + E_2 + \frac{(x-1)^2}{4} + 1 = 1$ are ca soluție unul din elementele mulțimii $A = \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\}$.

R. 1) $x-1$; $x-1$; 2) $x=-3a$; $x=3a$; 3) $x \in A$; $x=1$.

96. Să se arate că fracția $\frac{x+1}{2x+1}$ este ireductibilă oricare ar fi valoarea lui $x \in \mathbb{N}$.

Indicație. $2x+1-(x+1)=x$ dar x și $x+1$ sînt numere consecutive și au divizor comun numai pe 1.

97. Aria secțiunii diagonale care trece prin două muchii laterale opuse ale unui paralelipiped dreptunghic este egală cu aria unui pătrat de $1\,681\text{ cm}^2$. Diagonala bazei paralelipipedului este egală cu latura acelui pătrat și lungimea dreptunghiului de bază a paralelipipedului este de 40 cm. Se cere: 1) aria laterală a paralelipipedului; 2) măsura unghiului format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei.

R. $4\,018\text{ cm}^2$; 45° .

98. Fie ecuația: $\left[\frac{2x-2y+(y-x)^2+1}{x-y+1} + x^2 - y^2 - 1 \right] : (x+y+1) + y = 4$ definită pe mulțimea $A = \{3; 4; 5\}$. După simplificări în condiții posibile, să se arate că mulțimea soluțiilor este inclusă în A .

R. $x=4 \in A$.

99. Se dă o prismă oblică $ABCD A'B'C'D'$ cu baza un pătrat. Proiecția muchiei $B'C'$ este muchia AD , muchia $AB=3\text{ cm}$ iar $AA'=6\text{ cm}$. Se cere: 1) volumul prisme; 2) aria totală a prisme.

R. 1) $27\sqrt{3}\text{ cm}^3$; 2) $18(3+\sqrt{3})\text{ cm}^2$.

100. Să se arate că $x=4$ și $y=3$ este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{2xy+3x^2-y^2}{3x-y} \right)^2 - y^2 \right] : (x+2y) = 4 \\ \frac{2x+3y}{2(x-y)^2-5y(y-x)} = 1 \end{cases}$$

101. Dacă a, b, c , sînt laturile unui triunghi să se arate că există relația: $a^2 < 2(b^2 + c^2)$.

Indicație. $2bc < b^2 + c^2$.

102. O piramidă are la bază un trapez isoscel cu perimetrul de 16 cm. Raportul bazelor trapezului este de $\frac{4}{7}$ iar suma acestora este de 11 cm. Înălțimea piramidei este cu

25% mai mare decât înălțimea trapezului de bază. Să se afle volumul piramidei.

$$R. V = \frac{27,5}{3} \text{ cm}^3.$$

103. Se dă ecuația: $\frac{(x^6 + x^4 y - y^3 - x^2 y^2) \cdot (x-2)}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + y)^2} \cdot \frac{1}{x^2 - y} = \frac{x}{x-1}$. După simplificări posibile

să se determine mulțimea soluțiilor $x \in \mathbb{N}$.

R. Nu are soluție.

104. Intr-o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă: $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$; $AB = 36$ cm; $AD = 15$ cm. Diagonala mare BD este împărțită de diagonala mică AC în raportul de $\frac{3}{10}$. Înălțimea piramidei $VO = 40$ cm, O fiind punctul de intersecție a diagonalelor bazei. Se cere perimetrul triunghiului VOD și volumul piramidei.

$$R. 90 \text{ cm}; 4680 \text{ cm}^3.$$

105. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(y) = \frac{12 - 4y + y^2 - y^3}{6 + y + y^2} \cdot \frac{1}{1-y}$. Să se determine mulțimea $A = \{y \in \mathbb{N} | f(y) < 0\}$.

$$R. A = \emptyset.$$

106. Laturile bazelor unui paralelipiped dreptunghic sînt $AB = x$ și $BC = y$. Să se determine înălțimea paralelipipedului cunoscînd că diagonala paralelipipedului este egală cu $x + y$.

$$R. \sqrt{2xy}.$$

107. Să se rezolve ecuația: $\left(\frac{\sqrt{28}}{x} : \frac{\sqrt{7}}{x^2} - \sqrt{3} \right) (2x + \sqrt{3}) - 3x + 2 = 0$ definită pe mulțimea $A = \left\{ 1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; 3 \right\}$. Să se găsească mulțimea soluțiilor $x \in A$.

$$R. S = \left\{ 1; -\frac{1}{4} \right\}.$$

108. Se dă ecuația: $\frac{(x^2 + 1)^2 (x^2 + x + 1)}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1} = 10$ definită pe mulțimea $A = \{2; 3; 4; 6\}$. Să se arate că printre soluțiile ecuației sînt elemente ale mulțimii A .

$$R. x = 3.$$

109. Să se arate care elemente ale mulțimii $\{2; 3; 4; 6\}$ aparțin următoarelor mulțimi: $A = \{x | x^3 = 6x^2 - 27\}$; $B = \{x | x^4 = 3x + 10\}$.

$$R. 3 \in A; 2 \in B.$$

110. Dintr-o prismă de metal, triunghiulară regulată, cu latura bazei 3 dm și înălțimea de 6 dm, se scoate o piramidă cu aceeași bază și aceeași înălțime cu prisma. Din metalul rămas se toarnă prin topire, o nouă prismă triunghiulară regulată cu înălțimea de 1 dm. a) Se cere latura bazei prisme obținute. b) Dacă noua prismă se taie printr-un plan care trece printr-o muchie a bazei și prin mijlocul muchiei laterale opuse, se cere aria secțiunii obținute.

$$R. a) 6 \text{ dm}; b) \frac{3\sqrt{109}}{2} \text{ dm}^2.$$

111. Să se aducă expresia $f(x)$ la forma cea mai simplă

$$f(x) = \frac{x^4 + y^4 - 3x^2y^2}{x^4 + x^2 - x^2y^2 - x^3y - y^2 - xy} \cdot \frac{x^2 - y^2 + xy}{x^2 + 1} + 2.$$

R. $f(x) = 3$.

112. Să se afle c.m.m.d.c și c.m.m.m.c. al polinoamelor:

$$E_1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4, E_2 = x^2 - 4 \text{ și } E_3 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 8.$$

$$\text{R. C.m.m.d.c.} = x + 2, \text{ C.m.m.m.c.} = (x + 2)^2(x^2 + 2)(x - 2).$$

113. Se dă mulțimea $A = \{1; 10; 7; 8\}$ și o submulțime B a mulțimii A cu două elemente. Dacă $B = \{x; 7\}$, să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor $p: C_B A = \emptyset$; $r: A - B = A \cap B$ știind că $x \in \mathbb{N}$ și este o rădăcină a ecuației:

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \cdot (x - 1) : (x^3 - 1) = x.$$

R. p : adevărată; $A - B = \{8; 10\}$; $A \cap B = \{1; 7\}$; $A - B \neq A \cap B$.

114. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 42 < x < 93\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 2\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: A \cap B = A \cup B$.

R. p : falsă ($A \cap B \neq A \cup B$).

115. Intr-o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$; $AD = DC = a$; $m(\angle ABC) = 45^\circ$. Înălțimea piramidei este $VC = a\sqrt{2}$. Se cere: 1) să se arate că $AC = BC$; d) să se afle aria laterală și volumul tetraedului $VABC$.

$$\text{R. d) } a^2(2 + \sqrt{3}); \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

116. Un cilindru circular drept și un con circular drept au aceeași bază și aceeași înălțime, conul fiind înscris în cilindru. În con este înscris un alt cilindru avînd una din baze la $\frac{3}{8}$ din înălțimea conului, față de vârful lui. Suma dintre generatoarea conului și raza cilindrului mare este de 16 cm, iar generatoarea cilindrului în care este înscris conul este de 8 cm. Se cere: raportul dintre aria laterală a cilindrului mic și aria totală a cilindrului mare.

$$\text{R. } \frac{15}{112}.$$

117. Fie

$$\left(\frac{3\sqrt{7} \sqrt{\frac{245x^4}{80}}}{\frac{\sqrt{343x^2}}{4}} - x \right)^2 - 16 = 0$$

definită pe mulțimea $A = \{-4; -3; -2; 2; 3; 4; 5\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: (x_1; x_2)$ elemente ale mulțimii A .

R. p : adevărată; $S = \{-2; 2\}$.

118. Se dă expresia:

$$f(x, y) = \left[\left(\frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{xy-x^2} + \frac{2}{y-x} \right)^2 + \frac{2x^2y-2xy^2}{x^2y^2} + 1 \right] \cdot \frac{x^2y^2}{x-y+xy} \cdot \frac{1}{x-y+xy}$$

și mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4\}$. Să se arate valoarea de adevăr a propoziției $a: C_A B = f(x, y) = \{1\} = A - B$.

R. Propoziția este adevărată.

119. Se dă expresia: $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care $f(x) > 1$.

R. $\frac{3}{4} < x < 2$; sau $x \in \left(\frac{3}{4}; 2\right)$.

120. Într-o sferă se înscrie un con cu secțiunea axială triunghiul isoscel ABC ($AB = AC = 17$ cm). Prin A se duce $AM = 10$ cm, $AM \cap BC = \{M\}$, și AM taie sfera în N ($BM < MC$). Știm că $MB = 9$ cm și $NC = 35,7$ cm. Să se afle volumul conului înscris în sferă. Să se calculeze perimetrul patrulaterului $ABNC$. Să se calculeze diametrul sferei.

R. 600π cm³; 85 cm; $36\frac{1}{8}$ cm.

121. Să se efectueze:

$$\left[\left(\frac{x^4+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - x\sqrt{2} - 2 \right) \right] : \left(\frac{x^6-1}{x^6-1} \right) + x^6 : (x^4+1).$$

R. x^2+1 .

122. Să se determine x și y numere naturale astfel ca $2x+3y=16$.

Indicație. $16-3y > 0$ rezultă că $y < 5$; dar y este un multiplu de 2 căci $2x = M2$.

R. $x=2$; $y=4$; $x=5$; $y=2$; $x=8$; $y=0$.

123. Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ inegalitatea

$$\frac{\left(\frac{4x^2+12x+9-2b^2x-3b^2}{2x+3-b^2} \right)^3 - 8x^3 - 36x^2 - x^3(2x+1)}{(3-x)(2x+1)} : (x-1) \leq 1 \text{ este adevărată?}$$

R. $-5 < x < 1$.

124. Se dă un tetraedru $VABC$ în care avem $VC = VB = 30$ cm și $BC = 36$ cm. Muchiile VA , AB , AC se împart în 3 părți egale și se notează cu M , N , P punctele cele mai apropiate de A . Se cere aria secțiunii MNP și să se arate că aria acestei secțiuni este $\frac{1}{9}$ din aria feței laterale VBC .

R. 48 cm².

125. Să se afle aria totală și volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei egală cu a cm, avînd înălțimea cît dublul laturii bazei sale.

R. $\frac{a^2}{2}(12+\sqrt{3})$ cm²; $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ cm³.

126. Să se efectueze:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{19 \cdot 16 + 11 \cdot 16 - 14 \cdot 16}}{x^2} - 1 \right) : \left(\frac{4}{x} + 1 \right) + \left(\frac{4-x}{x} \right)^2 + 1. \quad \text{R. } 16x^2.$$

127. O piramidă are ca bază un triunghi ABC , $AB=10$ cm; $AC=14$ cm și $BC=12$ cm. Pe latura AB se ia un punct D și se duce paralela DE la BC ($E \in AC$) așa fel încît perimetrul triunghiului ADE să fie egal cu perimetrul trapezului $BDEC$. Înălțimea piramidei VD este de 40 cm. Se cere perimetrul secțiunii VDE .

R. 90 cm.

128. Un turist pleacă dintr-un sat la oraș. Dacă merge cu 4 kilometri mai mult pe zi față de viteza planificată sosește la oraș cu o zi mai devreme față de timpul stabilit. Dacă însă merge cu 5 km mai puțin pe zi față de viteza planificată inițial, atunci sosește la oraș cu 2 zile mai târziu. Care este distanța dintre sat și oraș și în cîte zile trebuia să fie parcursă această distanță după plan?

R. 120 km; 6 zile.

129. Să se arate că numărul $1\,947 = 2\,200\,010_3$ și că $5\,211_7 = 1\,821$.

130. Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 1 oră și 20 de minute; dacă se deschide primul robinet pentru 10 minute, iar al doilea pentru 12 minute, se umple $\frac{2}{15}$ din bazin. În cît timp umple bazinul fiecare robinet singur?

R. 120 minute și 240 minute.

131. Se dă expresia: $E = \frac{\left[\frac{x^2-4}{(x+2)^2} \right]^2 + \frac{2x-4}{x+2} + 1}{8x^2} \cdot (x+2)^3$. Pentru ce valori ale lui x expresia este un număr întreg?

R. $x=2k$, ($k \in \mathbb{Z}$).

132. Se dă expresia: $(3x^3+8x^2+5x+2):(x+2)$. Să se găsească restul împărțirii fără a efectua operația.

R. 0.

133. Se dă expresia $f(x) = \frac{x^8+x^4+1}{x^4+x^2+1}$, $x \in \mathbb{N}$. Să se arate că dacă $x=2k$, $f(x)$ nu se poate termina cu numărul 6.

134. Fie $E = \frac{4x^2-x-3}{5x^2-3x-2}$. a) Pentru ce valori ale lui x , ($x \in \mathbb{N}$) E se simplifică? b) Pentru

ce valori ale lui x , E este negativă?

R. a) $x=7k+1$, b) $-\frac{3}{4} < x < -\frac{2}{5}$.

135. Se dă expresia $f(x) = \frac{9x+8}{10x+7}$. Să se determine valoarea lui x pentru care $f(x)$ se simplifică, ($x \in \mathbb{N}$).

R. $x=17k+1$.

136. Se dă trapezul dreptunghic cu baza mare $AB=16$ cm, baza mică $CD=9$ cm și înălțimea $AD=12$ cm și diagonalele $BD \cap AC = \{O\}$. a) Să se arate că $BD \perp AC$. b) Să se arate că $\triangle ADC$ și $\triangle DOC$ sînt echivalente.

137. Se dă ecuația:

$$\left\{ \left[\frac{(\sqrt{1,0201} + 0,99)^2 - \frac{x^2}{4}}{2 + \frac{x}{2}} \right] - 1 \right\} \cdot \frac{8}{x^2 - 7x + 10} = -\frac{4}{25}$$

definită pe mulțimea $A = \{12; 15; 22; 30; 31\}$. Să se găsească mulțimea soluțiilor $\{x \in \mathbb{N} | x \text{ element al mulțimii } A\}$.

R. $x=30 \in A$.

138. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ cu baza mare AB și unghiurile drepte A și D , unghiul ACD este congruent cu unghiul ABC . Se duce perpendiculara din vârful D pe diagonala AC și se notează cu E piciorul acestei perpendiculare. Se dau: $AD=5$ dm și $CD=\frac{15}{4}$ dm. 1) Să se afle lungimea segmentului DE . 2) Să se calculeze perimetrul și aria trapezului $ABCD$. 3) Se rotește trapezul $ABCD$ în jurul bazei mari. Să afle aria totală și volumul corpului astfel format.

R. 1) $DE=8$ dm; 2) $P=22,5$ dm; $A=28,125$ dm².

139. Se dă expresia:

$$E = \frac{\frac{(x+y)^2}{xy} : \frac{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1}}{\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}} \quad \text{unde } y = \frac{12}{15} + \frac{0,1 + \frac{\sqrt{1,0404}}{10,2} \left(2,2 + \frac{54 \cdot 4}{2^3} \right)}{\left(4,4; \frac{1}{5} \right) + 129}.$$

1) Să afle numărul y . 2) Să se arate că forma cea mai simplă pentru E este $(x+y)$. Pentru ce valori ale lui x expresia E nu are sens? 3) Să se afle mulțimea numerelor x întregi pentru care $-7 < x + \frac{1}{2} < -2$.

R. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $x=y$ și $x=-y$, $x=0$ și $y=0$; 3) $\{-7; -6; -5; -4; -3\}$.

140. Trei copii au vîrstele de 8, 13 și 14 ani. Tatăl lor a hotărît să le depună cîte o parte din suma de 23 000 lei la CEC, astfel ca pînă la vîrsta de 18 ani, cînd devin majori, capitalurile împreună cu dobînzile de 5% anual, socotite față de primul an, să crească devenind egale. Ce sumă va depune pentru fiecare?

Indicație. x, y, z fiind sumele depuse, iar dobînda fiind de 5% pe an, în final sumele vor fi: $\frac{3x}{2}, \frac{5y}{4}, \frac{6z}{5}$.

Cum aceste sume trebuie să fie egale se ajunge la o proporție.

R. $6\,666\frac{2}{3}$ lei; 8 000 lei; $8\,333\frac{1}{3}$ lei.

141. Fie ecuația $\frac{x(x^4+2x^3+4x^2+3x+2)}{(x^2+x+2)(x^2+x+1)}=4$ definită pe mulțimea $A=\{2,3,4\}$. Fie

$B=\{2,3,5,6\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: C_A B=x$ una din soluțiile ecuației.

R. p este adevărată.

142. Se dă expresia:

$$F = \frac{(x^2y+x^2+xy^2+y^2+x+y+2xy)(1-x)(x+3)}{3-x^2-2x}.$$

1) Să se aducă F la forma cea mai simplă. 2) Să se arate că F adusă la forma cea mai simplă este divizibilă prin 2 pentru orice $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{N}$.

Indicație. 1) După simplificare obținem $F=(x+y)(x+1)(y+1)$. 2) F este divizibilă prin 2 dacă unul din factorii lui F este divizibil prin 2. Dacă x și y sînt numere pare $(x+1)$ și $(y+1)$ sînt impare, dar suma $(x+y)$ este pară $\rightarrow F$ este divizibil prin 2. Dacă x este par și y este impar sau invers, avem unul din factori par $\rightarrow F$ este divizibil prin 2. Dacă x și y sînt impare $\rightarrow x+1$ și $y+1$ sînt pare deci F este divizibil prin 2.

R. 1) $(x+y)(x+1)(y+1)$.

143. Un trapez isoscel $ABCD$ ($BC > AD$, $BC=2a$, $AD=2b$) este circumscris unui cerc de centru O . Fie M și N punctele în care CD , respectiv AB sînt tangente cercului și E punctul de intersecție al diagonalelor. 1) Să se calculeze raza cercului în funcție de a și b . 2) Să se arate că punctele M , E și N sînt coliniare. 3) Să se calculeze ME (tot în funcție de a și b). 4) Paralela din O la bază taie pe CD în P . Din compararea segmentelor OP , OM și EM să se deducă inegalitățile dintre media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor pozitive a și b , înțelegîndu-se prin media armonică numărul x , unde $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Indicație. Se ține seama că laturile neparalele ale trapezului sînt egale cu semisuma bazelor și că înălțimea este diametrul cercului. Se studiază asemănarea triunghiurilor formate din care se deduce raportul lor de asemănare; rezultă $ME \parallel BC$. Se ține seama de proprietatea liniei mijlocii a unui trapez, de mărimea razei aflate la punctul 1) și se calculează EM .

R. 1) $R = \sqrt{ab}$; 3) $ME = \frac{2ab}{a+b}$.

144. Se consideră ecuațiile: $x^2-4x+3=0$; $x^2-(a^2+1)x+3a=0$, unde a este un număr real. Pentru ce valori ale lui a ecuațiile au o rădăcină comună?

Indicație. Prima ecuație are două rădăcini numerice. Pe rînd, se pune condiția ca una din ele să verifice ecuația a doua. Se obțin două ecuații de gradul II în a care dau 4 soluții pentru parametrul a .

R. $\{-1; 0; 2; 3\}$.

145. a) Să se afle două numere naturale b și c astfel încît pentru orice k natural par să avem: $b(1-c)(-1)^{k+1} - (b+c)(-1)^{k+2} + 1 = 0$.

G.M.

Indicație. Se ține seama de puterile numărului -1 și egalitatea devine: $-b(1-c) - (b+c) + 1 = 0$ de unde $b = \frac{c-1}{c-2}$ cu condiția $c \neq 2$, $b = 1 + \frac{1}{c-2}$.

R. $b=2; c=3$.

- b) Să se găsească minimul expresiei $E = a^2 + b^2 - 3a - 3b$ unde a și b sînt numere reale.
c) Dacă $a > 3$, $b > 3$ să se arate ca $E > 0$.

Indicație. Formăm pătrate perfecte: $E = a^2 - 3a + \frac{9}{4} + b^2 - 3b + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$. Pentru $a = b = \frac{3}{2}$ expresiile din paranteze se anulează, deci minimul expresiei E este $-\frac{9}{2}$. Dacă $a > 3 \Rightarrow a^2 > 3a \Rightarrow a^2 - 3a > 0$; $b > 3 \Rightarrow b^2 > 3b \Rightarrow b^2 - 3b > 0$, deci $E = a^2 + b^2 - 3a - 3b = a^2 - 3a + b^2 - 3b > 0$.

146. Se consideră un trapez care se rotește: a) în jurul bazei mici; b) în jurul bazei mari. Cînd este mai mare volumul obținut, în cazul a) sau în cazul b)? Volumele pot fi egale?

R. Volumul mai mare corespunde cazului a). Volumele nu pot deveni egale.

147. Care sînt singurele poligoane regulate ce se pot obține prin secționarea unui cub cu un plan? Justificați răspunsul.

R. Triunghiul echilateral, pătratul și hexagonul regulat.

148. Dintr-o piesă uzată în formă de con circular drept cu raza bazei de 2 dm și înălțimea de $2\sqrt{2}$ dm se taie un corp în formă de cub cu una din fețe așezate pe baza conului, de volum maxim. Să se arate că în felul acesta se folosește mai puțin de un sfert din material.

Indicație. Problema revine la înscrierea unui cub într-un con dat. Se va afla muchia cubului, apoi se compară volumul cubului cu volumul conului.

149. Se consideră: $A(x) = (1-2x)^{244} \cdot (2-3x^2)^{247} \cdot (3-4x^2)^{248}$; ($x \in \mathbf{R}$).

1) După efectuarea ridicărilor la putere, a înmulțirilor, a reducerilor se poate obține polinomul $A(x)$ ordonat după puterile lui x . Fără a face aceste calcule, să se afle suma coeficienților polinomului ordonat după puterile lui x .

2) Să se arate că: $A(x) \cdot [a(-1)^{k+1} + a(-1)^{k+2} + (-1)^{k+2} + (-1)^{k+3}] = 0$, pentru orice a și x reali și orice k natural.

Indicație. Se știe că se poate obține suma coeficienților unui polinom $P(x)$ dacă se calculează $P(1)$. Se vor considera cazurile pentru k par și impar și se va ține seamă de puterile numărului -1 .

R. 1) $(+1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

150. Se dă prisma hexagonală $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ cu toate muchiile egale cu a . Să se determine forma și aria secțiunii determinate de planul $BDA'E'$.

R. Dreptunghi; $a^2\sqrt{6}$.

151. Notăm produsele:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right);$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{99}\right);$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{101}\right) B.$$

Să se arate că: a) $A < B$; b) $A < \frac{1}{10} < B$; c) $A < C < B$.

Indicație. Se compară factorii produselor. Se face produsul $A \times B$ și se găsește $A \times B = \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$ dar cum $A < B \Rightarrow A < \frac{1}{10}; B > \frac{1}{10}$.

152. Un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB=4$ m și $AD=3$ m se rotește în jurul unei drepte care trece prin A și este paralelă cu diagonala BD . a) Care este aria corpului de rotație obținut? b) Care este volumul corpului de rotație obținut prin rotirea dreptunghiului dat în jurul unei axe dusă din A perpendiculară pe AC ?

Indicație. Aria corpului se compune din aria laterală a trunchiului de con cu BC generatoare plus aria laterală a trunchiului de con cu DC generatoare plus aria laterală a conurilor cu generatoarele AD și AB .

$$\text{R. a) } \frac{336\pi}{5} \text{ m}^2; \text{ b) } 60\pi \text{ m}^3.$$

153. a) Să se găsească două polinoame de gradul II, $P(x)$ și $Q(x)$ astfel ca $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-1}{x+2}$. b) Să se arate ca $P(x)-2Q(x)$ este un polinom de gradul I. c) Polinomul $R(x)=P^2(x)+Q^2(x)$, se divide prin (x^2+1) ?

Indicație. Polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ trebuie să conțină un același factor liniar, deci ele vor fi de forma: $P(x)=(2x-1)(ax+b)$; $Q(x)=(x+2)(ax+b)$.

154. Pentru vopsirea unui cub sînt necesare 6 kg de vopsea. a) Dacă, după ce am vopsit cubul, îl tăiem în cubulețe cu latura de 2 ori mai mică, de cîte kg mai avem nevoie pentru a vopsi și părțile neacoperite încă de culoare? b) Dar dacă tăiem cubul în cubulețe cu latura de trei ori mai mică cîtă vopsea mai este necesară?

Indicație. a) Se formează opt cuburi prin 3 secțiuni mari cît o față a cubului inițial.

$$\text{R. a) } 6 \text{ kg; b) } 12 \text{ kg.}$$

155. Să se rezolve ecuația: $Y \cup \{1;2\} = \{1;2;8\}$

Indicație. din $Y \cup \{1;2\} = \{1;2;8\} \Rightarrow 8 \in Y \rightarrow Y$ nu poate conține nici un element diferit de 1; 2; 8 căci ar apărea în reuniune $\rightarrow Y$ va fi oricare din submulțimile lui $\{1; 2; 8\}$ care îl conțin pe 8.

$$\text{R. } Y = \{8\} \text{ sau } \{1;8\} \text{ sau } \{2;8\} \text{ sau } \{1; 2; 8\}.$$

156. Pentru ce valori ale lui x avem

$$F = \frac{(x-3)(x-4)-(3-x)(6-x)-4+(x-1)^2}{5(x-3)-(x-1)(x-3)} < -1 \quad ? \quad \text{R. } x > 6.$$

157. Să se construiască pe același grafic dreptele (d_1) și (d_2) reprezentate de funcțiile $y=x+3$ și $y=4-x$.

158. Doi stîlpi verticali sînt înfipși într-un plan orizontal A și C fiind respectiv bazele lor; $AB=CD=16$ dm. Stîlpul CD este ancorat cu două cabluri: unul fixat în punctul E , situat în plan orizontal, astfel încît $EC=12$ dm și al doilea fixat în punctul A astfel încît cablul $AD=5\sqrt{17}$ dm. Stîlpul AB este ancorat cu un singur cablu din punctul E , astfel încît $AE=5$ dm. a) Din triunghiul ACE să se calculeze $m(\angle AEC)$. b) Se cer măsurile unghiurilor BEC și DEA . c) Se cere tangenta trigonometrică a unghiului DAE .

Indicație. a) Se calculează AC și se deduce că triunghiul ACE este dreptunghic. b) Se folosește una din reciprocele teoremei celor trei perpendiculare.

$$\text{R. a) } m(\angle AEC) = 90^\circ; \text{ b) } m(\angle BEC) = m(\angle DEA) = 90^\circ; \text{ c) } \operatorname{tg}(\angle DAE) = 4.$$

159. Să se determine A, B, C, D numere întregi pare și diferite între ele, astfel încât suma $\frac{1}{A} + \frac{9}{B} + \frac{7}{C} + \frac{4}{D}$ să fie cât mai mare posibilă.

Indicație. Numărătorii fiind dați, fracțiile vor avea valoarea cea mai mare, dacă au numitorii cei mai mici posibili. Cu numerele pare cele mai mici se formează fracții convenabile.

160. Se dă expresia $f(x) = \frac{x+13}{x-7}$ și mulțimile: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 30\}$, valorile lui x fiind două numere consecutive neprime pentru care $f(x)$ este un număr întreg și $N = \{\text{divizorii unui număr cu două cifre care este } 3/8 \text{ din răsturnatul său}\}$. Să se arate că $M \cap N = 9$ și $M - N = 8$.

161. Să se construiască un triunghi ABC în care $m(\angle B) = 90^\circ$; $m(\angle C) = 45^\circ$ și perimetrul este de 21 cm.

Indicație. La extremitățile segmentului de 21 cm se construiesc unghiuri de măsuri egale cu $22^\circ 30'$ și apoi se folosește proprietatea mediatoarei.

162. O piramidă triunghiulară $VABC$ are înălțimea de 9 cm. În triunghiul ABC care este baza piramidei, înălțimea CD împarte latura AB astfel: $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{7}$. Aria triunghiului ACD este de 40 cm^2 . La $\frac{2}{3}$ de bază se face secțiunea $A'B'C'$ paralelă cu baza. Să se calculeze volumul piramidei $V'A'B'C'$.

R. 20 cm^3 .

163. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se ridică perpendiculare în punctul A și se ia $[AB'] \equiv [AB]$, $[AC'] \equiv [AC]$. Să se demonstreze că mediana AD a triunghiului ABC , prelungită, este perpendiculară pe $B'C'$.

Indicație. Fie A' simetricul punctului A în raport cu D , se formează paralelogramul $ABA'C'$; se studiază unghiurile acestui paralelogram în legătură cu unghiurile triunghiului $AB'C'$.

164. Fie a, b, c numere reale pozitive care satisfac egalitatea: $(b+c+a)(b+c-a) = 2bc$. Să se arate că a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic.

165. Se dă un cub cu muchia a . Să se calculeze distanțele de la punctele A, C și B' la diagonala BD . Să se arate că aceste trei segmente sînt concurente, într-un punct T .

Să se arate că $\frac{BT}{TD} = \frac{1}{2}$. Să se determine măsura unghiului dintre AB' și AC .

Indicație. Vezi $\triangle CBD'$ în care $CO \perp BC$; $O \in BD'$.

R. a) $a\sqrt{6}/3$; d) 60° .

166. Un cilindru are raza de 3 cm și înălțimea de 10 cm. Pe axa lui se ia un punct M situat la o distanță x de la baza cilindrului și se scoate conul care are ca bază, baza cilindrului și vîrfurile M . a) Să se exprime în funcție de x volumul corpului rămas după această scoatere. b) Să se alcătuiască tabloul de variație al funcției. c) Să se construiască graficul acestei funcții (se vor lua ca unități, pe axa absciselor, cîte 1 cm pentru fiecare cm de înălțime, pe axa ordonatelor cîte 1 cm pentru $10 \pi \text{ cm}^3$). d) Să se determine x astfel încît corpul rămas să aibă un volum dat $a \text{ cm}^3$. Intre ce limite

trebuie să fie cuprins numărul a pentru ca problema să fie posibilă în cazul dimensiunilor date în enunțul problemei ?

Indicație. Prezentăm tabelul de variație pentru câteva valori:

x	0	2	4	...	10
V	90π	84π	78π	...	60π

R. a) $V=90\pi-3\pi x$; $x \in [0,10]$. b) Funcția este descrescătoare, având valoarea maximă pentru $x=0$, când corpul rămâne cilindric și minimul pentru $x=10$, când conul ajunge cu vârful în centrul celeilalte baze a cilindrului. d) Cu condiția $0 \leq x \leq 10$ se obține $60\pi \leq V \leq 90\pi$.

167. Un buștean cilindric cu raza de 12 cm și înălțimea de 3 m se cioplește la un capăt astfel încât să aibă un vîrf conic, înălțimea conului fiind x cm. a) Să se exprime în funcție de x volumul corpului obținut prin cioplire. b) Să se alcătuiască tabelul de variație al acestei funcții. c) Să se construiască graficul funcției.

R. a) $V=12\pi(3600-8x)$. b) Volumul are un maxim pentru $x=0$, când corpul rămâne cilindric ($V=43200\pi \text{ cm}^3$) și un minim pentru $x=300$, când corpul capătă forma de con ($V=14400\pi \text{ cm}^3$).

168. Pe o sferă cu raza de 2 dm se consideră o calotă de înălțime x . a) Să se exprime aria calotei în funcție de x . b) Între ce limite poate varia înălțimea x ? c) Între ce limite poate varia aria calotei ? d) Să se alcătuiască tabelul de variație și să se facă graficul acestei funcții. e) Să se determine x astfel ca aria calotei să fie egală cu un număr dat a . Între ce limite poate fi cuprins numărul a , pentru ca problema să fie posibilă ?

R. a) $A=4\pi x$; b) $0 \leq x \leq 4$; c) $0 \leq A \leq 16\pi$; d) funcția este crescătoare, avînd un minim 0, pentru $x=0$, și un maxim pentru $x=5$, în valoare de 16π ; e) $x=a/4\pi$; $0 \leq a \leq 16\pi$.

169. Un cilindru are înălțimea de 10 cm, iar raza x variabilă. a) Să se exprime aria sa laterală în funcție de x și să se construiască graficul acestei funcții, când x variază de la 0 la 5 ($x \in \mathbb{N}$). (Pe axa absciselor se ia ca unitate 1 cm, pe axa ordonatelor se ia ca unitate $20\pi \text{ cm}^2$.) Să se exprime volumul său ca funcție x și să se construiască graficul acestei funcții când x variază de la 0 la 5. (Pe axa absciselor – aceeași unitate ca mai înainte; pe axa ordonatelor se ia ca unitate $10\pi \text{ cm}^3$.)

R. a) $20\pi x \text{ cm}^2$; b) $10\pi x^2 \text{ cm}^3$.

VI. EXERCITII DE ALGEBRĂ REZOLVATE CU INDICAȚII METODICE PENTRU CLASELE V – IX

Am urmărit an de an, temele date la matematică la diferite concursuri, inclusiv admiterea în treapta I și a II-a.

Pentru treapta I de liceu, la algebră, accentul s-a pus pe descompunerea în factori a unei expresii algebrice ca și pe simplificarea și interpretarea unei fracții algebrice în special.

Din propria experiență ca și din consultarea lucrărilor elevilor la asemenea concursuri, am tras concluzia că marea majoritate a concurenților încearcă, la întâmplare, să obțină o descompunere în factori sau să aducă la forma cea mai simplă o fracție algebrică și dacă nu a reușit prima încercare de a obține un produs de factori, intră în panică și astfel ratează lucrarea.

În acest sens doresc să vin în sprijinul elevilor concurenți și să le ofer o orientare în descompunerea în factori a unei expresii algebrice, ca și în simplificarea și interpretarea fracțiilor algebrice.

La astfel de teme, în general, trebuie rezolvate probleme de tipul următor:

- a) să se descompună $f(x)$ în factori; b) să se aducă $f(x)$ la forma cea mai simplă; c) pentru ce valori ale necunoscutei, $f(x)$ este număr în \mathbb{Z} sau $f(x) \in \mathbb{N}$; d) pentru ce valori ale necunoscutei, $f(x)$ este negativă sau pozitivă; e) pentru ce valori ale necunoscutei $f(x)$ se simplifică; f) pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este fracție periodică; g) pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este maximă sau minimă.

Referitor la punctul a) (descompunere în factori) recomand elevilor următoarele:

1. Se cercetează expresia dată dacă conține sau nu un *factor comun*. Exemplu: $x(1-y+y^2)-1+y-y^2=(y^2-y+1)(x-1)$.

2. Dacă expresia dată nu conține factor comun, se cercetează toți termenii expresiei date, pentru a putea obține din ei sau dintr-o parte din acești termeni, o *formulă cunoscută*. Exemplu: $x^3-x^2y+xy^2-y^3=x^3-y^3-x^2y+xy^2=(x-y)(x^2+xy+y^2)-xy(x-y)=(x-y)(x^2+y^2)$.

3. *Grupare de termeni*. Exemplu: $1+x-y-xy-yz+z=(1+x+z)(1-y)$, se poate face gruparea a câte doi termeni sau direct a câte trei.

4. *Se adună și se scade aceeași expresie la expresia dată*, ținând seama că astfel trebuie să obținem o formulă cunoscută. Exemple: a) $x^4+2x^2y^2-3y^4$. Se vede ușor că avem nevoie de y^4 ca să putem obține $(x^2+y^2)^2$; $x^4+2x^2y^2+y^4-y^4-3y^4=(x^2+y^2)^2-4y^4=(x^2+y^2-2y^2)(x^2+y^2+2y^2)$; b) $x^4+2x^2y^2+9y^4$. Cele două pătrate perfecte x^4+9y^4 ne indică ce expresie trebuie să adăugăm și să scădem pentru a obține pătratul binomului $(x^2+3y^2)^2=x^4+6x^2y^2+9y^4$. Cum expresia dată conține pe $2x^2y^2$, este ușor de observat că trebuie să adăugăm pe $4x^2y^2$ ca să obținem $6x^2y^2$ de care avem nevoie pentru formarea binomului. Obținem: $(x^2+3y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+3y^2-2xy)(x^2+3y^2+2xy)$. Se pot utiliza și alte procedee.

5. Din expresia dată, se alege un termen pe care îl scriem în alt mod. Exemple:

a) $xy-4x-3y+11=0$; $xy-4x-3y+12-1=0$ și avem $xy-4x-3y+12-1=(y-4)(x-3)-1$;

b) $\frac{6x^2+5xy+y^2}{2x+y} = \frac{6x^2+3xy+2xy+y^2}{2x+y} = \frac{3x(2x+y)+y(2x+y)}{(2x+y)} = 3x+y$. De observat că numitorul

fracției ne-a orientat spre termenul de la numărător ce trebuie să-l descompunem și cum trebuie descompus, ca să putem obține ca factor comun numitorul fracției.

6. $P(1)$, $P(2)$ etc. Exemplu: $x^3-8x^2+19x-12$; $P(1)=1-8+19-12=0$. Polinomul se împarte la $x-1$ și astfel se obține ușor descompunerea lui în factori.

7. *Algoritmul lui Euclid.* Exemplu: $\frac{6x^3+13x^2+15x-25}{2x^3+4x^2+4x-10}$; prin împărțiri succesive obținem factor comun x^2+3x+5 .

8. *Metoda substituției unei expresii dintr-o expresie dată.* Exemplu: în expresia $\frac{(x^2-1)(x^2-3)+1}{(x^2-1)(x^2-4)+2}$ notăm $x^2-1=y$; $\frac{(x^2-1)(x^2-1-2)+1}{(x^2-1)(x^2-1-3)+2} = \frac{y(y-2)+1}{y(y-3)+2} = \frac{(y-1)^2}{(y-1)(y-2)} = \frac{y-1}{y-2} = \frac{x^2-1-1}{x^2-1-2} = \frac{x^2-2}{x^2-3}$.

9. *Utilizarea formulei de descompunere a trinomului de gradul al doilea.*

Exemplu: $f(x) = \frac{6x^2-5x+1}{6x^2+x-1}$; $f(x) = \frac{6(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})}{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})} = \frac{2x-1}{2x+1} = 1 - \frac{2}{2x+1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$ și $-\frac{1}{2}$).

10. *Artificii de calcul pentru a obține pătrate perfecte dintr-o expresie dată.* Exemplu: $n^2-np+p^2-mp+m^2-mn > 0$; $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$. În ambele cazuri se înmulțesc expresiile cu doi și se obțin pătrate perfecte.

11. Pentru descompunerea unei expresii într-un produs de factori, sau pentru simplificarea unei fracții algebrice, am prezentat prin exemple, mai multe procedee. Consider că este interesant și util să prezint exemplificat, o variantă a unuia dintre procedeele menționate și anume: împărțirea expresiei date prin necunoscuta la pătrat, prin care este exprimată. Iată câteva exemple:

Să se descompună în factori:

a) $E_1 = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$, b) $E_2 = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.

c) Să se arate că polinomul: $9a^4 - 24a^3 + 34a^2 - 24a + 9$ este un pătrat perfect.

În toate aceste cazuri împărțim prin x^2 , respectiv prin a^2 ($x \neq 0$, $a \neq 0$) și obținem:

a) $x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$. Notăm $x + \frac{1}{x} = y$ și cum $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Expresia dată devine $y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)$ și înlocuind obținem $E_1 = (x^2 + 3x + 1)(x-1)^2$.

Se poate observa că putem împărți expresia prin $x-1$, ($x \neq 1$) și obținem $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x-1)(x^3 + 2x^2 - 2x - 1)$ dar $x^3 - 1 + 2x(x-1) = (x-1)(x^2 + 3x + 1) \Rightarrow x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x-1)^2(x^2 + 3x + 1)$.

b) $x^2 - 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - 6 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\left(\frac{1}{x} - x\right) - 6$. Notăm $\frac{1}{x} - x = y$, atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$ și expresia dată devine $y^2 + 3y - 4 = (y-1)(y+4)$.

Deci $E_2 = (x^2 + x - 1)(x^2 - 4x - 1)$.

c) Să arătăm că expresia $9a^4 - 24a^3 + 34a^2 - 24a + 9$ este un pătrat perfect.

Impărțind prin a^2 obținem: $9\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 24\left(a + \frac{1}{a}\right) + 34$; $a + \frac{1}{a} = y$; $a^2 + \frac{1}{a^2} = y^2 - 2 \rightarrow$
 $\rightarrow 9y^2 - 24y + 16 = \left(y + \frac{4}{3}\right)^2$.

Recomand elevilor să studieze cu atenție folosirea expresiilor $x + \frac{1}{x}$ și $x^2 + \frac{1}{x^2}$, pentru a putea sesiza obținerea lor dintr-o expresie dată.

INEGALITĂȚI

Deoarece la multe dintre concursurile de matematică (examene de treaptă, olimpiade) s-au dat inegalități, dăm câteva exerciții rezolvate din acest capitol.

Elevii trebuie să cunoască câteva tipuri de inegalități cu ajutorul cărora să poată rezolva și altele. De exemplu: fiind date numerele pozitive a , b și c să se arate că:

1) $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$.

Rezolvare. $\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq 2 \rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ deci $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$; $(a-b)^2 \geq 0$ c.c.t.d.

2) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$.

Rezolvare. Utilizăm inegalitatea $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$ sau $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$. Cum $a^2 + b^2 > \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \rightarrow a^2 - ab + b^2 > 0$.

3) $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Rezolvare. $a^2 + 1 \geq 2a$; $a^2 + 1 - 2a \geq 0$.

4) Folosind $a + \frac{1}{a} \geq 2$, să se rezolve inegalitatea: $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$.

Rezolvare. Inegalitatea se poate scrie $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \geq 6$, deci $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \geq 2 + 2 + 2 = 6$.

5) Folosind aceeași inegalitate $a + \frac{1}{a} \geq 2$, să se arate că, dacă $a + b + c = 1$ atunci

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

Rezolvare. Deoarece $a + b + c = 1 \rightarrow \frac{a}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{1}{a} \rightarrow 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{1}{a}$ sau $\frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ sau $\frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$ (vezi punctul 1).

6) Folosiți inegalitatea $a^2 + b^2 \geq ab$, pentru a rezolva inegalitățile: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq$
 $\geq ab + ac + ad + bc + bd + cd$; $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ și $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{2}$.

7) Fiind cunoscute $\frac{x+y}{2}=m_a$ (media aritmetică), $\sqrt{xy}=m_g$ (medie geometrică),

$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=m_h$ (media armonică), $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=m_p$ (media pătratică), $x,y>0$, să se arate că:

$$m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p.$$

Indicație. Să arătăm că: $\sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$ adică $m_g \geq m_h$; $\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \leq xy$, $(x+y)^2 \geq 4xy$; $(x+y)^2 - 4xy \geq 0$;
 $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0 \rightarrow (x-y)^2 \geq 0$. Similar se rezolvă și celelalte inegalități.

Aplicații.

Să se arate că:

1) $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geq 6abc$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Indicație. Se împarte totul cu abc și apoi se aplică $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

2) $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ab+ac+ad+bc+bd+cd$.

R. Folosim $a^2+b^2 \geq 2ab$; $a^2+d^2 \geq 2ad$; $a^2+c^2 \geq 2ac$; $b^2+d^2 \geq 2bd$; $b^2+c^2 \geq 2bc$;
 $c^2+d^2 \geq 2cd$. Se adună cele 6 inegalități și se obține c.t.d.

3) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca > 0$ oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Indicație. Se înmulțește inegalitatea cu 2 și se obține: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$.

4) Dacă a,b,c sînt laturile unui triunghi atunci: $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 \geq 9abc$.

Indicație. Împărțind cu abc avem, $\frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 9$ sau $\frac{b^2+c^2}{bc} + 2 + \frac{c^2+a^2}{ca} + 2 +$
 $+\frac{a^2+b^2}{ab} + 2 \geq 9 \rightarrow \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 3 \rightarrow \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 3$, dar într-un triunghi avem $\frac{b+c}{a} > 1$,
 $\frac{c+a}{b} > 1$ și $\frac{a+b}{c} > 1$ deci $b+c > a$, $c+a > b$, $a+b > c$ adunînd cele 3 inegalități obținem inegalitatea cerută.

5) Fie $f(a) = \frac{(a+5)^2 - (a-5)^2}{(2a+5)^2 + (2a-5)^2}$, să se arate că $f(a) \leq \frac{1}{2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Indicație. Efectuînd calculele obținem $f(a) = \frac{10a}{4a^2+25}$; $\frac{1}{f(a)} = \frac{4a^2+25}{10a} = \frac{2a}{5} + \frac{5}{2a}$ adică o relație de

forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \rightarrow f(a) \leq \frac{1}{2}$.

6) Să se rezolve ecuația: $\frac{x^2-6x+14}{x-3} + \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{x^2-8x+9}{x-4} + \frac{x^2+4x+10}{x+2}$ ($x \neq -1, -2, 3, 4$).

Am prezentat această ecuație, pentru că elevii sînt tentați să încerce a rezolva ecuația prin aducerea la același numitor a fracțiilor date, ceea ce ar conduce la calcule foarte greoaie și complicate.

$$R. \frac{x^2-6x+9+5}{x-3} + \frac{x^2+2x+1+1}{x+1} = \frac{x^2-8x+16-7}{x-4} + \frac{x^2+4x+4+6}{x+2}; \frac{(x-3)^2+5}{x-3} = \frac{(x-3)^2}{x-3} + \frac{5}{x-3} = x-3 + \frac{5}{x-3}.$$

Se prezintă fiecare fracție sub această formă și ecuația se rezolvă foarte ușor fără calcule laborioase.

Pentru rezolvarea cu succes a exercițiilor de algebră cu privire la fracții, voi încerca să ajut elevii, prin rezolvarea unor exerciții mai deosebite.

Exemple. Se dau expresiile:

$$a) f(x) = \frac{x+1}{4}; \quad b) f(x) = \frac{4}{x+1} \quad \text{și} \quad c) f(x) = \frac{2x+1}{x-3}.$$

Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este număr întreg?

Rezolvare. a) $f(x) = \frac{x+1}{4}$, trebuie ca $x+1$ să fie multiplu de 4, ca să putem obține $f(x)$ număr întreg $\rightarrow x+1 = M_4, x = M_4 - 1$. Să verificăm pentru $M_4 = 8$, atunci $M_4 - 1 = 8 - 1 = 7$; $f(7) = \frac{7+1}{4} = 2$ c.c.t.d.

b) $f(x) = \frac{4}{x+1}$, în acest caz $x+1$ trebuie să fie unul dintre divizorii lui 4 $\rightarrow x+1 = \pm 4 \rightarrow x = 3$ și $x = -5$; $x+1 = \pm 2 \rightarrow x = 1$ și $x = -3$; $x+1 = \pm 1 \rightarrow x = 0$ și $x = -2$. Deci $x \in \{-5, -4, -3, -2, 0, 1, 3\}$.

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ (cazul cel mai des întâlnit). Această expresie o scriem astfel $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-3+x+4}{x-3} = f(x)$ (adică scriem numitorul fracției și-l completăm ca să obținem numărătorul) $\rightarrow f(x) = \frac{x-3}{x-3} + \frac{x+4}{x-3} = 1 + \frac{x-3+7}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$ (astfel am ajuns la un exemplu asemănător cu cel din cazul b). $f(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$, $x-3$ trebuie să fie unul dintre divizorii lui 7 deci: $x-3 = \pm 7 \rightarrow x = 10$ și $x = -4$, $f(10) = 3$ și $f(-4) = 1$; $x-3 = \pm 1 \rightarrow x = 2$ și $x = 4$, $f(2) = -5$, $f(4) = 9$.

Menționez că am prezentat fracții foarte simple în care se puteau observa numerele întregi pentru $f(x)$ la o simplă privire. Există însă și cazuri mai dificile.

Să se rețină că: în primul caz când uzăm de multiplu, necunoscuta este la numărătorul fracției, în al doilea caz când folosim divizorii, necunoscuta este la numitor, iar în al treilea caz necunoscuta este și la numărător și la numitor.

Alte tipuri de probleme rezolvate. a) Se dă expresia $f(x) = \frac{3x^6 + 6x^3 + 10}{x^6 + 2x^3 + 2}$ să se determine valoarea lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x)$ este maximă. Să se afle valoarea maximă a lui $f(x)$.

Rezolvare. Se observă că $x^6 + 2x^3 + 2$ se poate pune în evidență din $3x^6 + 6x^3 + 10$ deci $f(x) = \frac{3x^6 + 6x^3 + 6 + 4}{x^6 + 2x^3 + 2} = \frac{3(x^6 + 2x^3 + 2) + 4}{x^6 + 2x^3 + 2} = \frac{3(x^6 + 2x^3 + 2)}{x^6 + 2x^3 + 2} + \frac{4}{x^6 + 2x^3 + 2} = 3 + \frac{4}{x^6 + 2x^3 + 1 + 1} = 3 + \frac{4}{(x^3 + 1)^2 + 1}$ pentru

ca numitorul fracției să fie minim trebuie ca $x^3 + 1 = 0$ deci $f(x) = 3 + \frac{4}{0+1} = 7$.

b) Se dă $f(x) = \frac{8x^2 + 2x - 3}{10x^2 - x - 2}$. Să se determine valorile naturale ale lui x pentru care $f(x)$ se simplifică.

Rezolvare. $f(x) = \frac{8x^2 - 4x + 6x - 3}{10x^2 - 5x + 4x - 2} = \frac{(4x+3)(2x-1)}{(5x+2)(2x-1)} = \frac{4x+3}{5x+2}$. Se știe din aritmetică că dacă numărătorul și numitorul unei fracții au un divizor comun atunci și diferența lor are același divizor. Exemplu: $\frac{15}{25}$ au divizor pe 5; diferența $25 - 15 = 10$ are și ea divizor pe 5. Calculăm diferența $5x+2 - 4x-3 = x-1$; eliminăm pe x și efectuăm iarăși scăderea $5(4x+3) - 4(5x+2) = 20x+15 - 20x-8 = 7 \rightarrow x-1 = M_7 \rightarrow x = M_7 + 1$. Luăm de exemplu $x = 14 + 1 = 15$.

Verificare: $\frac{4 \cdot 15 + 3}{5 \cdot 15 + 2} = \frac{63}{77}$ se simplifică prin 7.

c) Se dă $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x^4 + 3x^3 - x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 2x} = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$. $c_1)$ Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ este un număr întreg? $c_2)$ Să se arate că $f(x)$ este periodică.

Rezolvare. Pentru rezolvarea punctului $c_1)$, s-a arătat procedeul. Pentru rezolvarea punctului $c_2)$, se ține seama că pentru ca o fracție să fie periodică, numitorul fracției trebuie să fie 3 sau multiplu de 3, iar numărătorul trebuie să nu fie divizibil cu 3. În cazul de mai sus, avem $\frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3x + 2)} = \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)(x + 2)} = f(x)$. Se observă că la numitor avem un produs de trei factori – numere consecutive – care știm că este divizibil cu 3, iar $x^2 + 1$ nu este divizibil cu 3, deci $f(x)$ este periodică.

d) Să se stabilească semnul funcției: $f(x) = \frac{x - 3}{x + 2}$

Rezolvare. Aflăm rădăcina numărătorului și pe cea a numitorului: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$; $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Studiem semnul funcției de la numărător și al funcției de la numitor și apoi pe cel al funcției date.

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Deci $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (3; +\infty)$; $f(x) < 0$ pentru $x \in (-2, 3)$ și $f(x) = 0$ pentru $x = 3$.

Pentru o mai bună înțelegere a tabelului de variație a unei funcții voi mai prezenta un caz.

e) Să se rezolve inecuația: $(x + 1) \cdot (x - 2) \geq 0$.

Rezolvare. Se alcătuieste tabelul de mai jos:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$										
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+		
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+		
$(x+1)(x-2)$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+

Pentru ca să avem $(x + 1) \cdot (x - 2) \geq 0$ trebuie ca: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

În scopul orientării elevilor cu privire la rezolvarea unor ecuații a căror necunoscută sînt numere întregi consider necesar să prezint cîteva exemple.

Să se rezolve în numere întregi ecuațiile:

1) $6xy + 15x - 4y = 23$.

Rezolvare. Se studiază ecuația în sensul de a se obține un produs de factori în membrul I al ei:

$6xy+15x-4y-10-13=0 \rightarrow 6xy+15x-4y-10=13 \rightarrow 3x(2y+5)-2(2y+5)=13 \rightarrow (3x-2)(2y+5)=13 \rightarrow 3x-2=13$ și $2y+5=1$ sau $3x-2=1$ și $2y+5=13$ sau $3x-2=-13$ și $2y+5=-1$ sau $3x-2=-1$ și $2y+5=-13$. Din aceste relații se determină valorile lui x și y .

2) $x^2+y^2+z^2=9$.

Rezolvare. $x^2 \leq 9 \rightarrow x \in [-3,3]$; $x \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1\}$. Pentru $x = \pm 2$, avem $4+y^2+z^2=9$; $y^2+z^2=5$; $y^2 \leq 5 \rightarrow y \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$ și procedeul continuă.

3) $2x^2+y^2+2y+1=0$.

Rezolvare. Scriem $+1=3-2$; $2x^2+y^2+2y+3=2$; $x^2+x^2+y^2+2y+1+1+1-2x+2x=2$ (am adăugat și scăzut $2x$).

Deoarece $y^2+2y+1=(y+1)^2$, ne orientăm cum să descompunem și ceilalți termeni ca să putem obține pătrate perfecte.

$$\begin{array}{ccccccc} (x-1)^2 & + & (y+1)^2 & + & (x+1)^2 & = & 2 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & = & 2 \\ 1 & + & 0 & + & 1 & = & 2 \\ 1 & + & 1 & + & 0 & = & 2 \end{array}$$

luăm toate cazurile posibile.

4. Să se determine rădăcinile întregi ale ecuației $2x+3y-3=0$ în cazul când $x \in [-3;6]$ și $y \in [-1;5]$.

Rezolvare. $3y=3-2x$; $y=\frac{3-2x}{3}=1-\frac{2x}{3}$. Pentru ca y să fie număr întreg trebuie ca x să fie multiplu de $3 \rightarrow x \in \{-3;0;3;6\}$.

5. Se dau ecuațiile:

a) $x^3-xy+y=13$; b) $xy-4x-3y+11=0$; c) $-15x^2+11xy-2y^2=11$, x și y numere întregi.

Să se determine x și y .

Rezolvare. a) $x^3-xy+y-1=12 \rightarrow (x-1)(x^2+x+1)-y(x-1)=12$; $(x-1)(x^2+x+1-y)=12 \rightarrow x-1=1$ deci $x=2$ și $x^2+x+1-y=12$; $x-1=3$ deci $x=4$ și $x^2+x+1-y=4$. Se iau toți divizorii lui 12 și se obțin mai multe soluții. b) Se scrie $11=12-1$; $xy-4x-3y+12=1$; $x(y-4)-3(y-4)=1$; $(y-4)(x-3)=1 \rightarrow x-3=1$ deci $x=4$ și $y-4=1$ deci $y=5$ etc. c) Scriem $11xy=5xy+6xy \rightarrow -15x^2+5xy+6xy-2y^2=11$; $5x(y-3x)+2y(3x-y)=11$; $(y-3x)(5x-2y)=11 \rightarrow y-3x=1$; $5x-2y=11$. Se obține $x=-13$, $y=-38$ etc.

6. Să se rezolve sistemele ($x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$):

$$\text{a) } \begin{cases} xy+x+y=11 \\ x^2y+y^2x=30 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \end{cases}$$

Rezolvare. a) $x+y=11-xy$; $xy(x+y)=30 \rightarrow xy(11-xy)=30 \rightarrow 11-xy=5$; $xy=6 \rightarrow x=2$; $y=3$ sau $x=3$, $y=2$.

b) Scriem $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6}$ se înmulțesc ecuațiile și obținem $(x+y)^2=25$; $x+y=\pm 5$. Se formează mai multe sisteme și se obțin soluțiile: (1;5); (5;1); (2;3); (3;2).

7. Se dă funcția: $f(x)=\frac{2x^{k+1}+x^k+2x+1}{x^{k+1}+x^k+x+1}$; $k \in \mathbb{N}$.

a) Să se aducă $f(x)$ la forma ireductibilă.

$$\text{Rezolvare. } f(x)=\frac{2x^k \cdot x + x^k + 2x + 1}{x^k \cdot x + x^k + x + 1} = \frac{x^k(2x+1) + 2x + 1}{x^k(x+1) + x + 1} = \frac{(x^k+1)(2x+1)}{(x^k+1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

b) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este număr întreg?

Rezolvare. $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{x}{x+1} \rightarrow x=0; f(x)=1.$

c) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este negativă?

Rezolvare.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	- - - - -	- - - - -	0	+ + + + +
$x+1$	- - - - -		+ + + + +	+ + + + +
$\frac{2x+1}{x+1}$	+ + + + +		- - - - -	0 + + + + +

$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ este ireductibilă dacă $x \neq 0$.

Dacă x este par, $2x+1$ este impar și de asemenea $x+1$ este impar și fracția nu se simplifică. La fel și pentru x impar.

PROBLEME DIVERSE

1. Fie f și g două funcții liniare. Determinați funcțiile și reprezentați grafic funcțiile știind că:

$$2f(x+1) + g(x-1) = 2x + 14;$$

$$f(x+1) - 2g(x-1) = 6x - 18, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. $4f(x+1) + 2g(x-1) = 4x + 28$ (am înmulțit prima relație cu 2);

$$f(x+1) - 2g(x-1) = 6x - 18.$$

Deci $5f(x+1) = 10x + 10 \rightarrow f(x+1) = 2x + 2$ și $g(x-1) = -2x + 10$.

Deoarece $f(x)$ este funcție de gradul I, ea se scrie: $f(x) = ax + b$ deci $f(x+1) = a(x+1) + b = 2x + 2$; $ax + a + b = 2x + 2$, $ax = 2x \rightarrow a = 2$, $a + b = 2$, $b = 0$, deci $f(x) = 2x$.

$$g(x-1) = -2x + 10; \quad ax - a + b = -2x + 10; \quad ax = -2x; \quad a = -2; \quad -a + b = 10; \quad 2 + b = 10 \rightarrow b = 8, \text{ deci } g(x) = -2x + 8.$$

2. Fie $f(x) = \frac{6x^4 + 13x^3 + 15x^2 - 25x}{2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 10x}$, să se arate că nu există $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x) \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare. Se obține $f(x) = \frac{(6x-5)(x^2+3x+5)}{2(x-1)(x^2+3x+5)}$. Cum numărătorul nu se împarte la $x-1$ și nici la 2, ca $f(x)$

să se simplifice, ar trebui ca numărătorul să se împartă la x^2+3x+5 și se împarte. Putem folosi direct algoritmul lui Euclid însă este mai greoi.

$$\text{Se obține } f(x) = \frac{6x-5}{2x-2} = 3 + \frac{1}{2x-2} \rightarrow 2x-2=1 \rightarrow 2x=3 \text{ deci } x=\frac{3}{2}; \quad 2x-2=-1 \rightarrow 2x=1 \text{ deci } x=\frac{1}{2}.$$

3. Pentru ce valori ale lui m , funcția $f(x) = (m-2)x + m$ este crescătoare, descrescătoare, constantă?

Rezolvare.

$$m-2 > 0 \rightarrow m > 2, \quad f(x) \text{ este crescătoare pentru } m \in (2; +\infty);$$

$$m-2 < 0 \rightarrow m < 2, \quad f(x) \text{ este descrescătoare pentru } m \in (-\infty; 2);$$

$$m-2 = 0 \rightarrow m = 2, \quad f(x) \text{ este constantă.}$$

4. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped drept este 48 m, iar diagonala este $5\sqrt{2}$ m . Să se afle aria totală a paralelipipedului.

Rezolvare.

$$\begin{cases} 4x+4y+4z=48, \\ x^2+y^2+z^2=(5\sqrt{2})^2 \end{cases} \rightarrow x+y+z=12; (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=144, x^2+y^2+z^2=(5\sqrt{2})^2=50$$

$$\rightarrow 50+2(xy+yz+zx)=144 \rightarrow 2(xy+yz+zx)=94 \text{ care este aria totală.}$$

5. Fie $P(x)=x^3-x^2+x-1$, să se scrie trei polinoame care îl divid în afară de cel dat.

Rezolvare.

$$x^2(x-1)+x-1=(x^2+1)(x-1); \quad x^2+1=x^2+1+2x-2x=(x+1)^2-(\sqrt{2x})^2=(x+1-\sqrt{2x})(x+1+\sqrt{2x}).$$

$$P(x)=(x-1)(x+1-\sqrt{2x})(x+1+\sqrt{2x}).$$

6. Descompuneți în factori: a) $16x^9 + \frac{1}{4}$ și b) $x^3 + 2x^2(x-1) - 1$.

Rezolvare. a) $16x^9 + \frac{1}{4} = \frac{64x^9 + 1}{4} = \frac{(4x^3)^3 + 1}{4} = \frac{(4x^3+1)(16x^6-4x^3+1)}{4}$; b) $x^3 + 2x^2(x-1) - 1 = x^3 - 1 + 2x^2(x-1) =$

$$= (x-1)(x^2+x+1) + 2x^2(x-1) = (x-1)(x^2+x+1+2x^2) = (x-1)(3x^2+x+1).$$

7. Determinați valorile lui m și n știind că polinoamele $5x^2y + mxy^2 - xy^2 + 2xy$ și $-x^2y + 3xy^2 + 2xy + nx^2y$ au aceeași formă canonică.

Rezolvare. Comparăm cele două polinoame: $5x^2y + mxy^2 - xy^2 + 2xy = -x^2y + 3xy^2 + 2xy + nx^2y$ \rightarrow

$$\begin{cases} 5x^2y + x^2y = nx^2y, \\ 3xy^2 + xy^2 = mxy^2 \end{cases} \rightarrow 6x^2y = nx^2y \rightarrow n=6; \quad 4xy^2 = mxy^2 \rightarrow m=4.$$

8. Fie $f(x) = \frac{(4x+1)(2x^2-2x+1)}{(2x-1)(2x^2-2x+1)}$.

a) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este număr întreg ?

b) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este negativ ?

Rezolvare. a) $\frac{4x+1}{2x-1} = 2 + \frac{3}{2x-1}$, deci pentru $x=2$, $f(x)=3$ și pentru $x=1$, $f(x)=5$. b) Pentru $x \in (-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$.

9. Să se deducă relațiile între a și b din egalitățile: $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} = a$ și $xy = b$.

Rezolvare. $x^2+1=ax \rightarrow x^2-ax+1=0$, $y^2+1=ay \rightarrow y^2-ay+1=0$, deci $x=y$ și $x^2y^2=(ax-1)^2$, $b^2=(ax-1)^2$;

$$b=ax-1; \quad ax=b+1; \quad x=\frac{b+1}{a}; \quad y=\frac{b+1}{a}; \quad b=\frac{(b+1)^2}{a^2}.$$

10. Se dă fracția: $f(x) = \frac{4x^3-32}{x^3+(x+2)^3}$. a) Arătați că ea se mai poate scrie sub forma

$2 - \frac{6}{x+1}$. b) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este număr întreg? c) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ este negativ?

Rezolvare. a) $\frac{4x^3-32}{x^3+(x+2)^3} = \frac{4(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1+x-5}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x-5}{x+1} = 1 + \frac{x-5}{x+1} = 1 + \frac{x+1-6}{x+1} =$

$$= 1 + \frac{x+1}{x+1} - \frac{6}{x+1} = 2 - \frac{6}{x+1} \quad \text{c.c.t.d. b) Pentru ca } f(x) = 2 - \frac{6}{x+1} \text{ să fie număr întreg trebuie ca } x+1 = \pm 6;$$

$$x+1 = \pm 1; x+1 = \pm 2; x+1 = \pm 3 \text{ (divizorii lui 6). c) Pentru } x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

11. Suma mai multor numere naturale consecutive este 30. Să se afle aceste numere. Câte soluții sînt? Pot fi numere formate din două cifre?

Rezolvare. Numerele fiind consecutive, un număr par + unul impar este număr impar dar suma lor este 30 număr par deci nu pot fi două numere.

$$x + (x+1) + (x+2) = 30 \rightarrow x = 9 \text{ iar numerele sînt } 9, 10, 11.$$

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 30 \rightarrow x = 6 \text{ iar numerele sînt } 6, 7, 8, 9.$$

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 30. \text{ Deci numerele sînt } 4, 5, 6, 7, 8.$$

12. Să se determine toate numerele naturale $\neq 0$ care au proprietatea: $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

Rezolvare. $x^2 < 14 \rightarrow x < 4$, x poate fi 3, 2 sau 1 cum 2 și 1 nu verifică \rightarrow că numărul este 3. $x = 3 \rightarrow x^2 = 9$; $9 + y^2 + z^2 = 14 \rightarrow y^2 + z^2 = 5$; $y^2 < 5 \rightarrow y = 2$ sau $y = 1$. Obținem tripletele (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1).

VII. PROBLEME DE GEOMETRIE REZOLVATE DATE LA CONCURSURI

1. Fie triunghiul dreptunghic ale cărui catete sînt b și c , iar înălțimea h . a) Să se arate că: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. b) Să se arate că dacă triunghiul dat are un unghi de 15° atunci înălțimea dusă din unghiul drept pe ipotenuză este $\frac{1}{4}$ din ipotenuză c) Să se calculeze raza cercului înscris triunghiului ABC cunoscînd ipotenuza și catetele. Dacă se dă ipotenuza de 10 cm și raza de 2 cm să se afle catetele.

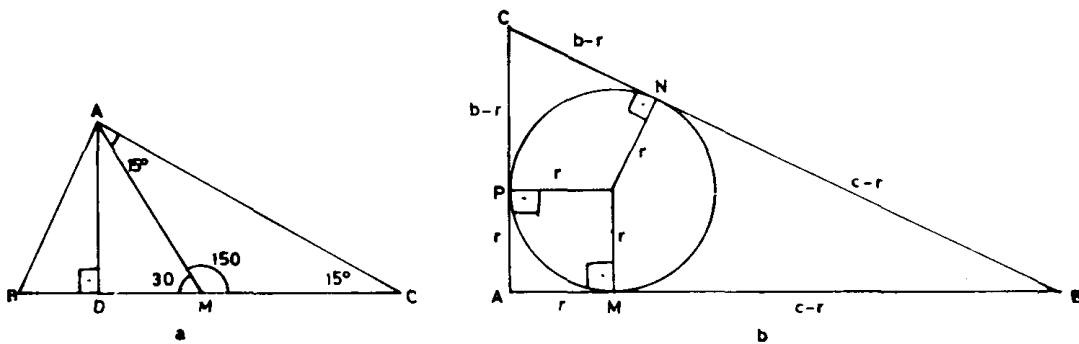


Fig. VII.1

Rezolvare. a) Triunghiul fiind dreptunghic avem: $c^2b^2 = (b^2+c^2)h^2 \rightarrow h^2 = \frac{c^2b^2}{b^2+c^2} \rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{c^2b^2} \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2}{c^2b^2} + \frac{c^2}{c^2b^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$ b) Vezi figura VII.1. AM fiind mediană rezultă că $\triangle AMC$ isoscel deci
 $m(\angle AMC) = 150^\circ \rightarrow m(\angle AMD) = 30^\circ$ deci $AD = \frac{1}{2} AM$, dar $AM = \frac{1}{2} BC \rightarrow AD = \frac{1}{4} BC$. c) $b^2+c^2 =$
 $= a^2 \rightarrow b+c = 2r+a \rightarrow r = \frac{b+c-a}{2}$.

Caz particular: $BC=10\text{cm}$; $r=2\text{ cm}$. $x^2+y^2=100$ și $x+y=10+4$. Dar $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$; $196-2xy=$
 $=100 \rightarrow xy=48$ și cum $x+y=14$, obținem $x=8, y=6$.

2. Triunghiul ABC are măsura unghiului cu vârful în B dublul măsurii unghiului cu vârful în C . a) Cât de mare poate fi măsura unghiului C ? b) Să se arate că bisectoarea unghiului B și mediatoarea laturii BC sînt concurente în punctul D , ce aparține laturii AC . c) Ce fel de triunghi este ABC , dacă $[AD] \equiv [DE]$? (E este mijlocul lui BC .)

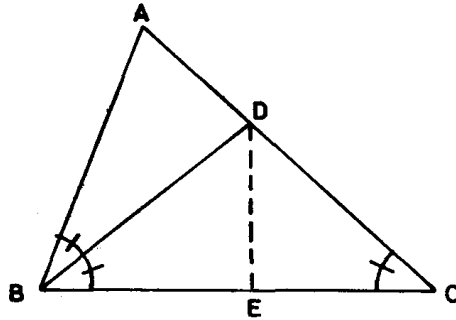


Fig. VII.2

Rezolvare. a) Avem $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$, dar prin ipoteză $m(\angle B) = 2m(\angle C)$ atunci $m(\angle A) + 3m(\angle C) = 180^\circ$, deci $3m(\angle C) < 180^\circ$ sau $m(\angle C) < 60^\circ$. b) Triunghiul BDC fiind isoscel rezultă că mediatoarea (fig VII.2) bazei BC trece prin vârful D . Deci, bisectoarea BD , mediatoarea ED și AC sînt concurente în D . c) Punctul D se află pe bisectoarea unghiului B . Deoarece DE este distanța lui D la latura BC și în plus avem condiția $[DE] \equiv [AD]$ rezultă că $DA \perp AB$. Deci triunghiul ABC trebuie să fie dreptunghic în A .

3. Fie $ABCD$ [$m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$] un trapez dreptunghic cu baza mare AB congruentă cu diagonala mică AC și baza mică DC congruentă cu înălțimea trapezului. a) Să se arate că perpendiculara în C pe BC este bisectoarea unghiului ACD . b) Fie L intersecția bisectoarei unghiului ACD cu AD . Să se arate că triunghiul BCL este isoscel.

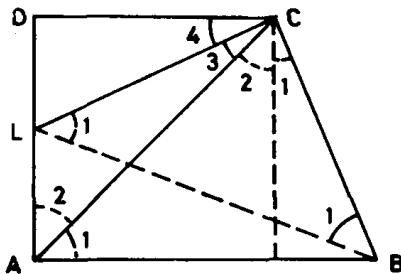


Fig. VII.3

Rezolvare. a) Construim $CL \perp CB$, avem $m(\angle BCL) = 90^\circ$. Ducem $CM \perp AB$ (fig. VII.3). Figura $AMCD$ este un pătrat; deci $m(\angle DCM) = 90^\circ$. Triunghiul ABC este isoscel deoarece $[AB] \equiv [AC]$ (prin ipoteză). Avem $m(\angle A_1) = 45^\circ$, $m(\angle ABC) = 67^\circ 30'$, $m(\angle MCB) = 90^\circ - m(\angle MBC) = 90^\circ - 67^\circ 30' = 22^\circ 30'$. Din $m(\angle C_1) + m(\angle C_2) + m(\angle C_3) = 90^\circ$, deducem că $m(\angle C_3) = 20^\circ 30'$, iar din $m(\angle C_2) + m(\angle C_3) + m(\angle C_4) = 90^\circ$, deducem că $m(\angle C_4) = 22^\circ 30'$. Rezultă că $m(\angle C_3) = m(\angle C_4)$.

4. Fie $ABCD$ un trapez (AB baza mare, DC baza mică,) avînd $AB = 10$ cm, $BC = CD = 3,75$ cm, $AD = 5$ cm. Fie E și F respectiv picioarele înălțimilor duse din D și C . Se prelungească laturile neperpendiculare, notînd cu I intersecția lor. Să se arate că AD și BC sînt perpendiculare, că $\frac{AD}{BC} = \frac{CF}{BF}$ și că $DE^2 = AE \cdot BF$.

Rezolvare. Ducem din D o paralelă la CB și notăm cu G intersecția ei cu AB ; obținem rombul $BCDG$ (fig VII.4) deci $DG = 3,75$ cm, $GB = 3,75$ cm și $AG = 6,25$ cm. Triunghiul ADG fiind dreptunghic, conform

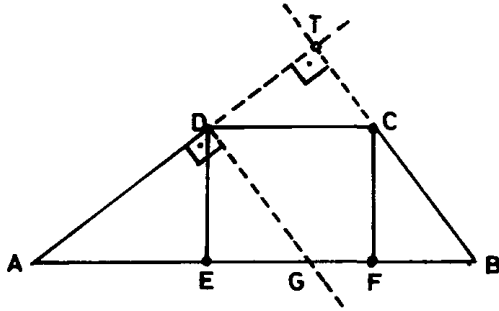


Fig. VII.4

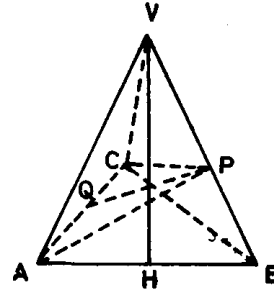


Fig. VII.5

reciprokei teoremei lui Pitagora, rezultă că $AD \perp DG$; dar $DG \parallel BC$, prin construcție. Avem $AD \perp BC$. Triunghiurile BCF și DAE sînt asemenea, deoarece sînt dreptunghice și au $m(\angle BCF) = m(\angle DAE)$ (ca unghiuri cu laturile perpendiculare: $BC \perp AD$, $CF \perp AE$). Rezultă $\frac{BC}{AD} = \frac{CF}{AE} = \frac{BF}{DE}$. Luînd $\frac{CF}{AE} = \frac{BF}{DE}$ și ținînd seama că $[CF] \equiv [DE]$, avem $DE^2 = AE \cdot BF$. Considerînd $\frac{BC}{AD} = \frac{BF}{DE}$ și înlocuind $DE = CF$, obținem $\frac{BC}{AD} = \frac{BF}{CF}$; deci $\frac{AD}{BC} = \frac{CF}{BF}$.

5. Se consideră piramida regulată $VABC$ avînd $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA] = a$ și $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC] = b$, ($b > a$). Se notează cu P proiecția vîrfului A pe muchia VB . Să se calculeze: a) aria triunghiului PAC ; b) volumul tetraedului $PAVC$.

Rezolvare. a) Triunghiurile isoscele VAB și VBC sînt congruente (fig.VII.5). De aceea $CP \perp BV$; $[CP] \equiv [AP]$. Rezultă că muchia VB este perpendiculară pe planul APC . Fie VH înălțimea triunghiului VAB , găsim $VH = \sqrt{(VA)^2 - (AH)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Scriind aria triunghiului VAB în două moduri diferite deducem:

$$AP = \frac{AB \cdot VH}{VB} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}. \text{ Fie } PQ \text{ înălțimea triunghiului isoscel } PAG. \text{ Obținem: } PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \frac{a}{2b} \sqrt{3b^2 - a^2} \text{ și deci Aria } \Delta PAC = \frac{1}{2}, AC \cdot PQ = \frac{a^2}{4b} \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

b) Deoarece $VB \perp (APC)$, segmentul VP este înălțime în piramida $PAVC$. Găsim

$$PV = \sqrt{AV^2 - AP^2} = \frac{2b^2 - a^2}{2b} \text{ și deci vol } (PAVC) = \frac{1}{24} \cdot \frac{a^2(2b^3 - a^2)}{b^2} \sqrt{3b^2 - a^2}$$

6. Se dă $\triangle ABC$ cu aria 96 cm^2 . Laturile sale sînt proporționale cu 3, 4, 5. Fie N mijlocul laturii AC și $MN \perp BC$, $N \in AC$. Se cer: a) laturile $\triangle ABC$; b) raza cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC ; c) volumul piramidei V_{ABC} , știind că $m(\angle VBC) = 120^\circ$ și muchiile $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC]$.

Rezolvare. a) Aria $\triangle ABC = 96 \text{ cm}^2$, aria $\triangle ABM = \text{aria } \triangle AMC$ (fig. VII.6). Aria $\triangle MNC$ este de 4 ori mai mică decât aria $\triangle ABC$ (s-a micșorat baza de două ori, deci aria $\triangle MNC$ este de 4 ori mai mică) $96:4 = 24 \text{ cm}^2$. Dar cum laturile $\triangle ABC$ sînt proporționale cu 3, 4, 5 \rightarrow \rightarrow că laturile lui sînt $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$; $4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$; $4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$.

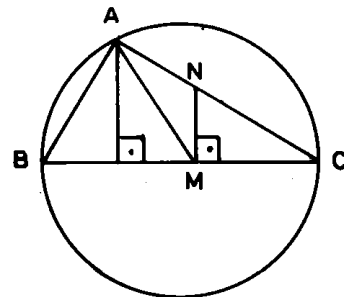


Fig. VII.6

b) $r = \frac{2 \cdot 96 \text{ cm}}{48} = 4 \text{ cm}$, $R = \frac{BC}{2} = 100 \text{ cm}$; c) ΔVBC este isoscel cu unghiul de 120° , $x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} = 100 \Rightarrow 3x^2 = 400 \Rightarrow x^2 = \frac{400}{3} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow VM = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ deci volumul piramidei este

$$V_{VABC} = \frac{96 \cdot 10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{96 \cdot 10\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^3.$$

7. Fie piramida $VABC$ cu baza triunghiul dreptunghic ABC [$m(\angle A) = 90^\circ$], în care unghiul $m(\angle B) = 2m(\angle C)$. Bisectoarea unghiului B intersectează pe AC în punctul D , $DE \perp BC$, $E \in BC$, $BC = 2a$. Să se afle aria laterală și volumul piramidei $VABC$, știind că $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC]$ și $VB = 2a$.

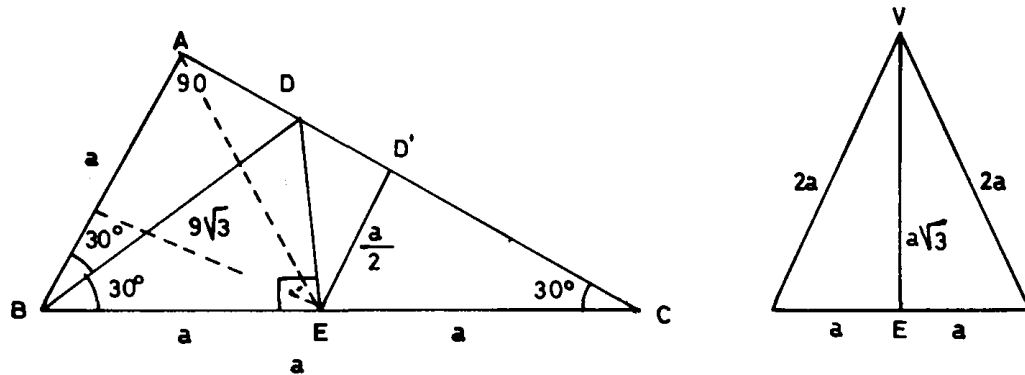


Fig. VII.7

Rezolvare. ΔBDC isoscel, $DE \perp BC$, dar D este pe bisectoarea $BD \Rightarrow [DE] \equiv [AD]$; $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle C) = 30^\circ$; $m(\angle B) = 60^\circ$ (fig. VII.7). Știm că $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC]$, $[AE] \equiv [EC] \equiv [BE] = R$ (raza cercului circumscris ΔABC ; (E este mijlocul lui BC)). $DE \perp BC$ în Δ isoscel $BDC \rightarrow$ înălțimea piramidei este $VE = a\sqrt{3}$. Aria laterală și volumul se află imediat

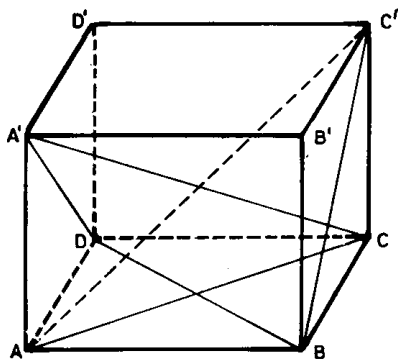


Fig. VII.8

8. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Dacă perpendicularele din B, D și A' pe diagonala AC' sînt concurente în $U \in AC'$, atunci paralelipipedul este un cub.

Rezolvare. În triunghiurile dreptunghice: ABC' , $AA'C$ și ADC avem respectiv (fig. VII.8) $AB^2 = AU \cdot AC'$; $A'A^2 = AU \cdot AC'$ și $AD^2 = AU \cdot AC' \rightarrow$ că $[AB] \equiv [A'A] \equiv [AD]$.

9. Un paralelipiped are toate muchiile egale cu a și toate fețele romburi cu un unghi de 60° . Să se calculeze volumul paralelipipedului.

Rezolvare. $AA'B'B$ romb cu 60° (fig.VII.9); $A'AB$ triunghi echilateral, $\Delta A'AB$ fiind echilateral,

$$A'N = \text{înălțime} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AN = \frac{a}{2}, \quad AO = 2x \text{ și } NO = x,$$

$$m(\angle OAN) = 30^\circ, \quad AO^2 - ON^2 = \frac{a^2}{4}; \quad 4x^2 - x^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{12}; \quad x = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow AO = 2x = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$A'A^2 - AO^2 = A'O^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow A'O = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^3.$$

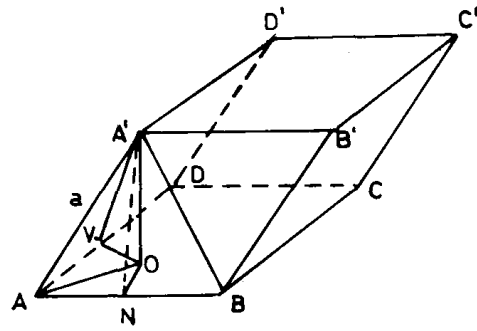


Fig. VII.9

10. Să se arate că suma distanțelor oricărui punct interior la fețele tetraedrului regulat $VABC$ este constantă.

Rezolvare. În cazul unui triunghi echilateral ABC suma distanțelor dintr-un punct luat în interiorul triunghiului la laturile sale este constantă:

Aria $\Delta ABC = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{\ell h_1}{2} + \frac{\ell h_2}{2} + \frac{\ell h_3}{2} \Rightarrow \ell h = \ell(h_1 + h_2 + h_3) \Rightarrow H = h_1 + h_2 + h_3$, unde B este baza triunghiului, H înălțimea sa, ℓ latura și h_1, h_2, h_3 distanțele de la punct la laturile triunghiului. În cazul nostru, volumul tetraedrului este: $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{Bh_1}{3} + \frac{Bh_2}{3} + \frac{Bh_3}{3} + \frac{Bh_4}{3}$, unde B este aria bazei, H înălțimea tetraedrului iar h_1, h_2, h_3 și h_4 distanțele de la un punct de pe înălțime la fețele tetraedrului. $BH = B(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$ deci suma distanțelor $h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ este constantă.

11. Fie Ox, Oy, Oz trei semidrepte în spațiu astfel ca unghiurile dintre aceste semidrepte să fie de 60° . a) Să se arate că una dintre semidrepte are ca proiecție un segment pe bisectoarea celorlalte două. b) Fie A un punct pe Oz . Notînd $OA = a$ și cu A' proiecția lui A pe planul bazei, să se calculeze AA' .

Rezolvare. a) Din A ducem perpendicularele AD și AE pe Ox și Oy . (fig.VII.10). Se formează două triunghiuri dreptunghice congruente. Punctul A se proiectează pe bisectoarea OA' . În $\Delta OA'D$ avem $OD = \frac{a}{2}$. Il determinăm pe OA' : notăm $A'D = x$, deci

$$4x^2 - x^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow 12x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Avem } OA' = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad \text{b) În}$$

$\Delta OAA'$ dreptunghic în A' , avem $A'A^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$, deci

$$AA' = a \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

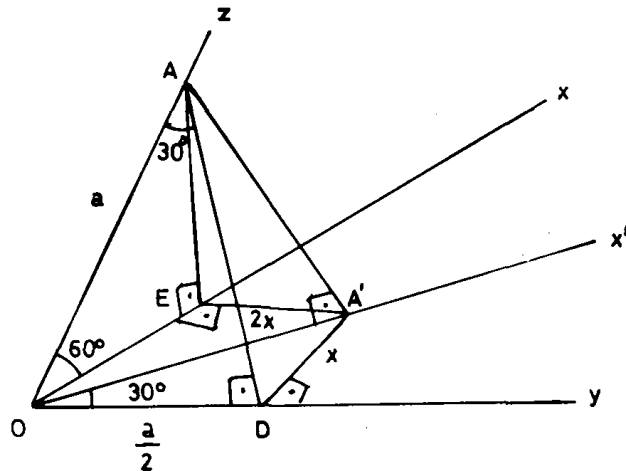


Fig. VII.10

12. Demonstrați că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația: $\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} = 0$ este isoscel.

Rezolvare. $bc(c-b) + ac(a-c) + ab(b-a) = 0 \Rightarrow c^2(b-a) - c(b-a)(b+a) + ab(b-a) = 0 \Rightarrow (b-a)(c^2 - cb -$
 $-ac + ab) = (b-a) \cdot [c(c-b) - a(c-b)] = (b-a)(c-b)(c-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b-a=0 \text{ deci } b=a \text{ sau} \\ c-b=0 \text{ deci } c=b \text{ sau} \\ c-a=0 \text{ deci } c=a \end{cases}$

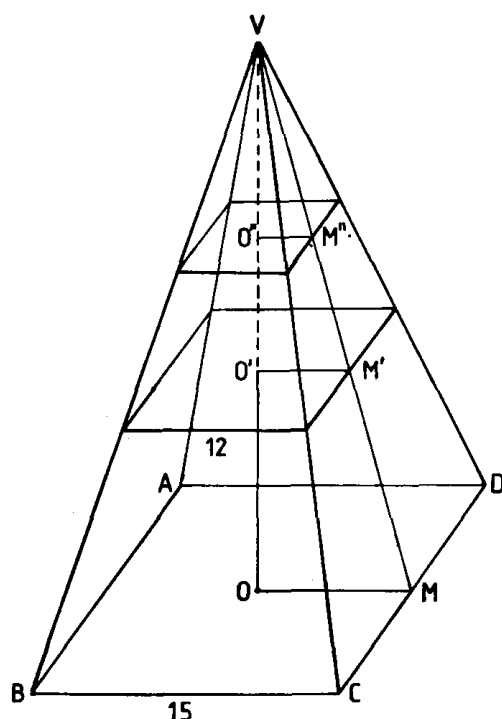


Fig.VII.11

13. Volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este de 7 ori mai mare decât volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 7 dm, lățimea de 40 cm și înălțimea de 0,3 m. Înălțimea trunchiului de piramidă este de 4 dm, iar latura bazei mici este de 2,25 ori mai mare decât înălțimea. Să se afle: a) volumul trunchiului; b) latura bazei mari; c) aria laterală a trunchiului; d) la ce distanță de planul bazei mari trebuie făcută o secțiune paralelă cu bazele astfel ca aria acestei secțiuni să fie 144 dm^2 .

Rezolvare. a) $V = 7 \cdot 84 \text{ dm}^3$; $\frac{4}{3}(\ell^2 + 81 + \sqrt{\ell^2 \cdot 81}) =$
 $= 588 \text{ dm}^3$; $\ell^2 + 81 + 9\ell = 441$; $\ell^2 + 9\ell - 360 = 0 \Rightarrow \ell =$
 $= 15 \text{ dm}$ (fig.VII.11); d) Fie $VO'' = y$, $O'O = x$, atunci
 din $\Delta VO''M'' \sim \Delta VO'M'$ și $\Delta VO'M' \sim \Delta VOM$
 obținem: $\frac{y}{y+4-x} = \frac{9}{12}$ și $\frac{y+4-x}{y+4} = \frac{12}{15} \Rightarrow y = 12 - 3x$ și
 $5x = y + 4$. Deci $x = 2$ și $y = 6$.

14. O prismă dreaptă are baza un trapez dreptunghic ABCD cu diagonala $AC \perp BC$; $BC = 10 \text{ cm}$. Linia mijlocie MN a trapezului intersectează diagonalele în P și Q, $PQ = 4 \text{ cm}$. Înălțimea prisme este de 10 cm. Să se calculeze volumul prisme.

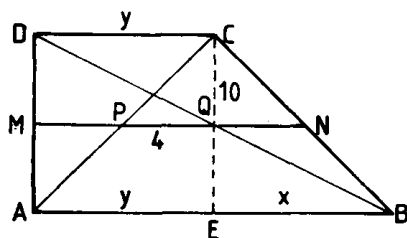


Fig.VII.12

Rezolvare. $MN = \frac{x+2y}{2}$ (fig.VII.12); $PQ = MQ - MP =$
 $\frac{x+y}{2} - \frac{y}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 4$ deci $x = 8$. În ΔBCE avem: $CE^2 = 100 - 64 =$
 $= 36$; $CE = 6 \text{ cm}$. În ΔABC dreptunghic, aplicăm teorema
 înălțimii $6^2 = x \cdot AE$ deci $36 = 8 \cdot AE$; $AE = y = \frac{36}{8} = 4,5 \text{ cm}$;
 $AB = 4,5 + x = 12,5 \text{ cm}$. $DC = 4,5 \text{ cm}$.

Volumul este: $V = \frac{(12,5 + 4,5) \cdot 6}{2} \cdot 10 = 510 \text{ cm}^3$.

15. Într-un cerc de rază R se înscrie un triunghi dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$. Arcele AC și AB sînt invers proporționale cu numerele 1,(3) și 0,(6). Pe perpendiculara ridicată în A se ia segmentul $AV = \frac{3R}{2}$. (fig.VII.13). Să se afle: a) măsura arcelor AC și AB ; b) aria ΔVBC c) unghiul dintre planele VBC și ABC .

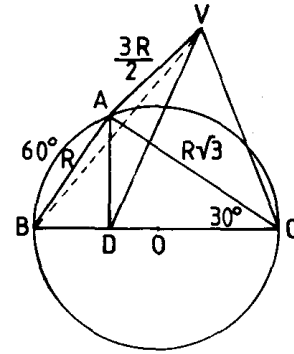


Fig.VII.13

Rezolvare. 1,(3) = $1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; 0,(6) = $\frac{2}{3}$. Numerele inverse sînt: $\frac{3}{4}$ și $\frac{3}{2}$. $\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{3}{3}} = \frac{x+y}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$ și $y = 120^\circ$. b) Aria $\Delta VBC = \frac{2R \cdot VD}{2}$;

(fig.VII.13); $AD = \frac{R \cdot R\sqrt{3}}{2R} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. În ΔVAD , dreptunghic în A , aplicăm teorema lui Pitagora:

$$VD = \sqrt{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = R\sqrt{3}. \text{ Aria } \Delta VBC = R^2\sqrt{3}. \text{ c) } \operatorname{tg} \angle D = \frac{AV}{AD} = \frac{\frac{3R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle D = 60^\circ.$$

16. O prismă oblică are ca bază un triunghi echilateral ABC cu $AB = 4$ cm. Fața $CBB'C'$ este un romb cu un unghi de 60° și este perpendiculară pe bază. Se cer volumul și aria totală a prisme.

Rezolvare. $\Delta C'CB$ este echilateral și congruent cu ΔABC (fig.VII.14). $C'H^2 = 12 \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}$ cm. $V = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 24$ cm³.

Aria totală este formată din ariile a două triunghiuri echilaterale, două poligoane de arii egale și aria rombului dat. Aplicînd teorema celor trei perpendiculare obținem:

$C'H \perp HG$, $HG \perp AC \Rightarrow C'G \perp AC$. Deci $GH^2 = HC^2 - GC^2 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ cm. Înălțimea în $AA'C'C$ este: $C'G = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}$ cm.

Aria totală = $2(4\sqrt{15}) + 2(4\sqrt{3}) + 4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{15} + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}(2 + \sqrt{5})$ cm².

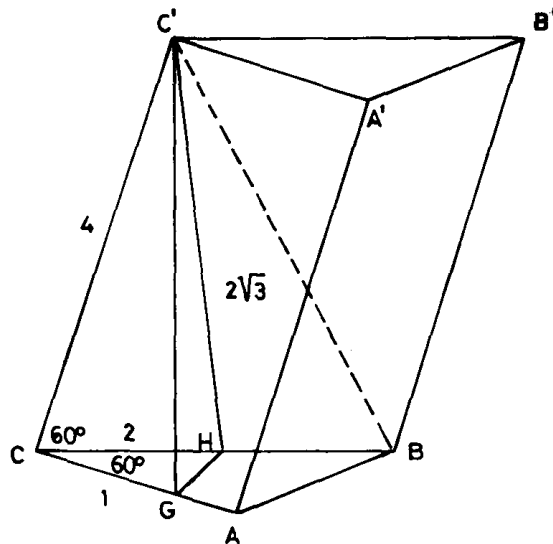


Fig.VII.14

17. Fie $OABC$ o piramidă triunghiulară cu muchiile OA , OB , OC perpendiculare două câte două și cu $OA = 30$; $OB = 40$; $OC = 70$.

Să se determine distanța d de la vîrfurile O la planul ABC , $O \notin (ABC)$ (fig.VII.15, pag.322).

Rezolvare. Luăm ca bază ΔOAB și OC înălțimea piramidei (1) $V = \frac{40 \cdot 30}{2} \cdot 70 \cdot \frac{1}{3} = \frac{A_{\Delta OAB} \cdot d}{3}$.

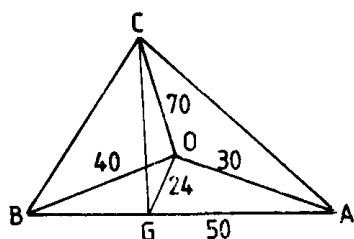


Fig. VII.15

$OG = 24$, $CG = \sqrt{70^2 + 24^2}$. Aria $\triangle ABC = \frac{AB \cdot CG}{2}$. Din egalitatea (1) se determină d .

18. O piramidă are baza $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 2a$, $BC = a$ și înălțimea $SD = 2a$ (fig. VII.16). Pe muchia SB se ia la mijlocul ei punctul P . a) Să se arate că $\triangle APC$ este isoscel și să se afle aria sa. b) Să se afle aria laterală a piramidei.

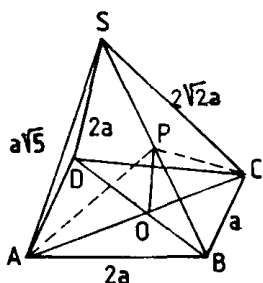


Fig. VII.16

Rezolvare. a) Aplicând teorema celor trei perpendiculare, obținem: $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ triunghiuri dreptunghice cu aceeași ipotenuză. Cum AP și PC sînt mediane în triunghiuri congruente obținem că $\triangle APC$ este isoscel. În $\triangle SBD$, PO este linie mijlocie, deci $PO = a$. În concluzie: $A_{\triangle APC} = \frac{PO \cdot AC}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$; b) $A_{\triangle SDC} = \frac{2a \cdot 2a}{2} = 2a^2$; $A_{\triangle SCB} = \frac{a \cdot 2a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}$; $A_{\triangle SAD} = \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$, $A_{\triangle SAB} = \frac{2a \cdot a\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}a^2$. Aria laterală este $(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2})a^2$.

19. O piramidă are muchiile laterale congruente și ele formează cu planul bazei unghiuri de 45° . Baza este un trapez isoscel cu un unghi de 60° iar bazele trapezului sînt de 6 cm și 8 cm. Să se determine: a) raza cercului circumscris trapezului; b) volumul piramidei.

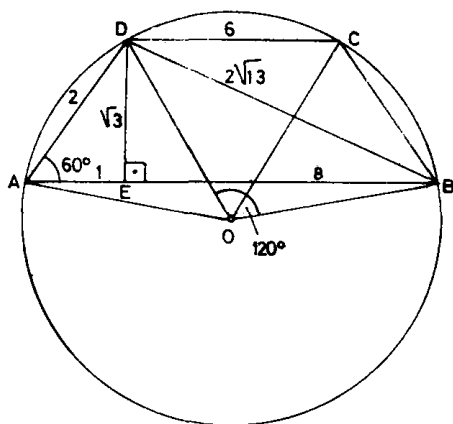


Fig. VII.17.

Rezolvare. a) Cercul are centrul la intersecția mediatoarelor laturilor trapezului (fig. VII.17). Cum $m(\angle DAB) = 60^\circ$ atunci $m(\angle BOD) = 120^\circ$. În $\triangle ADE$ dreptunghic în E , avem $AD = 2$, $AE = 1$, $DE = \sqrt{3}$.

În $\triangle DEB$, dreptunghic în E , avem $BD = \sqrt{DE^2 + EB^2} = 2\sqrt{13}$. Aplicînd o consecință a teoremei lui Pitagora generalizată și anume teorema cosinusului obținem: $BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2 \cdot OB \cdot OD \cdot \cos 120^\circ$; $52 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3R^2$; $R = \frac{2}{3}\sqrt{39}$ cm. b) Raza cercului

circumscris coincide cu înălțimea piramidei deoarece ele formează unghiuri de 45° . Înălțimea piramidei este

$$\frac{2\sqrt{39}}{3} \text{ cm. Deci } V = \frac{(8+6)\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{39}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14\sqrt{13}}{3} \text{ cm}^3.$$

20. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC ($AB = AC = a$) ducem perpendiculara $AA' = a$. Din A' ducem o perpendiculară $A'D = a\sqrt{2}$ pe AA' . Să se arate

că triunghiul BCD este echilateral.

Rezolvare. În $\triangle A'AD$ (fig.VII.18) dreptunghic în A , aplicăm teorema lui Pitagora, deci $AD = a\sqrt{3}$. Triunghiurile ADB și ADC sînt congruente și dreptunghice respectiv în B și D , deci:

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{2} \text{ și } DC = \sqrt{AD^2 - AC^2} = a\sqrt{2}. \text{ Deci } \triangle BDC \text{ este echilateral.}$$

21. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB=9$ cm, $AD=15$ cm și $AA'=20$ cm. Se cere distanța de la vârful B' la diagonală AD' .

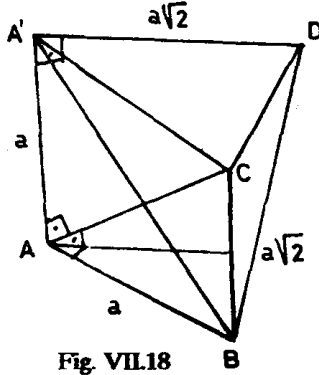


Fig. VII.18

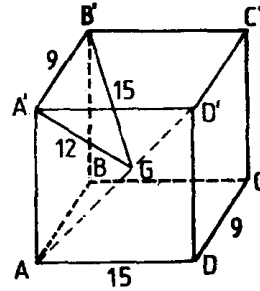


Fig. VII.19

Rezolvare. $\triangle A'D'A$ dreptunghic, obținem $A'D'^2 + A'A^2 = AD'^2$ deci $AD' = 25$ cm. (fig.VII.19).

Înălțimea $A'G$ în $\triangle AD'A$ este $A'G = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ cm. Iar în $\triangle GA'B'$ dreptunghic în A' avem: $B'G = 15$ cm.

22. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 2, 3, 5. Știind că diagonală paralelipipedului este $2\sqrt{38}$ cm, să se afle dimensiunile paralelipipedului.

Rezolvare. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{38} = \frac{4}{1}$, $\frac{x^2}{4} = \frac{4}{1} \Rightarrow x = 4$ cm; $\frac{y^2}{9} = \frac{4}{1} \Rightarrow y = 6$ cm; $\frac{z^2}{25} = \frac{4}{1} \Rightarrow z = 10$ cm.

23. Se dă un cub $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu muchia egală cu a și se notează cu M mijlocul lui DD_1 . Prin diagonală AC și punctul M se duce un plan ce determină în cub secțiunea ACM . Se cere: a) aria secțiunii ACM . b) tangenta unghiului format de planul secțiunii ACM cu planul $ABCD$. c) Distanța de la D la planul ACM .

Rezolvare. a) Avem $MD \perp P(ABCD)$, $DO \perp AC$, deci $MO \perp AC$ (fig.VII.20). Din triunghiul MOD calculăm pe MO :

$$MO = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Aria triunghiului } MAC \text{ este } a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$\cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. b) AC este muchia diedrului căci $MO \perp AC$; $DO \perp AC$. Rezultă că MOD este unghiul plan corespunzător unghiului diedru. Prin urmare avem $\operatorname{tg}(\angle MOD) = \frac{MD}{DO} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. c) Planul MAC este perpendicular pe planul MDO , deoarece conține dreapta AC perpendiculară pe planul MDO . Deci distanța de la D la planul MAC este înălțimea triunghiului MDO , anume DE : $DE = \frac{MD \cdot DO}{MO} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

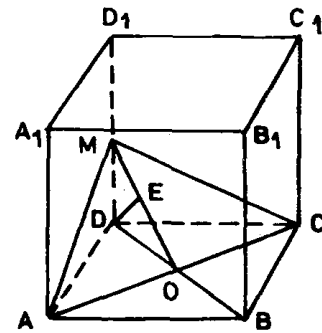


Fig. VII.20

VIII. EXERCIȚII DE ALGEBRĂ REZOLVATE PENTRU OLIMPIADE

1. Determinați numerele reale x și y pentru care $x^2 + y^2 + 2a(-x - y + a) \geq 0$.

Rezolvare. Efectuând calculele și grupând termenii obținem:

$$(x^2 - a)^2 + (y - a)^2 \geq 0 \text{ cum } (x - a)^2 \geq 0 \text{ și } (y - a)^2 \geq 0 \text{ atunci } x = y = a.$$

2. Să se arate că dacă a, b, c , sînt laturile unui triunghi atunci satisfac relația:

$$a^2b^2 + c^4 - b^4 - a^2c^2 = 0.$$

Rezolvare. $a^2b^2 - a^2c^2 + (c^2 - b^2)(c^2 + b^2) = a^2(b^2 - c^2) + (c^2 - b^2)(c^2 + b^2) = 0 \Rightarrow a^2(b^2 - c^2) - (b^2 - c^2)(c^2 + b^2) = 0 \Rightarrow (b^2 - c^2)(a^2 - c^2 - b^2) = 0 \Rightarrow a^2 - c^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ deci triunghiul este dreptunghic sau din $b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow b = c$ deci triunghiul este isoscel.

3. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 21 = 0$.

Rezolvare. $2x^2 + 3xy + 2xy + 3y^2 = 21 \Rightarrow 2x(x + y) + 3y(x + y) = 21 \Rightarrow (2x + 3y)(x + y) = 21 = 3 \cdot 7 = 21 \cdot 1$.

Deci $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ x + y = 3. \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1$. Cazul $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases}$ nu convine.

4. Se consideră polinomul $B(x) = x^6 - x^5 - 2x^2 + 3x - 1$; $x \in \mathbb{R}$ și un polinom $A(x)$ de gradul 100 care are suma coeficienților egală cu 50. Să se găsească suma coeficienților restului împărțirii lui $A(x)$ la $B(x)$.

Rezolvare. $A(x) = (x^6 - x^5 - 2x^2 + 3x - 1) \cdot C(x) + R(x)$; $A(1) = 0 \cdot C(1) + R(1) = 0 + R(1) = 50$.

5. Se dau expresiile:

$$E_1 = a^2(x + 1) + 2(2b^2x + 2b^2 + x) + 2; \quad E_2 = (ax + b)^2 - (x + 2)^2, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că nu există nici un număr a sau b astfel ca E_1 să nu depindă de x .

b) Pentru ce numere a și b , $E_2 = 0$ și pentru ce numere x , $E_1 = 0$?

Rezolvare. a) $E_1 = (a^2 + 4b^2 + 2)x + a^2 + 4b^2 + 2$; se observă că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}$, $a^2 + 4b^2 + 2 \neq 0$, deci E_1 depinde de x ; b) $E_1 = (a^2 + 4b^2 + 2)(x + 1)$, iar $E_1 = 0$ pentru $x + 1 = 0$, adică pentru $x = -1$ oricare ar fi a și b . $E_2 = [(a + 1)x + b + 2][(a - 1)x + b - 2]$, iar $E_2 = 0$ dacă $(a + 1)x + b + 2 = 0$ sau $(a - 1)x + b - 2 = 0$ deci $a = -1$ și $b = -2$, iar $x(a - 1) + (b - 2)$ este adevărată pentru orice x cînd $a = 1$ și $b = 2$.

6. Să se determine toate perechile de numere (x, y) întregi care verifică ecuația:

$$x^2 - xy + y^2 = x + y.$$

Rezolvare. Ecuația poate fi scrisă: $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$. Se înmulțește cu 2 și apoi se adună și se scade cifra 2 ca să obținem o sumă de pătrate. Rezultă $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 2 = 2$ care poate fi scrisă: $x^2 + x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + 1 = 2$; $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Deoarece $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y, x - 1, y - 1 \in \mathbb{Z}$ și deci $(x - y)^2, (x - 1)^2, (y - 1)^2 \in \mathbb{N}$.

Din aceasta rezultă următoarele posibilități:

$(x-y)^2+(y-1)^2+(x-1)^2=2$	Mulțimea soluțiilor (x, y) (x, y)	
1 + 1 + 0 = 2	(0, 1)	(2, 1)
1 + 0 + 1 = 2	(1, 0)	(1, 2)
0 + 1 + 1 = 2	(0, 0)	(2, 2)

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$2x^2+y^2+2y+1=0.$$

Rezolvare: $2x^2+y^2+2y+3-2=0 \Rightarrow (x+1)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=2$. Rezultă următoarele posibilități:

$$(x+1)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=2$$

$$0 + 1 + 1 = 2$$

$$1 + 0 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 0 = 2$$

8. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}$.

Rezolvare. $6y+4x=3xy$; $4x<3xy$; $3y>4$; $y>1\frac{1}{3}$; $6y<3xy \Rightarrow 3x>6 \Rightarrow x>2$. Soluțiile sînt: $x=3, y=4$ și $x=6, y=2$.

9. Să se găsească rădăcinile întregi ale ecuației $x^4+y^4+2=4xy$.

Rezolvare. $x^4+y^4+2=4xy$ se adună $2x^2y^2$ și se scade $2x^2y^2$ și obținem:
 $x^4-2x^2y^2+y^4+2x^2y^2-4xy+2=0$; $(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2=0 \Rightarrow x^2-y^2=0$ și $xy-1=0 \Rightarrow (x,y) \in \{(-1;-1), (1,1)\}$.

10. Să se afle $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încît suma coeficienților polinomului

$$P(x)=a(1-b) (3x^2-4)^{k+1}-b(1-2x)^k-a(2x-3x^2)^{k+2}+1 \text{ să fie zero.}$$

Rezolvare. $P(1)=a(1-b) (-1)^{k+1}-b(-1)^k-a(-1)^{k+2}+1=0$. Dacă k este par obținem:
 $-a(1-b)-b-a+1=0$; $-2a+ab-b+1=0 \Rightarrow ab-2a-b+2-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-2)=1$.
 $a-1 = \pm 1 \Rightarrow a=2, a=0$; $b-2 = \pm 1 \Rightarrow b=3, b=1$. Dacă k este impar obținem $a=-2, b=1$ și $a=4, b=3$.

11. Segmente de lungimi a, b, c care satisfac relația:

$$\text{I. } a^2+2(b^2+c^2)=2a(b+c) \text{ pot fi laturile unui triunghi?}$$

$$\text{II. Dar cele ce satisfac relația: } 2a^2+b^2+c^2=2a(b+c)?$$

Rezolvare. I. $a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac=0$, adunăm și scădem $2bc$ și obținem
 $(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc)+(b^2+c^2-2bc)=0 \Rightarrow (a-b-c)^2+(b-c)^2=0 \Rightarrow a-b-c=0 \Rightarrow a=b+c$ și
 $b-c=0$ deci $b=c$. Ca segmentele să fie laturile unui triunghi trebuie ca $a < b+c$ deci I contrazice.
 II. $a^2+b^2+a^2+c^2-2ab-2ac=0 \Rightarrow (a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)=0 \Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2=0 \Rightarrow a-b=0$; $a=b$
 și $a-c=0 \Rightarrow a=c$ deci triunghiul este echilateral.

12. Fie a, b, c numere reale pozitive, diferite două câte două. Demonstrați că dacă

$$a-b = \frac{b-c}{ab}, \quad b-c = \frac{c-a}{ac} \quad \text{și} \quad c-a = \frac{a-b}{ab} \quad \text{atunci} \quad a=b=c, \quad a^2b^2c^2=1.$$

Rezolvare. $\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2} = (a-b)(b-c)(c-a);$
 $a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a) = (b-c)(c-a)(a-b) \Rightarrow a^2b^2c^2 = 1.$

13. Să se arate că: $(a^2+b^2)c + (b^2+c^2)a + (c^2+a^2)b \geq 6abc.$

Rezolvare. $\frac{(a^2+b^2)c}{abc} + \frac{(b^2+c^2)a}{abc} + \frac{(c^2+a^2)b}{abc} \geq 6 \frac{abc}{abc} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ac} \geq 6$ dar
 $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2; \frac{b^2+c^2}{bc} \geq 2$ și $\frac{c^2+a^2}{ac} \geq 2$ și inegalitatea este verificată. Se poate utiliza și relația $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$

14. Să se arate că: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$

Rezolvare. Expresia devine: $abc + ac^2 + b^2c + bc^2 + a^2b + a^2c + ab^2 + abc \geq 8abc.$ Prin împărțire cu abc se obține $1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 8$, deoarece știm că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$

15. Dacă $a+b=2$ să se arate că $a^2+b^2 > 2.$

Rezolvare. $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab; 4 - 2ab > 2$ adică $2 - ab > 1; -ab > -1; ab < 1.$ Dacă din 4 scădem $2ab < 2$ obținem un număr mai mare ca 2

16. Se consideră expresia rațională: $f(x) = \frac{x^4 + y^4 - 2x^8 + (x+y)^4}{x^2 - x^4 + y^2 + xy}.$

a) Să se aducă $f(x, y)$ la forma cea mai simplă. b) Să se arate că $f(x, y) \geq 0.$

Rezolvare. a) $x^4 + y^4 + (x+y)^4 - 2x^8 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x+y)^4 - 2x^8 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 + (x+y)^4 - 2x^8 = (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 4x^2y^2 - 2x^2y^2 + (x+y)^4 - 2x^8 = 2(x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2 - 2x^8 = 2[(x+y)^4 - 2xy(x+y)^2 + x^2y^2] - 2x^8 = 2[(x+y)^2 - xy]^2 - 2x^8.$

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{2[(x+y)^2 - xy - x^4][x^2 - xy + x^4]}{x^2 - x^4 + y^2 + xy} = \frac{2(x^2 + 2xy + y^2 - xy - x^4)(x^2 + 2xy + y^2 - xy + x^4)}{(x^2 - x^4 + y^2 + xy)} = 2(x^4 + x^2 + y^2 + xy).$$

b) Cum $f(x, y) = 2(x^2 + xy + y^2 + x^4) = 2y^2 \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 + \frac{x}{y} + 1 \right] + 2x^4$ atunci $f(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, deoarece avem

$2x^4 > 0$ și $2y^2 > 0$, iar în paranteza dreaptă notînd $\frac{x}{y} = t$ obținem un trinom de gradul doi în t , avînd discriminantul negativ (deci în acest caz trinomul este strict pozitiv, deoarece păstrează semnul coeficientului lui t^2 .)

17. Folosindu-se diagrama funcției, să se determine numărul tuturor funcțiilor definite pe mulțimea (1,2) cu valori în (3,5).

R. 4.

18. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită astfel: $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & \text{dacă } x < -1 \\ -7 & \text{dacă } -1 \leq x < 3 \\ -3x+2 & \text{dacă } x \geq 3 \end{cases}$

Să se determine $f(-2); f(-1); f(2); f(4).$

R. $f(-2) = -10; f(-1) = f(3) = -7; f(4) = -10.$

19. Fie funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{0,1,2,3,4,5\}$ definită astfel: $f(x)$ este restul împărțirii lui x la 6. Să se determine $f(-12)$, $f(-9)$, $f(3)$, $f(9)$, $f(272)$.

Rezolvare. Știm că $D = I \cdot C + r$. Pentru numerele x și 6 există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = 6p + f(x)$ și $0 < f(x) < 6$. De aici pentru $x = -12$, se obține $p = -2$ și deci $f(-12) = 0$, pentru $x = -9$, avem $-9 = 6(-2) + 3$ deci $f(-9) = 3$. La fel obținem $f(3) = (9) = 3$ și $f(272) = 2$.

20. Există un număr întreg m astfel încât să existe funcția $f: A = \{1,2,3\} \rightarrow B = \{1,2,3\}$ definită după formula $f(x) = x^2 + m$?

Rezolvare. Presupunem că există o astfel de funcție, atunci $f(1) = 1 + m$; $f(2) = 4 + m$; $f(3) = 9 + m$. Dacă $f(1) = 1 \Rightarrow m = 0$; în acest caz $f(2) = 4$ și $f(3) = 9$, dar 4 și 9 nu aparțin mulțimii B . Dacă $f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$; $m = 1$; în acest caz $f(2) = 5$ și $f(3) = 10$, dar 5 și 10 nu aparțin mulțimii B . Considerând și cazul $f(1) = 3 \Rightarrow 1 + m = 3$; $m = 2$, $f(2) = 6$ și $f(3) = 11$. Deci nu există un număr întreg m care să îndeplinească condițiile cerute.

21. Se dă $f(x) = (x^2 + 2x + 2)^2 - x$. a) Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ este pozitivă. b) Să se scrie $f(x)$ ca produs de factori fără a utiliza radicalul. c) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$?

Rezolvare. $f(x) = (x^2 + x + x + 1 + 1)^2 - x = (x^2 + x + 1 + x + 1)^2 - x = (x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1)(x + 1) + (x + 1)^2 - x = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$. Pentru ca $f(x)$ să fie zero $\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$ sau $x^2 + 3x + 4 = 0$. Dar nici una din ecuațiile obținute nu are soluții în mulțimea numerelor reale $\Rightarrow f(x)$ nu poate fi zero. Cum $x^2 + x + 1 > 0$ și $x^2 + 3x + 4 > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > 0$.

22. Să se determine legătura dintre rădăcinile ecuațiilor $ax^2 + bx + c = 0$ și $cx^2 + bx + a = 0$.

Rezolvare. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x'_1 + x'_2 = -\frac{b}{c}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; $x'_1 x'_2 = \frac{a}{c}$; $x_1 x_2 + x'_1 x'_2 = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} > 2$.

23. Fără a rezolva ecuația să se găsească suma pătratelor rădăcinilor ecuației: $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0$.

Rezolvare. Se notează $x^2 + 2x = y$ (1) și se obține $y^2 - 5y + 3 = 0$, care are două rădăcini $y_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ și $y_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

Înlocuind în ecuația (1) valoarea lui y_1 , obținem: $x^2 + 2x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - (5 + \sqrt{13}) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 9 + \sqrt{13} \\ x_1^2 x_2^2 = \left(-\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{25 + 10\sqrt{13} + 13}{4} = \frac{38 + 10\sqrt{13}}{4} = \frac{19 + 5\sqrt{13}}{2} \end{array}$$

Înlocuind în ecuația (1) valoarea lui y_2 obținem: $x^2 + 2x - \frac{5 - \sqrt{13}}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - (5 - \sqrt{13}) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 x_4 = \frac{\sqrt{13} - 5}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 9 - \sqrt{13} \\ x_3^2 x_4^2 = \left(\frac{\sqrt{13} - 5}{2}\right)^2 = \frac{13 - 10\sqrt{13} + 25}{4} = \frac{38 - 10\sqrt{13}}{4} = \frac{19 - 5\sqrt{13}}{2} \end{array}$$

Deci: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 18$.

24. Să se determine mulțimile A și B și numerele reale p și q știind că:
 $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + p = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + qx - 4 = 0\}$ și $A \cup B = \{-2, -1, 1, 4\}$.

Rezolvare. $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 x_2 = p$. Din $x_1 + x_2 = -1$ rezultă că $x_1 = -2$ și $x_2 = 1$ iar $p = x_1 x_2 = -2$.

Referindu-ne la mulțimea B avem: $x'_1 + x'_2 = -q$ și $x'_1 x'_2 = -4 \Rightarrow x'_1 = -1$ și $x'_2 = 4$ atunci
 $x'_1 + x'_2 = 3 = -q \Rightarrow q = -3$. Deci $A = \{-2, 1\}$ și $B = \{-1, 4\}$.

25. Arătați că oricare ar fi numerele reale m , n și p cu $m \neq n$ ecuația
 $(m-n)x^2 + 2(n-p)x + p-m = 0$ are soluții reale. Ce se întâmplă dacă $m = n$?

Rezolvare. $\Delta = (n-p)^2 - (m-n)(p-m) = n^2 - 2np + p^2 - mp + m^2 + np - mn \Rightarrow$
 $n^2 - np + p^2 - mp + m^2 - nm > 0$, deoarece amplificând această inegalitate cu 2 obținem
 $n^2 + n^2 - 2np + p^2 + p^2 - 2mp + m^2 + m^2 - 2nm = (n-p)^2 + (n-m)^2 + (p-m)^2 > 0$.

26. Dacă x și y satisfac relația $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, să se determine $\frac{x}{y}$ ($y \neq 0$).

Rezolvare. $\frac{ax^2}{y^2} + 2b\frac{xy}{y^2} + \frac{cy^2}{y^2} = 0$, notăm $\frac{x}{y} = z$ și avem ecuația $az^2 + 2bz + c = 0$.

27. Să se determine valorile parametrului m astfel încât ecuația $x^2 - 6x + m = 0$ să aibă două rădăcini reale dintre care una să fie dublul celeilalte.

R. $\Delta = 36 - 4m = 0$; $m = 9$.

28. Să se arate că $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ este irațional.

Rezolvare. În triunghiul dreptunghic ABC luăm $AB = \sqrt{2}$ și $AC = \sqrt{3}$, atunci ipotenuza este $\sqrt{5}$.

Suma a două numere iraționale $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ este un număr irațional.

29. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracție periodică.

Rezolvare. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3(n+1)^2 - 1}{n(n+1)(n+2)}$. Numitorul este produsul a trei numere consecutive care este divizibil cu 3 iar numărătorul nu este divizibil cu 3 rezultă că fracția este număr periodic mixt.

30. Să se determine numerele naturale x și y care verifică relația $x^2 - y^2 = 135$.

Rezolvare. $x^2 - y^2 = 5 \cdot 27$; $(x+y)(x-y) = 5 \cdot 27 \Rightarrow x+y=27$; $x-y=5 \Rightarrow x=16$; $y=11$.

31. Să se afle rădăcinile întregi ale ecuației: $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

Rezolvare. $x^4 + y^4 - 4xy + 2 = 0$. Se adună și se scade $2x^2 y^2$ și se obține:
 $(x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 = 0 \Rightarrow x=1, y=1$; $x=-1, y=-1$.

32. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{\frac{18x}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+2}{18x}} = 2$.

R. Se notează $y = \sqrt{\frac{18x}{x+2}}$ și se obține $x = \frac{2}{17}$.

33. Să se rezolve ecuația: $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Indicație. Notăm $u = \sqrt[4]{97-x}$, $v = \sqrt[4]{x}$ și obținem $u+v=5$; $u^4+v^4=97$. Dar
 $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2 \Rightarrow 97=(25-2uv)^2-2u^2v^2 \Rightarrow u^2v^2-50uv+264=0$.
 Se află u și v apoi se determină x .

$$R. x_1=16; x_2=81.$$

34. Să se afle restul și câtul împărțirii polinomului $P(x)=x^4-x^3+3x^2-1$ la polinomul x^2-3x+2 fără a efectua împărțirea.

Rezolvare. $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. Se calculează: $P(1)$ și se obține restul 2, iar pentru $P(2)$ se obține restul 19. Restul este de forma $ax+b$. Se obține $a+b=2$ și $2a+b=19 \Rightarrow a=17$, $b=-15$. Deci restul este $17x-15$.

35. Să se determine funcțiile f și g , $f(x)=ax+b$ și $g(x)=\frac{1-a}{2}x+C$, $a<0$, știind că cele două drepte sînt perpendiculare în punctul de coordonate $M(0,1)$.

Rezolvare. 1) $ax+b=f(x)$ trece prin punctul de coordonate $(0,1)$ obținem $a \cdot 0+b=1 \Rightarrow b=1$.
 2) $\frac{1-a}{2} \cdot x+C=g(x)$; $0+C=1 \Rightarrow C=1$, deoarece și a doua dreaptă trece prin $M(0,1)$. Înlocuim $a=x$ în $g(x)$ și obținem $\frac{(1-a)a}{2}+1=g(a)$; $a(a-1)=2$ și cum $a<0 \Rightarrow a=-1$. Deci $f(x)=-x+1$ și $g(x)=x+1$.

36. Să se determine numărul a astfel ca polinomul $P(x)=x^{20}+x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+a$ să fie divizibil cu $Q(x)=x^3+x^2+x+1$.

Rezolvare. $x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$; $P(-1)=5-a=0$, $a=5$.

37. Scrieți numerele naturale 13 și 31 ca diferențe de pătrate de numere naturale, generalizați pentru orice număr impar.

Rezolvare. $(x-y)(x+y)=13 \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=13 \end{cases} \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7, y=6$. $x-y=13$ și $x+y=1$ nu are soluții naturale. Se procedează similar și pentru 31. Pentru cazul general se ține seama că un număr este par iar altul impar și unul este cu o unitate mai mic ca celălalt.

38. Se știe că $x^2-y^2+2yz-z^2=40$ și $x-y+z=2$.

a) Să se calculeze $x+y-z$. b) Să se determine valoarea lui x .

Rezolvare. $x^2-(y-z)^2=40 \Rightarrow (x-y+z)(x+y-z)=40$; $2(x+y-z)=40 \Rightarrow x+y-z=20$, deci $x=11$.

39. Să se determine x și y numere întregi astfel încît $x-y=48$ și $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=18$.

$$R. x=49, y=1.$$

40. Fie polinomul

$$P(X)=X^2+(X+2)^2+(X+4)^2+\dots+(X+98)^2-[(X+1)^2+(X+3)^2+\dots+(X+99)^2].$$

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $P(x)>0$.

Rezolvare. Grupînd convenabil urmează:

$$\begin{aligned} P(x) &= [x^2-(x+1)^2] + [(x+2)^2-(x+3)^2] + \dots + [(x+98)^2-(x+99)^2] = (x-x-1)(x+x+1) + (x+2-x-3)(x+2+x+3) + \dots + (x+98-x-99)(x+98+x+99) = \\ &= -(2x+1+2x+5+2x+9+\dots+2x+197) = -50 \cdot 2x - (1+5+9+\dots+197) = \\ &= -50(2x+99). \text{ Deci } -50(2x+99) > 0 \Rightarrow x < -\frac{99}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{99}{2}\right). \end{aligned}$$

41. Să se arate că ecuația $x^3+y^3=x+y+1987$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi, \mathbb{Z} .

Rezolvare. Ecuația din enunț se mai poate scrie:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)=1987 \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-1)=1987.$$

Notăm $x+y=S$ și $xy=P$; atunci $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$. Cu acestea, ecuația devine:

$$S(S^2-2P-1)=1987, (1).$$

Deoarece x și y sînt numere întregi rezultă că S și P sînt numere întregi. Ținînd seama că 1987 este număr prim, din (1) rezultă următoarele cazuri:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} S=1 \\ S^2-3P-1=1987 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} S=1987 \\ S^2-3P-1=1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} S=-1 \\ S^2-3P-1=-1987 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} S=-1987 \\ S^2-3P-1=-1 \end{cases} \end{array}$$

Din a) deducem $P=-\frac{1987}{3}$ care nu e număr întreg, deci sistemul a) nu are soluții în mulțimea \mathbb{Z} .

Din b) deducem $3P=S^2-2$; dar $S=1987=3 \cdot 662+1$ adică $S=M3+1$. Prin urmare:

$$P=\frac{S^2-2}{3}=\frac{(M3+1)^2-2}{3}=\frac{M3+1-2}{3}=\frac{M3-1}{3}.$$

42. Aflați numerele pătrate perfecte de forma $4n^2-35$, $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Fie p^2 numărul natural căutat. Avem $4n^2-35=p^2$, $p, n \in \mathbb{N}$, de unde:

$4n^2-p^2=35 \Leftrightarrow (2n-p)(2n+p)=1 \cdot 5 \cdot 7$. Deoarece $2n-p < 2n+p$ putem avea următoarele două cazuri:

$$\begin{cases} 2n-p=5 \\ 2n+p=7 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2n-p=1 \\ 2n+p=35 \end{cases}, \text{ cu soluțiile } n=3, p=1 \text{ sau } n=9, p=17. \text{ Deci numerele căutate sînt } 1 \text{ și } 289.$$

43. Să se rezolve în numere naturale ecuația: $3x^2+2xy+3y^2=664$.

Rezolvare. Ecuația dată se mai poate scrie $2(x+y)^2+(x-y)^2=664$.

Notăm: $x+y=u$ și $x-y=v$; $u, v \in \mathbb{N}$, (1). Urmează: $2u^2+v^2=664$. Rezultă că $v=2v_1$, $v_1 \in \mathbb{N}$ adică ecuația devine: $u^2+2v_1^2=332 \Rightarrow u=2u_1$, $u_1 \in \mathbb{N}$. Deci $2u_1^2+v_1^2=166 \Rightarrow v_1=2v_2$, $v_2 \in \mathbb{N}$ adică $u_1^2+2v_2^2=83$. Dar: $0 \leq u_1 \leq 9$, iar pe de altă parte u este un număr natural impar. Deci: $u_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow 2v_2^2 \in \{82, 74, 58, 34, 2\} \Rightarrow v_2^2 \in \{41, 37, 29, 17, 1\}$. Dar singurul pătrat este 1. Prin urmare deoarece $v_2 \in \mathbb{N}$, $v_2=1$ și $u_1=9$ implică $v_1=2$, rezultă că $u=18$ și $v=4$. Din relația (1) urmează: $x+y=18$, $x-y=4$, adică $x=11$ și $y=7$. Dar ecuația dată este simetrică în x și y prin urmare mai admite și soluția $x=7$ și $y=11$.

44. Determinați cel puțin trei numere raționale x , care nu sînt întregi, pentru care numărul $\sqrt{x-x^2}$ este rațional și arătați că există oricît de multe numere raționale

x pentru care numărul $\sqrt{x-x^2}$ este rațional.

Rezolvare. Numerele raționale căutate trebuie să fie situate în intervalul $(0,1)$, (deoarece $x-x^2 \geq 0$) și nu trebuie să fie întregi.

De exemplu: $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{5}, x = \frac{1}{10}$.

Fie $t \in \mathbb{Q}_+$. Notăm $\sqrt{x-x^2} = tx \Rightarrow x-x^2 = t^2x^2 \Rightarrow 1-x = t^2x \Rightarrow x = \frac{1}{1+t^2}$.

45. Numărul real a fiind fixat, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x(y-a)=1 \\ 2y(z-a)=1 \\ 2z(u-a)=1 \\ 2u(x-a)=1 \end{cases}$$

Rezolvare. Eliminând din primele două ecuații necunoscuta y și din ultimile două ecuații necunoscuta x obținem sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{2(z-a)} - \frac{1}{2x} = a \\ \frac{1}{2(x-a)} - \frac{1}{2z} = a \end{cases}$$

Eliminând din acest sistem necunoscuta z , obținem ecuația: $2x^2 - 2ax - 1 = 0$ cu soluțiile $x_1 = \frac{a + \sqrt{2+a^2}}{2}$

și $x_2 = \frac{a - \sqrt{2+a^2}}{2}$. În final obținem soluțiile: $x=y=z=u = \frac{a + \sqrt{2+a^2}}{2}$ și $x=y=z=u = \frac{a - \sqrt{2+a^2}}{2}$.

46. Determinați numerele întregi n astfel încât numărul $n^2 + 9n + 14$ să fie pătratul unui alt număr întreg.

Rezolvare. Fie $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n^2 + 9n + 14 = k^2 \Rightarrow 4n^2 + 36n + 56 = 4k^2 \Leftrightarrow (2n+9)^2 - 4k^2 = 25 \Leftrightarrow (2n+9-2k)(2n+9+2k) = 25$. Dar divizorii întregi ai numărului 25 sînt $-1, -5, -25, 1, 5, 25$, deci distingem mai multe cazuri:

$$\begin{cases} 2n+9-2k=1 \\ 2n+9+2k=25 \end{cases} \Rightarrow 4n+18=26 \Leftrightarrow n=2; (n^2+9n+14=36).$$

$$\text{Cazurile } \begin{cases} 2n+9-2k=-1 \\ 2n+9+2k=-25 \end{cases}, \begin{cases} 2n+9-2k=5 \\ 2n+9+2k=5 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} 2n+9-2k=-5 \\ 2n+9+2k=-5 \end{cases}$$

se tratează analog și în final, obținem $n \in \{-11; -7; -2; 2\}$.

47. Să se demonstreze că ecuația $\left\lfloor \frac{3x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3x+2}{2} \right\rfloor = 6$ nu are soluții întregi, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Rezolvare. Presupunem că $x = a \in \mathbb{Z}$ este o soluție a ecuației. Deosebim două cazuri:

$$1) a = 2p, p \in \mathbb{Z}. \text{ Ecuația devine: } \left\lfloor \frac{6p+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6p+2}{2} \right\rfloor = 6 \Leftrightarrow \left\lfloor 3p + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor 3p+1 \rfloor = 6 \Leftrightarrow 3p+3p+1=6 \Leftrightarrow 6p=5 \Leftrightarrow p = \frac{5}{6},$$

ceea ce contrazice ipoteza că $p \in \mathbb{Z}$.

2) $a = 2p+1, p \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:

$$\left\lfloor \frac{6p+4}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6p+5}{2} \right\rfloor = 6 \Leftrightarrow \lfloor 3p+2 \rfloor + \left\lfloor 3p+2 + \frac{1}{2} \right\rfloor = 6 \Leftrightarrow 3p+2+3p+2=6 \Leftrightarrow 6p=2 \Leftrightarrow 3p=1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}, \text{ ceea ce contrazice}$$

ipoteza că $p \in \mathbb{Z}$. Deci nici un număr întreg nu poate fi soluția ecuației.

48. Fie polinomul $P(x) = x^{15} + (m-1)x^3 - m$ cu $m \in \mathbb{Z}$. Să se arate că $P(2)$ este divizibil cu 7 și să se determine restul împărțirii polinomului $P(x)$ la $(x^2 + x + 1)^2$.

Rezolvare. Observăm că $7 = 2^3 - 1$. Atunci:

$$P(2) = 2^3(2^3 - 1)(2^3 + 1)(2^6 + 1) + m(2^3 - 1) = (2^3 - 1)[2^3(2^3 + 1)(2^6 + 1) + m].$$

Pentru a găsi restul împărțirii polinomului la $(x^2 + x + 1)^2$, vom separa termenii din $P(x)$ care conțin acest factor. Observăm că $(x^3 - 1)^2 = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$. Deci $P(x) = x^{15} - x^3 + m(x^3 - 1) = x^3(x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^6 + 1) + m(x^3 - 1) = (x^3 - 1)[x^3(x^3 + 1)(x^6 + 1) + m]$. În paranteza dreaptă adăugăm și scădem 4 și obținem: $P(x) = (x^3 - 1)[x^{12} - 1 + x^9 - 1 + x^6 - 1 + x^3 - 1 + m + 4]$. Termenii $x^{12} - 1$, $x^9 - 1$, $x^6 - 1$, $x^3 - 1$ conțin ca factor pe $x^3 - 1$ deci și pe $x^2 + x + 1$, deci $P(x) = (x^3 - 1)^2 Q(x) + (m + 4)(x^3 + 1)$. Deoarece $\text{gr}(x^3 + 1) \leq \text{gr}(x^2 + x + 1)^2$ rezultă $R(x) = (m + 4)(x^3 + 1)$.

49. Să se determine numerele întregi x și y , prime între ele, astfel încât fracția

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \text{ să fie echivalentă cu fracția } \frac{5}{19}.$$

Rezolvare. Arătăm mai întâi că fracția $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este ireductibilă.

Deoarece $x^2 + xy + y^2 = x(x+y) + y^2 = y(x+y) + x^2$, orice divizor al lui $x+y$ și $x^2 + xy + y^2$ trebuie să fie divizor și pentru numerele x^2 și y^2 .

Dar singurul divizor comun al lui x^2 și y^2 este 1, deoarece x și y sînt prime între ele. Deci numerele $x+y$ și $x^2 + xy + y^2$ sînt prime între ele, adică fracția $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este ireductibilă.

Deoarece și $\frac{5}{19}$ este ireductibilă rezultă că fracțiile $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ și $\frac{5}{19}$ sînt echivalente dacă și numai

$$\text{dacă: } \begin{cases} x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2 - xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases},$$

sistem care are soluțiile $x=2, y=3$ sau $x=3, y=2$.

50. Determinați numerele întregi m și n astfel încît: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}$.

Rezolvare. Observăm că $m \neq 0$ și $n \neq 0$, deci $m \in \mathbb{Z}^*$ și $n \in \mathbb{Z}^*$. Relația din enunț este echivalentă succesiv cu:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2mn = 5m + 5n - 5 \Leftrightarrow 2mn - 5n = 5m - 5 \Leftrightarrow (2m - 5)n = 5m - 5.$$

Deoarece $2m - 5 \neq 0$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}$ (dacă $2m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$, ceea ce contrazică faptul că $m \in \mathbb{Z}$)

obținem: $n = \frac{5m-5}{2m-5}, (1)$.

Din $n \in \mathbb{Z}$ avem $\frac{5m-5}{2m-5} \in \mathbb{Z}^*$ și cum $m \in \mathbb{Z}^*$ rezultă că $(2m-5)$ divide $(5m-5)$, (2).

Dar 2 nu divide $(2m-5)$, prin urmare $(2m-5, 2)=1$. Ținând seama de acest lucru, din (2) obținem succesiv: $(2m-5) | 2(5m-5) \Rightarrow (2m-5) | (10m-10) \Rightarrow (2m-5) | 5(2m-5)+15$, (3).

Cum $(2m-5)$ divide $5(2m-5)$, din (3) rezultă că $(2m-5)$ divide 15, deci $2m-5 \in \{\pm 15; \pm 5; \pm 3; \pm 1\}$ de unde $m \in \{-5; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 10\}$. Dar $m \neq 0$, prin urmare $m \in \{-5; 1; 2; 3; 4; 5; 10\}$. Pentru aceste valori ale lui m aflăm valorile corespunzătoare ale lui n din (1). Observăm că pentru $m=1$ rezultă $n=0$, ceea ce nu convine. În final mulțimea soluțiilor (m, n) va fi: $\{(-5; 2), (2; -5), (3; 10), (4; 5), (5; 4), (10; 3)\}$.

51. Dacă $n \in \mathbb{N}$ să se demonstreze că: $A = 7^n \cdot 3^{n+1} + 3^n \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 21^n$ este divizibil cu 17; $B = 5^n \cdot 7^{n+1} + 7^n \cdot 5^{n+1} + 17 \cdot 35^n$ este divizibil cu 29.

Rezolvare. Avem succesiv:

$$A = 7^n \cdot 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 7^n \cdot 7 + 7 \cdot (3 \cdot 7)^n = 7^n \cdot 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 7^n \cdot 7 + 7 \cdot 3^n \cdot 7^n = 3^n \cdot 7^n (3 + 7 + 7) = 3^n \cdot 7^n \cdot 17. \text{ Deci } A \text{ se divide cu } 17.$$

$$B = 5^n \cdot 7^n \cdot 7 + 7^n \cdot 5^n \cdot 5 + 17 \cdot 7^n \cdot 5^n = 7^n \cdot 5^n (7 + 5 + 17) = 7^n \cdot 5^n \cdot 29. \text{ Rezultă că } B \text{ se divide cu } 29.$$

52. Să se determine toate numerele naturale x, y, z pentru care $xy + yz + zx = 11$. (Presupunem $x \leq y \leq z$).

Rezolvare. Să observăm că dacă $2 \leq x \leq y \leq z$, atunci $xy + yz + zx \geq 4 + 4 + 4 = 12 > 11$ și deci nu avem soluții. Prin urmare, cel puțin unul din numere este 0 sau 1. Ținând seama de $x \leq y \leq z$, avem cazurile:

a) Dacă $x=0$ atunci $yz=11$, de unde obținem $y=1$ și $z=11$ sau $y=11$ și $z=1$ (aceasta nu convine, deoarece $y > z$), deci avem soluția $x=0, y=1, z=11$.

b) Dacă $x=1$, atunci $1 = x \leq y \leq z$ și ecuația dată este echivalentă cu $yz + y + z = 11$. Avem subcazurile:

i) dacă $y=1$ atunci $z + z + 1 = 11$, de unde $2z=10$ și $z=5$; rezultă soluția $x=1, y=1, z=5$.

ii) dacă $y=2$ atunci $2z + 2 + z = 11$, de unde $3z=9$, adică $z=3$; rezultă soluția $x=1, y=2, z=3$.

iii) dacă $y \geq 3$ rezultă $z \geq 3$ (deoarece $z \geq y$); atunci $yz + y + z \geq 9 + 3 + 3 = 15 > 11$ și deci nu avem soluții.

Prin urmare, soluțiile (x, y, z) ale ecuației sînt: $(0, 1, 11), (1, 1, 5), (1, 2, 3)$.

53. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, numărul

$$A = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 (n^2 + 2n - 1) + 3 \text{ este natural, multiplu de } 3.$$

Rezolvare. a) Numărul A este natural deoarece numărul $n(n+1)$ reprezintă produsul a două numere naturale consecutive, prin urmare este un număr natural divizibil prin 2, iar pătratul său $n^2(n+1)^2$ este un număr natural divizibil cu 4.

b) Arătăm că numărul natural A este multiplu de 3. Fie $n=3k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow A=M3+3=M3$. Analog pentru $n=3k-1, k \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n=3k+1, k \in \mathbb{N}$, observăm că:

$$2n^2 + 2n - 1 = 2(3k+1)^2 + 2(3k+1) - 1 = M3 + 3 + 2M3 + 2 - 1 = M3, \text{ deci } A \text{ este multiplu } 3.$$

54. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x(x+2)(x+4)(x+6)+9=y^2$.

Rezolvare. Grupînd termenii în primul membru urmează:

$$[x(x+6)][(x+2)(x+4)] + 9 = y^2 \text{ sau } [x^2+6x][(x^2+6x)+8] + 9 = y^2 \text{ sau } (x^2+6x)^2 + 8(x^2+6x) + 16 + (9-16) = y^2$$

$$\text{adică } (x^2+6x+4)^2 - 7 = y^2 \text{ sau } (x^2+6x+4-y)(x^2+6x+4+y) = 7.$$

Deci rezolvarea problemei date se reduce la rezolvarea următoarelor sisteme:

$$\begin{cases} x^2+6x+4-y=7 \\ x^2+6x+4+y=1 \end{cases}; \begin{cases} x^2+6x+4-y=1 \\ x^2+6x+4+y=7 \end{cases}; \begin{cases} x^2+6x+4-y=-7 \\ x^2+6x+4+y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x^2+6x+4-y=-1 \\ x^2+6x+4+y=-7 \end{cases}.$$

Soluțiile sistemelor sînt: $(0, -3), (-6, -3), (0, 3), (-6, 3), (-2, 3), (-4, 3), (-2, -3), (-4, -3)$.

55. Fie polinomul $P(X)=X^2+40$. Să se demonstreze că dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, atunci cel puțin unul din numerele $P(a)+P(b)$, $P(a)-P(b)$ este diferit de 1 și nu este număr prim.

Indicație. $P(a)+P(b)=a^2+b^2+80$, $P(a)-P(b)=(a-b)(a+b) \geq 1$.

56. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât: $x+y=x^3+y^3=x^5+y^5=a$.

Determinați mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua a .

Rezolvare. Conform enunțului avem: $x+y=a$; $x^3+y^3=a$ și $x^5+y^5=a$, (1).

Dacă $y=-x$ din cele trei relații obținem $a=0$.

Ne propunem în continuare să găsim numerele $a \neq 0$ pentru care există x și y verificând relațiile (1). Fie x și y , rădăcinile ecuației de gradul II: $z^2-az+p=0$. Avem $x+y=a$; $x^2+y^2=a^2-2p$; $x^3+y^3=a^3-3ap$; $x^4+y^4=a(x^3+y^3)-p(x^2+y^2)=a^4-4a^2p+2p^2$, deci $x^5+y^5=a^5-5a^3p+5ap^2$, (2).

Din relațiile $x^3+y^3=a^3-3ap$ și $x^3+y^3=a$ rezultă $a^3-3ap=a \Rightarrow p=\frac{a^2-1}{3}$, (3), deoarece $a \neq 0$. Din relația (2) și $x^5+y^5=a$ rezultă $a=a^5-5a^3p+5ap^2 \Rightarrow a^4-5a^2p+5p^2=1$. Folosind relația (3) obținem

$$a^4-5a^2 \cdot \frac{a^2-1}{3} + 5 \left(\frac{a^2-1}{3} \right)^2 = 1 \Rightarrow a^4-5a^2+4=0 \Rightarrow (a^2-1) \cdot (a^2-4)=0 \Rightarrow a \in \{-2, -1, 1, 2\}.$$

În concluzie $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

57. Polinomul $P(x)$ de gradul n ($n \geq 2$) împărțit la polinoamele de gradul întâi $A(x)$ și $B(x)$ dă respectiv resturile r_1 și r_2 . Se cere:

a) Să se arate că dacă $r_1 \neq r_2$, atunci restul împărțirii lui $P(x)$ prin $A(x) \cdot B(x)$ nu poate fi o constantă.

b) Dacă $A(x)=x+1$, $B(x)=2x-3$, $r_1=2$ și $r_2=7$, să se găsească restul împărțirii de la punctul a).

Rezolvare. a) Polinoamele de gradul întâi sînt de forma

$$A(x)=mx+n \quad (m \neq 0), \quad B(x)=px+q \quad (p \neq 0).$$

Conform enunțului avem:

$$1^0 \quad P(x)=(mx+n)C_1(x)+r_1. \text{ Făcînd } x=-\frac{n}{m} \Rightarrow P\left(-\frac{n}{m}\right)=r_1, \quad (1);$$

$$2^0 \quad P(x)=(px+q)C_2(x)+r_2. \text{ Făcînd } x=-\frac{q}{p} \Rightarrow P\left(-\frac{q}{p}\right)=r_2, \quad (2).$$

3⁰. Presupunem prin absurd că $P(x)$ împărțit prin $A(x) \cdot B(x)$ dă restul $r=\text{constant}$. Putem scrie :

$$P(x)=(mx+n) \cdot (px+q)C(x)+r. \text{ Pentru } x=-\frac{n}{m} \text{ și avînd în vedere (1), obținem } r_1=r, \quad (3).$$

$$\text{Pentru } x=-\frac{q}{p} \text{ și avînd în vedere (2), obținem } r_2=r, \quad (4). \text{ Din (3) și (4) rezultă } r_1=r_2, \text{ contradicție.}$$

b) Conform ipotezei avem:

$$1^0. \quad P(x)=(x+1)C_1(x)+2 \Rightarrow P(-1)=2,$$

$$2^0. \quad P(x)=(2x-3)C_2(x)+7 \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}\right)=7.$$

Folosind rezultatul de la a) putem scrie: $P(x)=(x+1)(2x-3)C(x)+R(x)$, unde $R(x)=ux+v$ ($u \neq 0$) căci $\text{gr } R(x) < \text{gr } (x+1)(2x-3)$.

Avem $P(x)=(x+1)(2x-3)C(x)+ux+v$. Pentru $x=-1$ sau $x=\frac{3}{2}$ rezultă: $-u+v=2$, $\frac{3}{2}u+v=7$. Deci $u=2$, $v=4$ și $R(x)=2x+4$.

58. Să se determine lungimile laturilor triunghiului ABC știind că sînt numere întregi și $a=16$, $\cos A=-\frac{1}{4}$.

Rezolvare. Cu notațiile obișnuite, aplicînd teorema cosinusului avem:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow 256=b^2+c^2+\frac{bc}{2} \Rightarrow 2b^2+2c^2+bc-512=0 \quad (1).$$

Deoarece $\cos A < 0$, rezultă că A este obtuz, deci A este cel mai mare unghi și corespunzător, a va fi cea mai mare latură. Să presupunem $b \leq c$, deci $1 \leq b \leq c < a=16$. Atunci $2b^2+2c^2+bc \geq 5b^2$ și folosind (1) putem scrie echivalent $512 \geq 5b^2$ de unde obținem $1 \leq b \leq 10$, (2).

Gîndind egalitatea (1) ca o ecuație de gradul al doilea cu necunoscuta c , discriminantul acesteia va fi $\Delta=b^2-4 \cdot 2(2b^2-512)=4 \cdot 096-15b^2$. Deoarece c este întreg, trebuie ca Δ să fie pătrat perfect. Ținînd seama și de (2), se observă ușor că singurele valori convenabile ale lui b sînt $b_1=5$, $b_2=8$. Corespunzător, din (1) obținem $c_1=14$, $c_2=12$. Dacă vom considera $b \geq c$ obținem în mod simetric $b_3=14$, $b_4=12$, respectiv $c_3=5$, $c_4=8$. Așadar tripletele (a,b,c) căutate sînt: $(16,5,14)$; $(16,8,12)$; $(16,14,5)$; $(16,12,8)$.

59. Să se rezolve în numere naturale ecuația: $1+x+x^2+x^3=y^3$.

Rezolvare. În prealabil vom arăta că: $x^3 < 1+x+x^2+x^3 \leq (x+1)^3$, $(\forall) x \in \mathbf{N}$, (1).

Intr-adevăr, inegalitatea din dreapta este evidentă. Inegalitatea din stînga este echivalentă cu $x^2+x+1 > 0$,

$$(\forall) x \in \mathbf{N}, \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0, \quad (\forall) x \in \mathbf{N}, \text{ ceea ce este evident. Conform (1) avem } x^3 < y^3 \leq (x+1)^3, \text{ deci}$$

numărul natural y^3 fiind cuprins între două numere naturale consecutive și strict mai mare decît x^3 rezultă că $y^3=(x+1)^3$ sau $y=1+x$. Înlocuind y în ecuația dată obținem ecuația $2x^2+2x=0$ sau $2x(x+1)=0$ cu soluțiile $x=0$ și $x=-1 \notin \mathbf{N}$. Deci $x=0$ și $y=1$.

60. Fiind dat pe axa reală punctul $A(a)$, se cere să se găsească pe aceeași axă punctul B la distanța d ($d > 0$) de punctul A .

Rezolvare. Atașînd lui B coordonata necunoscută x , problema revine la a rezolva ecuația:

$|x-a|=d$, adică la a găsi mulțimea $M=\{x \mid |x-a|=d\}$. Notînd $M_1=\{x \mid |x-a|=d, x \geq a\}$ și $M_2=\{x \mid |x-a|=d, x < a\}$, observăm că: $M=M_1 \cup M_2$ și vom trece la aflarea mulțimilor M_1 și M_2 .

$$M_1=\{x \mid |x-a|=d, x \geq a\}=\{x \mid x-a=d, x \geq a\}=\{x \mid x=d+a, x \geq a\};$$

$$M_2=\{x \mid |x-a|=d, x < a\}=\{x \mid -x+a=d, x < a\}=\{x \mid x=a-d, x < a\}.$$

$$\text{Mulțimile } M_1 \text{ și } M_2 \text{ nu sînt vide, deoarece } d > 0 \Rightarrow \begin{cases} d+a > a, \text{ deci } M_1 = \{d+a\} \\ a-d < a, \text{ deci } M_2 = \{a-d\} \end{cases}$$

Mulțimea M se obține reunind M_1 și M_2 . $M=M_1 \cup M_2=\{a-d, a+d\}$. Problema are deci două soluții:

$$B_1(a-d), B_2(a+d).$$

61. Să se rezolve ecuația: $|2x-1|+2|x+1|=3$.

Rezolvare. Rădăcinile ecuațiilor $2x-1=0$, $x+1=0$ sînt $\frac{1}{2}$ și -1 . Notînd cu M_1, M_2, M_3

mulțimile soluțiilor ecuației date în intervalele: $(-\infty, -1]$, $\left(-1, \frac{1}{2}\right]$ și $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ urmează să găsim

$M=M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Vom ordona calculele în felul următor:

$x \in (-\infty, -1]$ Ecuația devine: $1-2x+2(-x-1)=3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4x=4 \Leftrightarrow x=-1$ cum $-1 \in (-\infty, -1] \Rightarrow$ $\Rightarrow M_1 = \{-1\}$	$x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right]$ $1-2x+2(x+1)=3 \Leftrightarrow 0x=0$, ecuație verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dar deoarece ne găsim în cazul $x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right]$, vom avea: $M_2 = \left(-1, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{R} = \left(-1, \frac{1}{2}\right]$	$x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ $2x-1+2(x+1)=3 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ cum $\frac{1}{2} \notin \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ $M_3 = \emptyset$
--	--	--

$$\text{În concluzie, } M=M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{-1\} \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right] \cup \emptyset = \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

62. Să se rezolve inecuația: $|x-1| + |2x-3| > 2$.

Rezolvare. Ecuațiile $x-1=0$ și $2x-3=0$ ne conduc la considerarea intervalelor $(-\infty, 1]$, $\left(1, \frac{3}{2}\right]$, $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ și a mulțimilor soluțiilor inecuației date, situate în aceste intervale.

Ordonăm calculele ca în cazul precedent:

$x \in (-\infty, 1]$ Inecuația devine: $1-x+3-2x > 2 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$. Ne găsim în cazul $x \in (-\infty, 1]$. Așadar, $M_1 = (-\infty, 1] \cap \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$x \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$ $x-1+3-2x > 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ $\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ $M_2 = (-\infty, 0) \cap \left(1, \frac{3}{2}\right] = \emptyset$	$x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ $x-1+2x-3 > 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$ $\Leftrightarrow x \in (2, \infty)$ $M_3 = (2, \infty) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = (2, \infty)$
---	--	--

$$M=M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \emptyset \cup (2, \infty) = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty).$$

63. Să se arate că $|x^2-4x+3| + |x^2+x+2| \geq 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Se observă că polinomul x^2+x+2 are $\Delta < 0$, adică păstrează același semn (semnul lui "a") deci $x^2+x+2 > 0$, (\forall) $x \in \mathbb{R}$ adică $|x^2+x+2| = x^2+x+2$.

Inecuația devine deci $|x^2-4x+3| + x^2+x+2 \geq 3$ adică $|x^2-4x+3| + x^2+x-1 \geq 0$.

"Reperele" sînt rădăcinile lui x^2-4x+3 , adică 1 și 3.

Avem deci:

$$\begin{array}{l|l}
 x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty) & x \in (1, 3) \\
 x^2 - 4x + 3 + x^2 + x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow & -x^2 + 4x - 3 + x^2 + x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 \geq 0. & \Leftrightarrow 5x > 4 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{4}{5}, \infty\right) \\
 \text{Cum } \Delta < 0 \text{ rezultă} & \\
 2x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} & \\
 \text{deci } M_1 = \{(-\infty, 1] \cup [3, \infty)\} \cap \mathbb{R} = & M_2 = \left(\frac{4}{5}, \infty\right) \cap (1, 3) = (1, 3). \\
 = (-\infty, 1] \cup [3, \infty). & \\
 \hline
 M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, 1] \cup [3, \infty) \cup (1, 3) = \mathbb{R}.
 \end{array}$$

Să se rezolve sistemele:

$$64. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x^2 + xz + z^2 = 28 \\ y^2 + yz + z^2 = 19 \end{cases}$$

Rezolvare. Scădem din prima ecuație pe a doua și apoi pe cea de a treia din a doua și obținem: $(y-z)(x+y+z)=9$ și $(x-y)(x+y+z)=9$ deci $y-z=x-y \Rightarrow x+z=2y$. Se substituie $x+z$ cu $2y$; $(x-y)y=3 \Rightarrow 3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$; $y^4 = x^2$ se găsește $y_1=3, y_2=-3, y_3=\frac{\sqrt{3}}{3}, y_4=\frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_1=4; x_2=-4;$
 $x_3=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ și $x_4=\frac{-10\sqrt{3}}{3}$.

$$65. \begin{cases} x+y+z=30 \\ z^2=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=338 \end{cases}$$

Rezolvare. Se elimină z^2 din a doua și a treia ecuație: $x^2+y^2=169$. Din prima ecuație avem $x+y+30=z$ și ridicând la pătrat obținem: $x^2+y^2+900+2xy-60x-60y=z^2$; $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow 30(x+y)-xy=450$; $(x+y)^2-2xy=169$. Notăm cu $S=x+y$; $P=xy$ și obținem $x=5, y=12, z=13$, sau $x=12, y=5, z=13$.

$$66. \begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = -1 \end{cases}$$

Rezolvare. Se împarte prima ecuație cu x^2 ; $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0$, $3x^2 - 4xy + y^2 = -1$. Din prima ecuație obținem: $\frac{y}{x}=1$ sau $\frac{y}{x}=2$. Sistemul este compatibil și $(x,y) \in \{(-1,-2), (1,2)\}$.

$$67. \begin{cases} -4x^2 - 3xy + y^2 = -6 \\ 2x^2 - xy - y^2 = -4 \end{cases}$$

Rezolvare. Înmulțim ambii membrii ai primei ecuații cu -2 și ai celei de-a doua cu 3 obținem: $\begin{cases} 8x^2 + 6xy - 2y^2 = 12 \\ 6x^2 - 3xy - 3y^2 = 12 \end{cases}$. Adunând cele două ecuații se obține $14x^2 + 3xy - 5y^2 = 0$, apoi se studiază ca exercițiul 64 și obținem:

$$\begin{cases} \frac{y}{x}=2 \\ 2x^2-xy-y^2=-4 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \frac{y}{x}=-\frac{7}{5} \\ 2x^2-xy-y^2=-4 \end{cases} .$$

Se obține: $x_1=1, y_1=2$ și $x_2=-1, y_2=-2$.

$$68. \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \end{cases} . \quad \text{R. } x=2, y=2.$$

$$\text{Indicatie: } \begin{cases} x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \\ x+y=xy \end{cases} \Rightarrow x^2y^2-2xy=8; \quad xy(xy-2)=8.$$

Pentru următoarele sisteme de ecuații algebrice voi prezenta numai răspunsurile, rezolvarea rămânând pe seama elevului.

$$69. \begin{cases} x^2-xy-y=5 \\ 2x-3y=3 \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \left\{ (3,1); \left(-4, -\frac{1}{3} \right) \right\}.$$

$$70. \begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64 \\ x-y=-7 \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \left\{ (2,9); \left(-\frac{10}{3}, \frac{11}{9} \right) \right\}.$$

$$71. \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-xy+5y^2=7 \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \left\{ (2,1); \left(-\frac{27}{23}, -\frac{29}{23} \right) \right\}.$$

$$72. \begin{cases} xy+x+y=11 \\ x^2y+y^2x=30 \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \{(1,5); (5,1); (2,3); (3,2)\}.$$

$$73. \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=xy \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \{(2,2)\}.$$

$$74. \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x+y=1 \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \{(0,1); (1,0)\}.$$

$$75. \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43 \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \{(2,3); (-2,-3); (3,2); (-3,-2)\}.$$

$$76. \begin{cases} xy+x+y=7 \\ xy-3(x+y)=-9 \end{cases} . \quad \text{R. } (x, y) \in \{(3,1); (1,3)\}.$$

IX. EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE IN VEDEREA PREGĂTIRII PENTRU OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

1. Fie mulțimile:

$M = \{x; y; z \text{ trei numere consecutive neprime, astfel ca } xyz < 990\}.$

$N = \{a; b; c \text{ trei numere naturale consecutive astfel ca } abc = 336\}.$

a) Să se determine $M \cap N$. b) Să se arate că oricare ar fi $a; b; c$ trei numere naturale consecutive, avem abc divizibil prin 6.

R. $M = \{8; 9; 10\}; N = \{6; 7; 8\}; a) M \cap N = \{8\}.$

2. Se dă mulțimea $A = \{a; b \mid a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N} \text{ prime între ele}\}$. În ce caz $a+b$ și $a-b$ sînt prime între ele?

R. $a=2K; b=2K+1$; sau $b=2K; a=2K+1$.

3. Să se arate că fracția $\frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}$, $x \in \mathbb{N}$, este periodică

4. Să se determine mulțimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care expresia $-8 + \frac{8}{x+3}$ este un număr în \mathbb{Z} .

R. $C = \{-1; 1; -2; -4; 5; -5; -7; -11\}.$

5. Fie fracția: $\frac{6x^2-12x+6}{2x^2-7x+5}$. Să se afle mulțimea:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{6x^2-12x+6}{2x^2-7x+5} \in \mathbb{N} \right\}$$

R. $M = \{1, 2, 3, 4, 7\}.$

6. Să se arate că dacă $x \in \mathbb{N}$ atunci expresia $x(2x^2+1)$ este divizibilă prin 3.

Indicație. Se substituie x pe rînd cu $K3$; $K3+1$ și $K3-1$; unul din factorii expresiei devine multiplu de 3.

7. Să se arate că dacă x este un număr natural cu soț, atunci expresiile

$E_1 = (x^2+4)x$ și $E_2 = x(x^2-4)$ sînt divizibile prin 8.

Indicație: $x=2K$, atunci:

$$E_1 = x(x^2+4) = 2K(4K^2+4) = 8K(K^2+1) = \text{multiplu de } 8;$$

$$E_2 = x(x^2-4) = 2K(4K^2-4) = 8K(K^2-1) = \text{multiplu de } 8.$$

8. Dacă x este un număr natural oarecare, expresia $E = x(x+1)(2x+1)$ este totdeauna divizibilă prin 6.

Indicație: $x(x+1)$ este totdeauna divizibilă cu 2. Numărul x împărțit la 3 poate da resturile 0, 1 sau 2, adică x poate fi $M3$, $M3+1$ sau $M3+2$.

Vom avea:

dacă $x=M3$, E fiind și $M2$, este $M6$;

dacă $x=M3+1$ atunci $2x+1=M3$ și $E=M6$;

dacă $x=M3+2$ atunci $x+1=M3$ și $E=M6$.

9. Fie x un număr fără soț, $x \in \mathbb{Z}$. Să se arate că $E = x^2 - 1$ este divizibil cu 8.

Indicație. Un număr x fără soț este de forma $2K + 1$ deci avem $x^2 = (2K + 1)^2 = 4K^2 + 4K + 1 = 4(K^2 + K) + 1 = M8 + 1$ și deci: $E = x^2 - 1 = (M8 + 1) - 1 = M8$.

10. Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{N}$, astfel ca $\frac{x^2 + 2x + 8}{x + 2}$ să fie un număr natural.

Indicație. $\frac{x^2 + 2x + 8}{x + 2} = x + \frac{8}{x + 2}$.

R. $M = \{0; 2; 6\}$.

11. Fie $ABCD$ un trapez (AD și BC respectiv baza mare și baza mică). Paralela dusă prin C la AB taie diagonala BD în M și paralela tot la AB dusă prin D taie diagonala AC în N . Să se arate că AB este medie geometrică a segmentelor CM și DN .

Indicație. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Se cunoaște că diagonalele unui trapez se taie într-un raport egal cu raportul bazelor lui. Se scriu relațiile din trapezele $ABCD$, $ABCM$ și $ABND$ și se ține seama că: $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$.

12. Să se determine mulțimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca $\frac{x^2 + 4x + 9}{x + 4}$ să fie un număr în \mathbb{Z} .

Indicație. $\frac{x^2 + 4x + 9}{x + 4} = x + \frac{9}{x + 4}$.

R. $C = \{-13; -7; -5; -3; -1; 5\}$.

13. Se dă mulțimea A ale carei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\frac{(x+1)(x+5)}{x+6} \in \mathbb{Z}$ și mulțimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca $\frac{2x^2 - 8x + 6}{x + 4} \in \mathbb{Z}$. Să se determine $A \cap B$; $A - B$; $A \cup B$.

Indicație: $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 6} = x + \frac{5}{x + 6}$ și $\frac{2x^2 - 8x + 6}{x + 4} = 2x + \frac{6}{x + 4}$.

R. $A = \{-1; -5; -11; -7\}$;

$B = \{-2; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 10\}$; $A \cap B = \{\emptyset\}$; $A - B = A$.

14. Să se determine mulțimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care expresia $\frac{(x+6)(x-12)}{x-6} \in \mathbb{N}$.

R. $B = \{-6; -3; -2; 0; 2; 3; 4; 5; 12; 14; 24; 30; 78\}$.

15. Dacă x este un număr impar să se arate că expresia $E = x^{12} - x^8 - x^4 + 1$ este divizibilă cu 512.

Indicație. $512 = 2^9$; $E = x^8(x^4 - 1) - (x^4 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x + 1)(x - 1)(x - 1)$. Dacă x este prin ipoteză fără soț deci x^4 și x^2 sînt tot fără soț astfel cei 7 factori sînt toți numere cu soț. Pe lângă aceasta, unul din factorii $x + 1$ și $x - 1$ este divizibil cu $4 = 2^2$, dar ei figurează de cîte 2 ori.

$E = \text{multiplu de } 2^9 = \text{multiplu de } 512$.

16. Fie mulțimea M ale cărei elemente sînt trei numere consecutive $x; y; z \in \mathbb{N}$ ne-prime, astfel că $x+y+z < 28$. Să se determine elementele acestei mulțimi și să se arate că expresia $E = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)+xyz}{xy+yz+zx}$ în care x, y, z sînt elementele multimii M este divizibilă cu 3.

$$R. E=x+y+z, M=\{8; 9; 10\}.$$

17. Să se determine mulțimea G ale cărei elemente x sînt numere întregi ($x \in \mathbb{Z}$), astfel ca valoarea fracției: $F(x) = \frac{x^2+x-6}{(x^2-x-2):(x+1)}$ să fie cuprinsă între -1 și 5 .

$$R. G=\{-3; -2; 0; 1\}.$$

18. Să se arate că expresia $E = \frac{a^6+a^4b^2+a^2b^4}{a^4-a^3b+a^2b^2} + ab+b^2$ este pozitivă oricare ar fi a și $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$R. E=(a+b)^2+b^2.$$

19. Se dă tetraedrul $VABC$ cu baza un triunghi ABC ale cărui laturi sînt $AC < AB < BC$. Se cunoaște că $AB+BC+AC=3(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$ cm și $AB+AC=3(1+\sqrt{2})$ cm. Muchiile $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC]$ și $m(\angle AVB)=90^\circ$; $m(\angle AVC)=60^\circ$; $m(\angle BVC)=120^\circ$. a) Să se demonstreze că triunghiurile VBC și VAC sînt echivalente. b) Să se afle aria laterală și volumul tetraedrului.

$$R. b) Al. = \frac{9(\sqrt{3}+1)}{2} \text{ cm}^2; V = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3.$$

20. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$, astfel ca valoarea fracției: $F(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$ să fie cuprinsă între -3 și 2 .

$$\text{Indicație. } F(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}.$$

$$R. A=\{3; 4\}.$$

21. Fie a, b, c laturile unui triunghi ABC . Să se calculeze volumul piramidei $SABC$ știind că $\angle BSC \equiv \angle CSA \equiv \angle ASB$ și au măsurile de 90° .

$$\text{Indicație: Fie } SA=x; SB=y; SC=z, \text{ atunci } V = \frac{xyz}{6}, \text{ însă } x = \frac{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{2}; y = \frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{2};$$

$$z = \frac{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}{2}; V = \frac{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}}{48}.$$

22. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu dimensiunile $a\sqrt{7}$ și $a\sqrt{5}$ se ridică perpendicularele $AN = a\sqrt{2}$ și $CM = 3a\sqrt{2}$. Fie O intersecția diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ (dimensiunile în cm). a) Să se determine perimetrul triunghiului MNO . b) Să se afle volumul poliedrului $MNABCD$.

Indicație. Vezi piramida cu vârful în B și baza $AMNC$ din figura IX.1

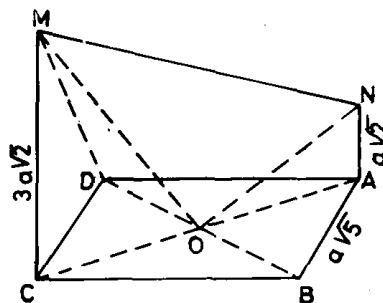


Fig.IX.1

$$R. a) a(3\sqrt{5}+\sqrt{21}) \text{ cm}; b) 8a^3\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

23. Se dă fracția : $F(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$.

a) Să se determine mulțimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care valoarea lui $F(x)$ este cuprinsă între -2 și 5 . b) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{Z}$ expresia $F(x)$ este negativă? c) Să se determine mulțimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $F(x) \cdot \frac{x-2}{8} \in \mathbb{Z}$. d) Pentru ce valori ale lui x expresia $F(x) \cdot \frac{8}{x+4}$ este un număr întreg?

$$\text{R. a) } B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty \right) \right\}; \text{ b) } -4 < x < 2; \{3; -2; -1; 0; 1\};$$

$$\text{c) } x = 8; \text{ d) } \{-10; -6; -3; -1; 0; 6\}.$$

24. Baza piramidei $SABCD$ este un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea de 16 cm, lățimea $BC = 12$ cm și înălțimea piramidei cade în centrul bazei. La mijlocul muchiei SB se ia un punct M , iar pe mijloacele laturilor AB și BC punctele N , respectiv P . $m(\angle MNP) = 60^\circ$. Să se afle: a) Volumul solidului $BNPM$; b) volumul piramidei $SABCD$.

$$\text{R. a) } V = 40\sqrt{3} \text{ cm}^3; \text{ b) } V = 640\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

25. O piramidă cu vârful S are ca bază triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, iar înălțimea ei cade în A . Ipotenuza este de 25 cm, o catetă este cu 5 cm mai mare decît cealaltă și înălțimea piramidei este egală cu suma catetelor. a) Să se afle ariile laterală și totală și volumul piramidei. b) Dacă notăm unghiul muchiei SB cu planul bazei cu α și al muchiei CS cu planul bazei cu β , să se demonstreze relația: $\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta = 1$

$$\text{R. a) } Al = 1075 \text{ cm}^2; At = 1225 \text{ cm}^2; V = 1750 \text{ cm}^3.$$

26. Să se determine a și b astfel încît polinomul $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + bx + 3$ împărțit la $x-2$ să dea restul 3 și împărțit cu $x-1$ să dea tot restul 3 .

$$\text{R. } a = -2; b = 2.$$

27. Un cilindru cu înălțimea de 10 cm are baza înscrisă într-un trapez isoscel al cărui perimetru este de 40 cm, iar baza mică de 8 cm. Pe axa cilindrului se ia un punct N situat la distanța x de baza cilindrului și se scoate conul care are ca bază, baza cilindrului și vârful în N . 1) Să se exprime în funcție de x volumul corpului rămas după scoaterea conului menționat. 2) Să se alcătuiască tabloul de variație al funcției. 3) Să se construiască graficul acestei funcții. (Se va lua 1 cm pentru $10\pi \text{ cm}$) 4) Să se determine x astfel încît corpul rămas să aibă un volum dat $b \text{ cm}^3$. 5) Intre ce limite trebuie cuprins numărul b pentru ca problema să fie posibilă ?

$$\text{R. 1) } V = 240\pi - 8\pi x; x \in [0, 10]. \text{ 5) } 0 \leq x \leq 10 \text{ se obține } 160\pi \leq b \leq 240\pi.$$

28. 1) Să se discute sistemul
$$\begin{cases} \frac{x}{m-1} + \frac{y}{m} = 2, \\ 2x + 3y = 5m - 2 \end{cases}$$
 2) Să se găsească soluția sistemului în

cazul cînd sistemul este compatibil și determinat. 3) Pentru ce valori ale lui m , x și y reprezentînd soluția sistemului, rădăcinile sînt invers proporționale cu numerele 2 și $\frac{3}{2}$?

R. 1) $m \neq 0$ și $m \neq 1$ fracțiile să aibă sens. Pentru $m \neq -2$ sistemul este compatibil și determinat. Pentru $m = -2$ sistemul este nedeterminat. 2) $x = m - 1$; $y = m$; 3) $m = 4$.

29. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ în care $AB = AD = a$ și $m(\angle CAC') = 45^\circ$. La ce distanță de A se găsesc proiecțiile ortogonale ale punctelor B, C, D pe diagonala AC' ?

Indicație. Se observă triunghiurile ABC' și ACC' . Fie I proiecția lui B pe AC' : $AI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$. D și B fiind simetrice în raport cu planul ACC' , proiecția lui D pe AC' coincide cu I . Fie K proiecția lui C pe AC' ; $AK = a$.

30. Știind că $x + y = a$ și $xy = b$, să se calculeze în funcție de a și b expresiile: a) $x^2 + y^2$; b) $x^3 + y^3$; c) $x^4 + y^4$.

R. a) $a^2 - 2b$; b) $a^3 - 3ab$; c) $(a^2 - 2b)^2 - 2b^2$

31. Baza tetraedrului $SABC$ este triunghiul ABC în care latura BC este egală cu înălțimea $AD = a$. a) La ce distanță de vârful A trebuie să se ducă o paralelă MN la BC , pentru ca aria trapezului $MNCB$ să fie de trei ori mai mare decît aria triunghiului AMN ? b) Fie SA înălțimea tetraedrului $= 2a$ și $m(\angle ASD) = \alpha$. Să se arate că $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}$. c) Să se determine volumul tetraedrului dat.

R. $a^3/3$.

32. Se dă expresia: $f(x) = \frac{8(2x^3 - 6x^2 + 6x - 4)}{(2x^2 - 2x + 2)(x - 2)^2}$. a) Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x)$ este cuprinsă între -5 și 9 . b) Pentru ce valori ale elementelor mulțimii, $f(x)$ este un număr întreg?

R. $x \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{26}{9}, \infty\right)$; $M = \{-6; -2; 0; 1; 3; 4; 6; 10\}$.

33. Un paralelipiped dreptunghic are înălțimea egală cu b și bazele $ABCD$ (respectiv $A' B' C' D'$) pătrate de latură a . Pe muchiile BB' și DD' se iau segmentele BM , respectiv DN de lungime x . Să se studieze forma secțiunii definite de planul AMN în paralelipiped, în funcție de x .

Indicație. Pentru $x \leq \frac{b}{2}$ secțiunea este un romb; $\frac{b}{2} < x < b$ (pentagon), dacă $x = b$ secțiunea este un triunghi isoscel.

34. Să se determine a și b numere naturale știind că: $(1+a)(1-b)=10-2ab$.

R. $a=3; b=3$.

35. Să se determine valoarea numerică a expresiei:

$$y^2 - 1 + 4x^4 y^2 - 4x^2 y^2 \text{ știind că } x^2 = \frac{1}{2}$$

R. -1

36. Să se determine x și y (numere naturale) știind că: $(2-x)(2+y)+3xy=12$.

R. $x=2; y=2; x=0; y=4$.

37. Se dă o piramidă pătratică regulată cu vârful V și baza $ABCD$ ($VA=VB=VC=VD=a$) și unghiurile de la vîrf ale fețelor laterale au măsurile de 30° . Se consideră linia ce pornește din vârful A și merge pe toate fețele laterale pînă revine în punctul A (traseul se compune din segmente de dreaptă). Se notează cu B', C', D' punctele unde linia traversează respectiv muchiile VB, VC, VD . a) Să se desfășoare pe un plan suprafața laterală a piramidei și să se traseze pe ea linia parcursă. b) Cînd este drumul acesta cel mai scurt și în acest caz să se afle lungimea lui? c) Să se afle măsurile unghiurilor sub care linia trasată taie muchiile laterale.

R. b) $a\sqrt{3}$; c) $120^\circ; 90^\circ; 60^\circ$

38. Să se arate în ce condiții produsul a 3 numere consecutive este divizibil cu 24?

Indicație. Se ține seamă că $n(n+1)(n+2)$ este divizibil cu 6 și $2K(2K+1)(2K+2)$ se mai poate scrie $4K(K+1)(2K+1)$; $K \in \mathbb{N}$.

R. Primul număr să fie de forma $2K$.

39. Să se găsească toate numerele naturale x pentru care numărul x^4+4 este prim.

Indicație. Se va descompune expresia în doi factori și se va pune condiția ca unul din factori să fie 1; se găsește că $x=1$.

40. Considerăm rotația completă a unui triunghi ABC în jurul tangentei în A la cercul circumscris. Să se exprime, aria corpului obținut prin rotirea lui BC , cu ajutorul laturilor a, b, c ale triunghiului.

Indicație. Se obține un trunchi de con. Ducînd înălțimea din A , se formează două triunghiuri asemenea cu triunghiurile formate de perpendicularele coborîte din B și C pe tangentă cu laturile AB și AC . Se găsește: Aria laterală tr. con = $\frac{2\pi S(b^2+c^2)}{bc}$; (S =aria $\triangle ABC$). Dacă $m(\angle A)=90^\circ$, atunci aria corpului descris de BC este $a^2\pi$.

41. Se consideră polinomul cu coeficienți întregi: $P(x)=ax^2+bx+c$. Să se arate că dacă pentru orice număr întreg m , restul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $x-m$ este un multiplu de 3, atunci numerele a, b, c se divid prin 3.

42. a) Să se arate că expresia: $E=xy(xy-9)+2(x^2+y^2)+(x-y)(3xy-6)$ este divizibilă prin 4 oricare ar fi x și y numere întregi. b) Să se simplifice fracția: $\frac{E+4}{y^2+3y+2}$. c) Să se

arate că $\frac{E+4}{x^2-3x+2} \cdot \frac{E+4}{y^2+3y+2}$ este divizibilă prin 4. d) Să se verifice identitatea:

$$\frac{E+4}{(x-1)(x-2)} = (y+1)(y+2).$$

Indicație. După desfacerea parantezelor se adaugă și se scade 4; se obține:

$x^2y^2+3x^2y+2y^2-3xy^2-9xy-6x+2x^2+6y+4-4$. Expresia se poate scrie : $(x-1)(x-2)(y+1)(y+2)-4$, care este divizibilă prin patru, fiindcă prima parte este produs de câte 2 numere consecutive, deci se divide cu 4 și 4 este și el divizibil prin el însuși.

R. b) $(x-1)(x-2)$.

43. Să se arate că suma formată dintr-un număr pozitiv oarecare (diferit de 1) și inversul său este mai mare decât 2.

44. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui x pentru care

$$f(x) = \frac{2x^2+16x-18}{x^2+5x-6} \text{ este un număr întreg și pozitiv.}$$

$$\text{Indicație. } f(x) = \frac{2(x+9)}{x+6} = \frac{2x+18}{x+6} = \frac{2x+12+6}{x+6} = \frac{2(x+6)+6}{x+6} = 2 + \frac{6}{x+6}.$$

R. $A = \{-12; -5; -4; -3; 0\}$.

$$45. \text{ Se dă expresia : } f(x) = \frac{1 + \frac{x}{2 + \frac{1}{x}}}{x^4 + 4x^2 + 1} \cdot 8(x-1)^2. \text{ Arătați că } f(x); (x \in \mathbb{N}) \text{ este ireductibil.}$$

$$46. \text{ Să se efectueze : } \frac{a^2+b+1-2a\sqrt{b}+2a-2\sqrt{b}}{a^2-b-1+2\sqrt{b}} - \frac{a-\sqrt{b}+1}{a+\sqrt{b}+1}.$$

Indicație. Se transformă mai întîi termenii primei fracții în produse de factori.

R. 0.

47. Fie b aria bazei unei piramide, h înălțimea și b' aria secțiunii făcută printr-un plan paralel cu baza, la o distanță de vîrf egală cu o treime din înălțime. Să se

demonstreze că volumul piramidei se poate exprima astfel : $V = \frac{h(b+3b')}{4}$.

$$\text{Indicație. } b' = \frac{b}{9}.$$

$$48. \text{ Să se simplifice : } \frac{x^2+2x+2x\sqrt{y}+y+2\sqrt{y}}{x^2-x+x\sqrt{y}-\sqrt{y}} \cdot \frac{x-1}{x+\sqrt{y}+2}.$$

R. 1.

49. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

R. $x=2; y=3; x=3; y=2; x=1; y=-6; x=-6; y=1$.

$$50. \text{ Să se arate că : } \frac{a^5+b^5+2a^4b+2ab^4+a^3b^2+a^2b^3}{(a+b)^2} > a^2b+ab^2 \text{ pentru } a>0 \text{ și } b>0.$$

51. Să se demonstreze că dacă $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$, atunci:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$;

b) $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$;

c) $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc$.

Indicație. Se împarte cu abc și se știe că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

52. Într-un triunghi isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, construim $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și $DM \perp AC$ ($M \in AC$). Fie G mijlocul lui DM ; $BM \cap AG = \{N\}$. Să se arate că $AN \perp BM$.

Indicație. Fie P mijlocul lui MC . Se observă cele trei înălțimi ale triunghiului ADP și se ține seamă că $DP \parallel BM$ este linia mijlocie în triunghiul BMC .

53. Să se demonstreze următoarea inegalitate $a^2 - ab + b^2 > 0$, cu condiția: $a > 0$; $b > 0$.

Indicație. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

54. Se dă expresia: $f(x) = \frac{x^5 + x + 1}{x^2 + x + 1} - x^3 + 2x^2 + 2x$.

Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ este pozitivă.

Indicație. Se efectuează împărțirea și se observă cîțul și împărțitorul.

55. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc în exterior, pătratele $ACDE$ și $ABGF$. Fie AN mediană în triunghiul ABC ($N \in BC$), $NA \cap EF = M$. Să se arate că $MN \perp FE$.

Indicație. Fie A' simetricul punctului A în raport cu N . Se formează paralelogramul $ABA'C$; se studiază triunghiurile AEF și $A'CA$ care sînt congruente; $m(\angle BAC) + m(\angle PAE) = 180^\circ$.

56. Se dă un pătrat $ABCD$. Se construiește pe latura BC ca bază, în interiorul pătratului, un triunghi isoscel OBC , avînd măsurile unghiurilor egale de 15° (fig.IX.2). Să se demonstreze că triunghiul OAD este echilateral.

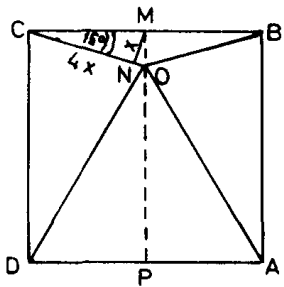


Fig.IX.2

Indicație. a) În triunghiul dreptunghic OMC , înălțimea $MN=x$ este a patra parte din $OC=4x$. b) Se exprimă în două moduri OM din care rezultă $16x^2 - \frac{a^2}{4} = OM^2 = 4x \cdot ON$; dar $ON=4x-NC$ și $NC^2 = \frac{a^2}{4} - x^2$; reiese că $OP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; rezultă că triunghiul AOD este echilateral.

57. Să se arate că dacă există relațiile: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x + y + z = 1$, atunci $xy + yz + zx = 0$.

58. Se dau două cercuri de raze r_1 și r_2 , unul din ele avînd centrul O pe celălalt cerc. Tangenta într-un punct M , variabil pe cercul O , taie al doilea cerc în P și Q . Să se demonstreze că $2r_1r_2 = OQ \cdot OP$ (fig. IX.3).

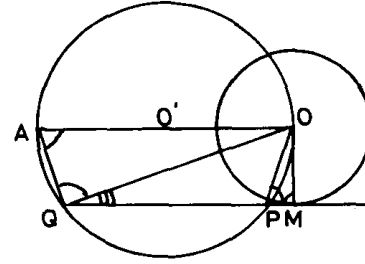


Fig. IX.3

59. Dîndu-se relațiile: $x^3 + y^3 + z^3 = 1$; $x + y + z = 1$. Să se arate că există egalitatea $(1-x)(1-y)(1-z) = 0$.

Indicație. $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z)$.

60. Dacă $a+b+c=0$, atunci avem: $c^2 - a^2 - b^2 = 2ab$

61. Într-un tetraedru regulat $SABC$ de muchie a și vîrfurile S se face o secțiune printr-un plan, ce trece prin A, P, Q (P și Q sînt situate pe SC respectiv SB) astfel încît $SP = 2PC$ și $SQ = 2QB$. Să se afle aria secțiunii PAQ și volumul piramidei $ABCPQ$ cu vîrfurile în A .

R. a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2$; b) $\frac{2a^3\sqrt{2}}{27} \text{ cm}^3$.

62. Fie piramida $VABCD$ cu baza un trapez $ABCD$, ($AD=BC=10 \text{ cm}$ și baza mare $AB=15 \text{ cm}$). Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în O ; $VO=3 \text{ cm}$ este perpendiculară pe planul $ABCD$; $BO=6 \text{ cm}$. Să se calculeze perimetrul ΔVOD .

R. 12 cm .

63. Laturile unui triunghi dreptunghic sînt: a, b, c (a fiind ipotenuza, iar h înălțimea dusă din vîrfurile unghiului drept). Dacă relația $a^2 - 4ah + h^2 = 0$ satisface un triunghi dreptunghic, atunci și relația $b^4 - 4b^3c + 3b^2c^2 - 4bc^3 + c^4 = 0$ satisface triunghiul dat.

64. Într-un triunghi ABC se duce prin B și prin mijlocul O al medianei AD o dreaptă care taie pe AC în E . Să se arate că $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ și $\frac{OE}{OB} = \frac{1}{3}$.

65. Să se arate că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare atunci există relația:

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 > 0.$$

66. Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{a-1} + \frac{y}{2a+1} = 1, & a \neq 1 \text{ și } a \neq -\frac{1}{2} \\ 4(x+y) = -12. \end{cases}$$

R. $a \neq -2$ sistem compatibil și determinat; $a = -2$ sistemul este nedeterminat.

67. Se dă o prismă ce are ca bază paralelogramul $ABCD$ cu perimetrul de 30 cm . Bisectoarele unghiurilor consecutive A și B ale paralelogramului se intersectează în M ($M \in DC$). Se știe că lungimile MB și MA sînt exprimate prin două numere naturale. Se mai știe că muchia prisme drepte are lungimea de $3,6 \text{ cm}$ și este congruentă cu

VM înălțimea piramidei ce are ca bază triunghiul AMB . Se cere:

a) volumul prisme; b) aria laterală a piramidei $VMAB$.

Indicație. $\triangle AMB$ dreptunghic are ipotenuza $AB=10$ cm. Notăm $MA=x$; $MB=y \Rightarrow 100-x^2=y^2 \Rightarrow (10-x)(10+x)=y^2$, dar $x < 10 \Rightarrow (10-x) \in \mathbf{N}$ este cuprins între 1 și 9, iar $(10+x)$, $x \in \mathbf{N}$ cuprins între 9 și 19. Prin încercări, numai 6 și 8 dau un pătrat perfect.

R. a) $V=172,8 \text{ cm}^3$; b) $Al=74,4 \text{ cm}^2$.

68. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC , două drepte BM și CN ($M \in AC$); ($N \in AB$) se intersectează pe înălțimea AD ($D \in BC$), atunci această înălțime este bisectoarea unghiului MDN .

Indicație. $NN' \perp BC$; $MM' \perp BC$; $\triangle NN'D \sim \triangle MM'D$.

69. Se dă expresia : $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{x}}}}$.

a) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care fracția dată este negativă.

b) Să se determine x pentru care fracția dată este un număr întreg negativ.

R. a) $\frac{3}{4} < x < \frac{4}{3}$; b) 0.

70. Se dă polinomul $P(x)=12x^3-40x^2+27x-5$. a) Să se determine a, b, c astfel încât $P(x)$ să poată fi pus sub forma $(3x-1)(ax^2+bx+c)$. b) Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care $P(x)=0$.

R. a) $a=4$; $b=-12$; $c=5$; b) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$.

71. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul trei în care x are coeficientul 1, știind că împărțind $P(x)$ la $x-1$; $x-2$; $x-3$, obținem de fiecare dată restul 6.

R. x^3-6x^2+11x .

72. Să se demonstreze că un tetraedru regulat are două muchii perpendiculare.

73. Laturile unui triunghi cu măsura unui unghi de 60° sînt a, b, c . Să se arate că în acest caz, există relația : $a^2+b^2-c^2=ab$.

74. Să se determine x, y, z numere naturale care verifică egalitatea : $x^y{}^z=8$.

Indicație. Dacă $x=1$ egalitatea este imposibilă; dacă $x \geq 2 \Rightarrow y^z \leq 3 \Rightarrow y^z \in \{1, 2, 3\}$

R. (8,1,1) și (2,3,1).

75. Se dă sectorul circular cu raza de 27 cm și unghiul la centru de 60° . Se cere volumul conului ce are ca bază cercul înscris în sectorul dat și înălțimea mai mare ca diametrul cercului de bază cu 0,1(6) din acesta.

R. $V=576\pi \text{ cm}^3$.

76. Se dă polinomul $f(x, y) = 9x^4 + 12x^2y + 6y^2 - y^4 - 1$. Ce devine polinomul $f(x, y)$ dacă $3x^2 + 2y + y^2 = 1$.

R. = 0.

77. Se dă un polinom $P(x)$ a cărui sumă a coeficienților este 0 și un alt polinom de gradul 1 000 a cărui sumă a coeficienților este 200. Să se afle suma coeficienților restului împărțirii polinomului de gradul 1 000 la $P(x)$.

R. 200.

78. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, se știe că $BC = 2AC$. Să se arate că

$$\frac{(\sin B + \cos B)^2}{\operatorname{ctg} C} - \frac{6 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \cos C + \sin B.$$

79. Fiind dată mulțimea $M = \{0; 2; 3; 4; 5; 6\}$ și polinomul $f(a, b) = a^4 - b^4 - 4a^2b + 2b^2 - 1$, să se arate că dacă $a - b = 1$, atunci valoarea numerică a polinomului $f(a, b) \in M$.

Indicație. Se descompune $f(a, b)$ într-un produs de trei factori.

R. $f(a, b) = 0$.

80. Într-un triunghi dreptunghic ABC , notăm cu O mijlocul ipotenuzei BC . $m(\angle B) > m(\angle C)$. Dreapta BC intersectează perpendiculara din A pe OA în D . Pe dreapta BD luăm segmentul $[DE] \equiv [AD]$ (D este situat între E și B).

a) Să se determine măsura unghiului CAE .

b) Să se arate că perpendiculara în A pe AE este bisectoarea unghiului BAC .

R. $m(\angle CAE) = 135^\circ$.

81. Fiind dată egalitatea $3x + 6y = 95$. Să se arate că nu există soluții în mulțimea numerelor naturale care să satisfacă egalitatea.

82. Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc condițiile: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $(B - A) \cdot (A - B) = \{(1, 6); (1, 8); (1, 9); (5, 6); (5, 8); (5, 9); (7, 6); (7, 8); (7, 9)\}$.

Indicație. $B - A = \{1, 5, 7\}$; $A - B = \{6, 8, 9\}$. Dacă $B - A = \{1, 5, 7\} \Rightarrow \{1, 5, 7\} \subset B$ și $6 \notin A$. Dacă $A - B = \{6, 8, 9\} \Rightarrow \{6, 8, 9\} \subset A$ și $1 \notin B$ nu conține nici unul din aceste elemente. Să cercetăm cui aparțin 2 și 3. Dacă $2 \in A$ și $2 \notin B \Rightarrow 2 \in A - B$ fals. Dacă $2 \notin A$ și $2 \in B \Rightarrow 2 \in B - A$. Dacă $2 \in A$ și $2 \in B \Rightarrow 2 \in A - B$ și dacă $2 \notin B - A \Rightarrow 2 \in A \cap B$. Se cercetează analog și pentru 3; $3 \in A \cap B$.

R. $A = \{2, 3, 6, 8, 9\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

83. Dacă $a > 0$; $b > 0$ și $a + b = 1$, să se arate că $0 \leq ab \leq \frac{1}{4}$.

Indicație. $(a - b)^2 \geq 0$; $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$.

84. Să se arate că polinomul $16x^4 + 2^{99} - 8^{33} - 16x^2 - 3^{69} + 27^{23} + 3^{27}$: $27^9 + 23 \geq 20$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

85. Un loc de formă circulară cu diametrul de 16 m este împărțit în 4 fișii de aceeași lățime. Pe cele două fișii din mijloc s-au plantat pomi iar pe celelalte două s-au semănat flori. 1) Prin cuplarea celor două fișii semămate cu flori s-ar obține un teren

de forma unui cerc? (Justificați răspunsul.) 2) Să se calculeze aria fiecărei fișii de teren.

R. Două fișii de câte $39,68 \text{ m}^2$. Două fișii de câte $60,80 \text{ m}^2$.

86. Să se arate că fracția $f(x) = \frac{x^4 + 5x^2 + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$; $x \in \mathbb{N}$, este periodică.

Indicație. $f(x) = \frac{(x^2+1)(x^2+4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ din care se vede că numitorul este un multiplu de trei și, ca $f(x)$ să fie periodică, trebuie ca numărătorul să nu fie M3.

87. Aria totală a unui con este egală cu aria laterală a unui cilindru a cărui rază este $\frac{11\pi}{9}$ din generatoarea sa. Conul a cărui arie laterală este de 10 cm^2 este obținut dintr-un sector de cerc cu unghiul la centru de 36° . Să se calculeze aria totală a cilindrului.

R. $\left(11 + \frac{11^2\pi}{9}\right) \text{ cm}^2$.

88. Se dă expresia: $\frac{\left(\frac{x^2-x}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^3+x-x^2-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{(27-125x^3):(25x^2+9+15x)}$.

Să se afle pentru ce valori ale lui x expresia $f(x) \leq -1$.

R. $x \in \left[-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(\frac{3}{5}; 1\right]$.

89. Fie cercul O și o coarda AB . Prin punctul M , mijlocul arcului AB se duc două coarde arbitrare care intersectează coarda AB respectiv în E și C iar cercul în D și F . Să se arate că patrulaterul $DFEC$ este inscriptibil.

Indicație. $m(\angle MFD) + m(\angle DCE) = 180^\circ$.

90. Să se arate că triunghiul ale cărui laturi x, y, z satisfac relația: $\frac{z-y}{x} + \frac{x-z}{y} - \frac{y-x}{z} = 0$ este isoscel.

91. Fie mulțimile: $A = [-6, 0) \cup [5, 9)$; $B = (-4, 5] \cup (8, 20]$. Să se determine: $A \cap B$; $A \cup B$.

Indicație. Soluția grafică $A \cap B = (-4, 0) \cup \{5\} \cup (8, 9)$; $A \cup B = [-6, 20]$ (fig. IX.4)

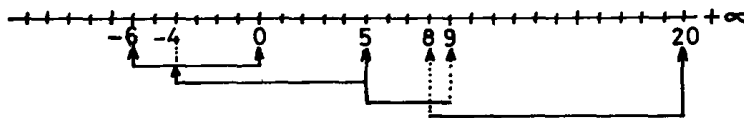


Fig. IX.4

92. În cercul O se duce diametrul AB ; pe tangenta în A , se iau de o parte și de alta a punctului A , două puncte arbitrare C și D . Dreptele BC, BD taie cercul în punctele E și F . Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil.

93. La o împărțire deîmpărțitul a fost 11 897 și restul 279. Se mai știe că primul rest parțial este 247. Să se reconstituie împărțirea.

Indicație. Primul rest fiind 247, înseamnă că primul deîmpărțit parțial este 1 189, deci al doilea deîmpărțit parțial este 2 477 și efectuând împărțirea obținem a doua cifră a cîtelui și restul 279.

$2\ 477-279=2\ 198$ care este divizibil cu împărțitorul, b fiind a doua cifră a cîtului, una din cifrele de la 1 pînă la 9. Se verifică ușor că $b=7$ și $i=314$. Acum e ușor de aflat prima cifră a cîtului a , deci $\overline{ab}=37$ și împărțitorul este 314.

94. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care expresia $f(x) = \left[\left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^2 + 1 + \frac{4x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{2x^2+x-1}{9x^2}$ este negativă.

$$\text{R. } -1 < x < \frac{1}{2}.$$

95. Două cercuri se taie în A și B . Tangentele în A la cele două cercuri le reține în punctele C și D . Știind că $AD=10$ cm; $BD=8$ cm și $BC=2$ cm, să se calculeze AC .

$$\text{R. } AC=5 \text{ cm.}$$

96. Se dă polinomul $f(x, y) = x^6y^2 + 2x^4y - 2x^3y^2 - 2xy + y^2 - 3x^2$. Să se determine valoarea numerică a lui $f(x, y)$ pentru $x^3-1=0$.

$$\text{R. } f(x, y) = -3.$$

97. Se dau polinoamele: $E_1 = 2a^4x + 8x(b^2+1) + a^4 + 4b^2 + 4$; $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$.
 $E_2 = (2ax+2b)^2 - (x+2)^2$.

a) Să se arate că oricare ar fi a și b , E_1 depinde numai de x dacă $E_1=0$.

b) Oricare ar fi x , să se determine a și b pentru care $E_2=0$.

$$\text{Indicație. } E_1 = (2x+1)(a^4+4b^2+4) \text{ dar } a^4+4b^2+4 \neq 0;$$

$$E_2 = [x(2a+1)+2b+2][x(2a-1)+2b-2].$$

$$\text{R. } E_2=0 \Rightarrow b=1; a=\frac{1}{2} \text{ sau } a=-\frac{1}{2}; b=-1.$$

98. Se dă $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{4x^2-7x-2}$. Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ se simplifică?

$$\text{R. } M5+1.$$

99. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ pentru care expresia $\frac{6x+5}{7x+4}$ se simplifică.

Indicație. Dacă două numere au un divizor comun și diferența lor are acel divizor.

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x+4-6x-5=x-1 \\ 42x+35-42x-24=11 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-1}{11} \text{ ca să fie un număr întreg } x-1=M11 \Rightarrow x=M11+1.$$

100. Să se verifice egalitățile:

$$1) M-(N \cup C) = (M-N) \cap (M-C),$$

$$2) M-(N \cap C) = (M-N) \cup (M-C)$$

pentru $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; $N = \{2; 4; 6; 8; 10\}$; $C = \{3; 6; 9\}$.

Indicații. 1) $N \cup C = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$, $M-(N \cup C) = \{1; 5; 7\}$, $M-N = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $M-C = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}$. Deci $M-(N \cup C) = (M-N) \cap (M-C) = \{1, 5, 7\}$.

2) $N \cap C = \{6\}$; $(M-N) \cup (M-C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$. $M-(N \cap C) = M-\{6\} = \{1, 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$.

Se verifică că $M-(N \cap C) = (M-N) \cup (M-C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$.

101. Se dă polinomul $f(a, b) = 16a^4 - 8a^2b^2 - 4b^2 + b^4 - 4b - 1$.

Să se calculeze valoarea polinomului $f(a, b)$ pentru $2a - b = 1$.

R. 0.

102. Se dă expresia $f(x) = \frac{3x+10}{2x+1}$. Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x)$ se simplifică

R. $M = \{17, -9\}$.

103. Să se stabilească domeniul pe care inegalitatea este adevărată:

$$\left[\frac{x^4}{(x^2-1)^2} + \frac{2x^2}{1-x} \cdot \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x}{x^3-x+x^2-1} + 1 \right] : \frac{1}{x^4-2x^3+2x-1} < 0.$$

R. $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

104. Se dă prisma $ABCD A'B'C'D'$ cu baza un dreptunghi ale cărui dimensiuni sînt invers proporționale cu numerele $3/2$ și 2 . Lungimea dreptunghiului AB este cu $0,5$ cm mai mare decît lățimea. Știind că planul $ABC'D'$ face cu planul bazei un unghi de 60° , să se afle volumul prisme.

R. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$.

105. Dintr-un sector circular se confecționează un con cu unghiul de la vîrf de 90° în care $5/4 \sqrt{2}$ din aria laterală este echivalentă cu aria totală a unui cilindru înscris în con a cărui rază este de 5 cm. Să se determine elementele sectorului de cerc din care s-a confecționat conul.

R. $m_{\text{unghi}} = 180\sqrt{2}^\circ$; $R_{\text{cerc}} = 8\sqrt{2}$ cm; $L_{\text{arc de cerc}} = 16\pi$ cm.

106. Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ expresia:

$$f(x) = \left[\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)(x + 1)} + \frac{1}{x} \right] \cdot \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \frac{(8 + x^3)^3}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} : \frac{x + 2}{x^2}$$
 este negativă ?

R. $x \in (-\infty; -1) \cup (-2; \infty)$.

107. Fie trapezul $ABCD$ cu unghiurile de la bază de 30° și 45° . Se știe că jumătate din înălțimea trapezului este cu 1 cm mai mică decît $2/3$ din baza mică și raportul dintre baza mică și înălțime este $3/2$. Să se pună în evidență (schiță) corpurile ce se formează prin rotația trapezului în jurul laturii neparalele, corespunzătoare unghiului de 30° și să se calculeze elementele acestor corpuri.

108. Se dau expresiile:

$$A = \left(\frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} + \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right), \quad B = \left[\frac{x}{x+1} - \frac{x^3}{x-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \right] \cdot \frac{x^2}{2x+1}.$$

Să se arate că $A/B < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

109. Dintr-un sector circular cu aria de $240\pi \text{ cm}^2$ și unghiul la centru de 216° se confecționează un con. La $3/4$ din înălțimea conului față de vîrf se face o secțiune paralelă cu baza. Să se calculeze aria sferei înscrisă în conul ce are ca bază cercul de secțiune.

R. $81\pi \text{ cm}^2$.

110. Să se determine mulțimea M ale cărei elemente $x, y \in \mathbf{N}$, știind că x și y sînt numere consecutive neprime, astfel încît $xy < 80$.

R. $M = \{8; 9\}$.

111. Să se determine mulțimile A și B cunoscînd că:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}; A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}, 7 \notin A - B; 6 \notin B - A.$$

R. $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}; B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$.

112. Să se arate că dacă între laturile unui triunghi a, b, c există relația:
 $b^2(c^4 + a^4 - b^4) = c^2(a^4 + b^4 - c^4)$ atunci triunghiul este dreptunghic sau isoscel.

Indicație. Relația se mai poate scrie: $b^6 - c^6 - a^4(b^2 - c^2) + b^2c^2(b^2 - c^2) = 0$ sau

$$(b^2 - c^2)[(b^2 + c^2)^2 - a^4] = 0.$$

113. Se consideră polinoamele:

$$P(x) = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d,$$

$$Q(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c.$$

Dacă $P(x) : Q(x)$ să se arate că $P(x)$ este un pătrat perfect, iar $Q(x)$ un cub.

Indicație. Dacă $P(x) : Q(x)$ va rezulta un cît de gradul I, de exemplu $(x+m)$ și va trebui

să avem: $(x+m)(x^3 + 3ax^2 + 3bx + c) = P(x)$. Se compară coeficienții și se obține:

$$m=a; b=a^2; c=a^3; P(x) \text{ devine: } x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x+a)^4 \text{ iar } Q(x) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3.$$

114. Să se arate că inegalitățile următoare nu pot fi simultan adevărate:

$$a+4 < 2b+c; a+2 > b; b+c < 1.$$

115. Să se arate că inegalitățile următoare nu pot fi simultan adevărate:

$$x+3 < 2y+2z; x-4 > y; y+2z < 3.$$

116. Să se determine mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + |x| - 12 = 0\}; B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - |x| - 6 = 0\}.$$

R. $A=B=\{-3; 3\}$.

117. Se dă inegalitatea următoare (în care $x \in \mathbf{N}$ și $y \in \mathbf{N}$);

$$\frac{1}{xy^2} + \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^4} + \frac{2}{x-y^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \right)}{(2xy^2 - x^2 - y^4) : xy^2} \geq \frac{3-x^2-2x}{x+3}.$$

Să se arate în ce condiții inegalitatea este adevărată.

R. $x \geq 1$.

118. Să se arate că fracția $E = \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$ este periodică, $x \in \mathbb{N}^*$.

119. Un teren de forma unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 15° este folosit astfel: $\frac{2}{9}$ din suprafața lui și încă un ar s-a amenajat pentru teren de sport, $\frac{5}{13}$ din suprafața rămasă pentru construcții și restul de 0,08 ha pentru cultivat zarzavaturi. Se cere: a) să se determine câți metri pătrați au acoperit terenurile pentru sport și construcții; b) perimetrul terenului. c) Știind că terenul rezervat pentru sport s-a amenajat pentru tenis și pentru fotbal astfel încât suprafețele lor sînt invers proporționale cu numerele 5 și respectiv $\frac{5}{9}$, să se calculeze suprafețele acestor terenuri.

R. a) 500 m^2 ; 500 m^2 ; b) $P \approx 267 \text{ m}$; c) 50 m^2 și 450 m^2 .

120. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ pentru care propoziția următoare este adevărată:

$$\frac{x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} \geq \frac{3x^6 - x^{12} - 1}{x^3 - x^6 + 1} - x^6.$$

R. $x=0$.

121. Dacă $x \in \mathbb{N}$ să se arate că produsul fracțiilor:

$$\frac{x+2}{2}; \frac{x^3+x^2}{x^2+3x+2}; \frac{x+1}{x} \text{ este un număr natural.}$$

Indicație. $x^2+3x+2=x^2+2x+x+1+1$; produsul devine $\frac{x(x+1)}{2}$.

122. Se dă inegalitatea: $\frac{x^4+y^4-3x^2y^2}{2x^2-2xy-2y^2} - \frac{xy-2y^2}{2} > \sqrt{x^2y^2}$.

Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}_+$ și $y \in \mathbb{R}_+$ inegalitatea este întotdeauna adevărată.

R. $(x-y)^2 > 0$.

123. Se dă propoziția: $10x+12y=140$. Să se determine numerele x și y astfel încît propoziția dată să fie adevărată.

R. $x=2, y=10; x=8, y=5$.

124. Fie propoziția $2x+5y=40$. Să se determine x și y (numere naturale) astfel ca propoziția să fie adevărată.

R. $x=0, y=8; x=5, y=6; x=10, y=4;$
 $x=15, y=2; x=20, y=0$.

125. Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_+$ și $b \in \mathbb{R}_+$ propoziția următoare:

$$\frac{2a^4b+6a^3\sqrt{b^3}+6a^2b^2+2a\sqrt{b^5}}{(a+\sqrt{b})^3(a+b)} < \sqrt{ab} \text{ este adevărată.}$$

Indicație. După simplificare se împarte în ambii membri cu \sqrt{ab} .

R. $(a-b)^2 > 0$.

126. Să se determine mulțimile A și B , cunoscînd că:

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}; A \cap B = \{3, 4, 5\}; A - B = \{6, 8\}.$$

R. $A = \{3, 4, 5, 6, 8\}; B = \{3, 4, 5, 7\}$.

127. Să se afle valoarea maximă a fracției : $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{x^2 - 2x + 2}$.

Indicație. Se scrie $7 = 6 + 1$ și $2 = 1 + 1$ și se obține $y = 3 + \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$; y va fi maxim când $(x-1)^2 + 1$ este minim, adică pentru $x = 1$.

R. Valoarea maximă este 4.

128. Se dă egalitatea: $\sqrt{\frac{x^4 + 3y^2 + 2x^2y\sqrt{3} - y^4}{x^2 - y^2 + y\sqrt{3}}} = 1$. Să se arate că dacă $\sqrt{3} + y = 0$ atunci $x = \pm 1$.

129. Fie $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 20}{x^2 - 4x + 8}$. a) Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ este pozitivă

b) Să se determine valoarea maximă a lui $f(x)$, $x \in \mathbb{N}$.

R. 3.

130. Să se arate că oricare ar fi a, b, c (numere reale pozitive) inegalitatea:

$$\frac{a^5 + b^5 + a^3b^2 + a^3c^2 + a^2b^3 + b^3c^2}{a^3 + b^3} > ab + ac + bc \text{ este adevărată.}$$

Indicație. Se folosește inegalitatea $\frac{a^2 + b^2}{2} > ab$.

131. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ se cunoaște baza mare $AB = 5\sqrt{3}$ cm; $AD/BC = 1/2$. Fie MB proiecția lui BC pe AB astfel ca $MB/DC = 1/4$. Se cere: a) să se construiască (schița) corpurilor ce se formează prin rotația completă a trapezului în jurul laturii neparalele BC ; b) să se calculeze elementele acestor corpuri.

R. Conul $AA'B$: $G = 5\sqrt{3}$ cm, $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, $l = 7,5$ cm.

Conul $DD'C$: $G = 4\sqrt{3}$ cm, $R = 2\sqrt{3}$ cm, $l = 6$ cm.

Trunchi con $ADD'A'$: $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; $r = 2\sqrt{3}$ cm; $G = 1$ cm; $l = 0,5$ cm.

132. Se dă piramida $VABCD$ cu baza paralelogramul $ABCD$ ale cărui diagonale $AC = 20$ m și $BD = 16$ m se intersectează în O sub un unghi de 135° . Înălțimea piramidei VO este de $4\sqrt{2}$ m. Să se calculeze volumul piramidei.

R. $V = 213\frac{1}{3}$ m³.

133. Să se determine valoarea maximă a expresiei:

$$E = \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 + 2x + 3}$$

R. $E = 2$.

134. Să se determine numerele naturale x și y , astfel încât inegalitatea:

$$\frac{x^3 + x^2(1+y) - y^2(1+x) - y^3}{x+y+1} : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) > 2$$

să fie adevărată.

Indicație. Expresia devine: $(x+y)xy > 2$.

R. $x>1; y>1$.

135. Se dă un con de rază 2 cm confecționat dintr-un sector de cerc cu un unghi la centru de 180° . Se cere: a) să se arate că acest con este echilateral; b) raportul ariilor sferelor înscrise și circumscrise conului; c) aria calotei sferice determinată de o secțiune printr-un plan paralel cu baza conului la $\frac{\sqrt{3}}{8}$ cm de centrul sferei circumscrise; d) volumul conului cu vârful în centrul sferei având ca bază cercul de secțiune a calotei.

R. b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{29\pi}{3}$ cm²; d) $\frac{1015\sqrt{3}\pi}{8 \cdot 9 \cdot 64}$ cm³.

136. Aria unui sector de cerc cu unghiul de 180° este de 450π cm². a) Să se arate că, conul format din acest sector este echilateral. b) Să se calculeze aria sferei înscrise în acest con. c) Fără calcule, să se demonstreze că raza sferei înscrise în conul menționat este a treia parte din înălțimea conului.

R. b) 300π cm².

137. Să se găsească cifra x care verifică relația: $\frac{\overline{1xx}}{\overline{xx5}} = \frac{1}{5}$ unde $\overline{1xx}$ și $\overline{xx5}$ sînt numere scrise în baza 10.

Indicație. $\frac{\overline{1xx}}{\overline{xx5}} = \frac{100+10x+x}{100x+10x+5} = \frac{1}{5}$.

R. $x=9$.

138. Să se arate că oricare ar fi a și b numere reale, pozitive, inegalitatea:

$$\frac{(a+b)^2 + a(b+1)^2 + b(1-a)^2}{a+b+ab+1} \geq \sqrt{4ab}$$

este adevărată.

R. $(a-b)^2 \geq 0$.

139. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{1}{16-4x^2+x^4} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{2 - \frac{x}{1 + \frac{x}{2}}}}}{(5x-4):(4x-3)} \right)$$

Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$, $f(x)$ este pozitivă.

R. $f(x) = \frac{1}{x(x^3+8)}$.

140. Să se determine valoarea expresiei: $3x^4 - 4x^2y + y^2 + 2x^2 - 1$ dacă x și y verifică relația: $x^2 - y = -1$.

R. 0.

141. Se dă o prismă dreaptă $ABCD A'B'C'D'$ cu baza paralelogram. Diagonala BD a bazei cu lungimea de a cm este perpendiculară pe latura AD , iar $m(\angle B) = 150^\circ$. Planul determinat de muchiile opuse AB și $C'D'$ formează cu planul bazei un unghi de 60° . Să se afle: a) diagonalele prisme; b) raportul dintre aria bazei $ABCD$ și aria secțiunii $ABD'C'$; c) aria și volumul prisme.

$$\text{R. a) } \frac{a\sqrt{61}}{2} \text{ cm; } \frac{a\sqrt{13}}{2} \text{ cm; b) } \frac{1}{2};$$

$$\text{c) } a^2(6+5\sqrt{3}) \text{ cm}^2; \frac{3\sqrt{3}a^3}{2} \text{ cm}^3.$$

142. Să se determine mulțimea: $M = \{a \in \mathbb{Z} \text{ și } b \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } a^2 - b^2 + 2 = 0\}$.

Indicație. $a^2 - b^2 + 2 = 0$ se poate scrie $b^2 - a^2 = 2$; $(b-a)(b+a) = 2$. Divizorii lui 2 în \mathbb{Z} sînt ± 1 și ± 2 . Formăm sistemele de ecuații determinate de condițiile $(b-a)(b+a) = 2$.

$$\begin{array}{llll} b-a=1; & b-a=2; & b-a=-1; & b-a=-2; \\ b+a=2; & b+a=1; & b+a=-2; & b+a=-1. \end{array}$$

Se constată că în toate situațiile $a \notin \mathbb{Z}$ și $b \notin \mathbb{Z}$, rezultă că $M = \emptyset$.

143. Se consideră expresiile: $E_1 = \frac{x^2+1}{2}$; $E_2 = \frac{x^2-1}{2}$; $E_3 = x$.

a) Să se arate că $E_1 \geq E_3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. b) Pentru ce valori ale lui x , E_1, E_2, E_3 pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic?

144. Se dă $E = \frac{x^3+5x^2+x\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{x^3-2x^2+x\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$. a) Pentru ce valori ale lui x , $x \in \mathbb{N}$, E – este un număr

întreg? b) Să se afle valoarea minimă a lui E .

$$\text{R. a) } x = \{3, 9\}; \text{ b) } 2.$$

145. Să se determine numerele naturale x și y care satisfac egalitatea:

$$\frac{4(x+y)}{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 1.$$

$$\text{R. } x=y=2.$$

146. Se dă un tetraedru regulat de muchie a . 1) Să se determine înălțimea, apotema (piramidei) și valoarea cosinusului unghiului dintre două fețe ale tetraedrului. 2) Să se determine distanțele unui punct oarecare de pe înălțimea tetraedrului la fețele laterale în funcție de distanța x a acestuia la planul bazei. a) Să se deducă de aici că suma distanțelor oricărui punct de pe înălțime la fețele tetraedrului este constantă. b) Să se determine punctul de pe înălțime, egal depărtat de toate fețele tetraedrului. 3) Să se arate că două muchii neașezate pe aceeași față sînt perpendiculare.

$$\text{R. 1) } \frac{a\sqrt{3}}{2} = \text{apotema, } \frac{a\sqrt{6}}{3} = \text{înălțimea; } \frac{1}{3} = \text{cosinusul unghiului diedru.}$$

$$2) \frac{a\sqrt{6}-3x}{9}; \text{ b) punctul de concurență a înălțimilor tetraedrului.}$$

147. Să se arate că inegalitatea următoare este adevărată pentru orice a și b reali, pozitivi și $a \neq b\sqrt{2}$:

$$\left[\frac{a^2(a^3 - 3a^2b\sqrt{2} + 6ab^2 - 2b^3\sqrt{2})}{a^2 - 2ab\sqrt{2} + 2b^2} + b\sqrt{2} \right] + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

148. Pe planul pătratului $ABCD$ cu latura a se ridică perpendicularele $AM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ și $CP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Se unește M cu P . 1) Să se demonstreze că planele triunghiurilor MBD și PBD sînt perpendiculare. 2) Să se calculeze volumul poliedrului $ABCDMP$. 3) Să se determine latura pătratului, notată cu a , știind că prin rotirea triunghiului COP (O fiind centrul pătratului $ABCD$), în jurul lui CP partea din con exterioară poliedrului $ABCDMP$ are volumul egal cu $4\pi\sqrt{6}$. (unități de volum).

$$\text{R. 2) } V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}; \text{ 3) } a = 4.$$

149. Se dă piramida $SABC$ astfel ca $SA = SB = SC = a$; $m(\angle ASB) = 60^\circ$; $m(\angle ASC) = 90^\circ$; $m(\angle BSC) = 120^\circ$. Se cere: 1) perimetrul triunghiului ABC ; 2) să se arate că $\triangle ABC$ este dreptunghic; 3) aria totală a piramidei; 4) volumul piramidei ce se formează făcînd o secțiune paralelă cu baza la distanța de $\frac{1}{4}$ din înălțime față de vîrf; 5) raportul volumelor celor două corpuri obținute.

$$\text{R. 1) } a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}); \text{ 3) } \text{Aria } ASB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \text{ Aria } ASC = \frac{a^2}{2};$$

$$\text{Aria } BSC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \text{ Aria } ABC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2};$$

$$At = \frac{a^2}{2}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}). \text{ 4) } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{768}; \text{ 5) } \frac{1}{63}.$$

150. Să se găsească un polinom $P(x)$ de gradul doi știind că $P(0) = 3$; $P(-1) = 8$; $P(1) = 4$.

$$\text{R. } 3x^2 - 2x + 3.$$

151. Fie M și N mulțimile ale căror elemente sînt soluțiile pentru $a \in \mathbf{N}$ și $b \in \mathbf{N}$ din egalitatea: $(a+2)(b+3) = 2ab$. Să se determine $M \cap N$.

Indicație. Egalitatea devine $ab - 3a - 2b - 6 = 0$. (În membrul întîi al ecuației este necesar să obținem un produs de factori iar în membrul doi un număr natural). Se adaugă și se scade numărul 12 și obținem: $(b-3)(a-2) = 12$. Divizorii lui 12 în \mathbf{N} sînt: 1, 2, 3, 4, 6, 12 și astfel obținem:

$$\begin{cases} b-3=12 \\ a-2=1 \end{cases}; \begin{cases} b-3=1 \\ a-2=12 \end{cases} \text{ și așa mai departe.}$$

$$\text{R. } M \cap N = \{4, 5, 6\}.$$

152. Să se determine cele mai mici baze de numerație x, y, z astfel încît să avem: $144_x = 169_y = 484_z$.

Indicație. Din egalitățile date rezultă $x > y > z > 4$; $x^2 + 4x + 4 = y^2 + 6y + 9 = 4z^2 + 8z + 4$; $x+2 = y+3 = 2z+2$.

$$\text{R. } x=10; y=9; z=5.$$

153. Să se determine x, y, z astfel încât $\overline{xyz}_5 - \overline{xy}_6 - \overline{yz}_7 - \overline{zx}_8 = 0$.

Indicație. Se obține $18x-3y=8z$ dar din egalitatea inițială rezultă că x, y, z sînt numere mai mici ca 5; 8 z trebuie să admită ca divisor pe 3 de unde rezultă că $z=3$; $18x-3y=24$ sau $6x-y=8$; procedînd analog obținem $6x-8=y$, din care rezultă că y are divizori pe 2 și 1; $y=4$; $x=2$.

R. $x=2$; $y=4$; $z=3$.

154. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\angle A)=60^\circ$, $AB=2AD$; M, N respectiv mijloacele laturilor AB și DC . Fie P piciorul perpendicularei din B pe DC și Q punctul de concurență al segmentelor AN și BC . Să se arate că: a) AN, MP, BC sînt concurente; b) M, P, Q sînt coliniare.

Indicație. $MCQN$ paralelogram și P este mijlocul lui NC .

155. Se dau expresiile:

$$A=1\,964^3+1\,965^3+1\,966^3-1\,967^3; \quad B=1\,998^3+1\,997^3+1\,998^2+1\,999.$$

Să se arate că $A+B$ este divizibil prin 2 și $A \cdot B$ este divizibil prin 4.

Indicație. Se vor exprima algebric expresiile, apoi se vor observa numerele pare și impare.

156. Fie A și B două submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $A \cap B = \{4, 6, 9\}$; $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$; $B \cup \{4, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Să se determine submulțimile A și B .

R. $A=\{1, 4, 6, 9, 8\}$; $B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

157. Cu suma de 129 lei s-au cumpărat 18 caiete de 4 lei bucata, 7 lei bucata și 18 lei bucata. Cîte caiete s-au cumpărat de fiecare fel?

Indicație. $129-18 \cdot 4=57$ lei, reprezintă diferențele de la 4 lei la 7 lei și la 18 lei. Se ține apoi seama că $57-12c > 0$.

R. 10 caiete de 4 lei, 5 caiete de 7 lei, 3 caiete de 18 lei.

158. Se dă fracția:
$$f(x) = \frac{x^{12} + x^6 + x^5 + x^3}{x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2}.$$

Să se arate că dacă $x \in \mathbb{N}^*$ atunci $f(x)$ este divizibilă cu 2.

Indicație. Se adună și se scade aceeași expresie la numărător, pentru a se obține factor comun x^2+1 ; sau se ține seama că $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$.

159. Se dă polinomul $f(n, y) = n^2y^4 - 2ny^6 - n^2 + 2n + y^8$. Să se determine valoarea numerică a lui $f(n, y)$ pentru $n-y^2=1$.

R. $f(n, y)=1$.

160. Fie $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ în care $x \in \mathbb{N}$. Să se arate că $P(x)$ este divizibil cu 6.

Indicație. Se descompune $P(x)$ în produs de factori scriind: $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 2x + 9x + 6$ sau se va observa că $P(x)$ se divide prin $x+1$ și dă cîțul $(x+2)(x+3)$.

161. Se dă expresia $f(x) = ax^2 + bx + c$. Să se arate că dacă $a+b+c=0$, atunci $f(x)$ se divide cu $x-1$.

162. Fiind dată expresia $f(x)=x^3+3x^2+2x+1$ în care $x \in \mathbb{N}$, să se arate că $f(x)$ este impar.

Indicație. Se va studia $f(x)$ când $x=2K$ și $x=2K+1$.

163. Fără a se efectua împărțirea să se determine câtul și restul împărțirii

$$(x^3+2x^2+x+5):(x^2+1).$$

Indicație. Se va studia deîmpărțitul scris sub forma $x^3+2x^2+x+2+3$.

R. $x+2$ rest 3.

164. Se dă expresia $f(x)=x^3+8x^2+17x+10$. Să se descompună în factori $f(x)$, folosind teorema lui Bézout, și să se arate că $f(x)$ este divizibil cu 2 dacă $x \in \mathbb{N}$.

R. $(x+1)(x+2)(x+5)$.

165. Se dă expresia $f(x)=9x^4-6x^3+x^2+1$ în care $x \in \mathbb{N}$. a) Să se afle câtul și restul lui $f(x)$, prin împărțirea la $3x^2-x$ fără a efectua împărțirea. b) Să se arate că $f(x)$ este pozitiv când $x \in \mathbb{R}$.

Indicație. Se studiază expresia $9x^4-6x^3+x^2$.

R. a) Câtul este $3x^2-x$, restul 1.

166. Să se arate că expresia $f(x, y)=(x^3+x^2+y^4)(x^3+x^2+y^4+4)+4$ este un pătrat perfect oricare ar fi x și y numere naturale.

167. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$. Să se afle aria secțiunii $ABC'D'$, știind că $AB=3a$; $A'B'=a$ iar înălțimea trunchiului de piramidă este $OO'=2a$.

R. $4a^2\sqrt{2}$.

168. a) Să se arate că orice număr natural diferit de 1, impar, este diferența pătratelor a două numere întregi. b) Să se arate că diferența cuburilor a două numere naturale consecutive, este întotdeauna un număr impar. c) Cunoscând că, k este un număr natural, să se calculeze $(-1)^k+(-1)^{k+2}$.

Indicație. a) $2k+1=(k+1)^2-k^2$; b) $(k+1)^3-k^3=3k(k+1)+1$.

R. c) 2; -2.

169. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle A)=90^\circ$, cu laturile $AB=c$; $BC=a$; $AC=b$ să se arate că $\sin^n B + \cos^n B < 1$ dacă $n > 2$.

Indicație. Dacă $n > 2$, $\sin^n B < \sin^2 B$; $\cos^n B < \cos^2 B$.

170. Într-un săculeț sînt 10 bile albe, 12 bile negre și 16 bile roșii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să-l scoatem din săculeț fără a ne uita în săculeț, pentru ca să avem certitudinea că am scos trei bile de aceeași culoare.

R. 7 bile.

171. Se dă polinomul $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-cx-6$. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x)$ să fie divizibil cu $(x+1)(x+2)(x+3)$.

Indicație. Se va folosi teorema lui Bézout sau metoda coeficienților nedeterminați.

R. $a=b=c=5$.

172. Se dă pătratul cu latura a și 5 puncte oarecare în interiorul acestui pătrat. Să se arate că există cel puțin două puncte a căror distanță este mai mică decât $a\sqrt{2}/2$.

Indicație. Impărțim pătratul în patru pătrățele egale și repartizăm punctele în cele 4 pătrățele.

173. Fie un cub cu latura 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța mai mică decât $\frac{\sqrt{3}}{3}$ sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Indicație. Impărțim fiecare muchie a cubului în câte 3 părți egale și prin punctele de diviziune ducem plane paralele cu fețele cubului obținând 27 cubulețe.

174. Se dă expresia $f(x) = \frac{(x^2+2x+3)^3-1}{(x^2+2x+4)^3+1}$. Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Indicație. $x^2+2x+3=y$; $x^2+2x+4=x^2+2x+3+1$; $x^2+2x+3+2=(x+1)^2+4$ ce are ca minim valoarea 4.

175. Se dau mulțimile: $A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4, 5, 6\}$. Să se determine mulțimea X astfel ca să avem $(A-X) \cup (X-A)=B$.

R. $X=\{1, 2, 5, 6\}$

X. TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

X.1. SISTEME DE NUMERAȚIE

Sistemul de numerație obișnuit este sistemul zecimal. Zece unități de un ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

Pentru scrierea numerelor din acest sistem se folosesc zece cifre 0, 1, 2, 3,..., 9.

Dar se pot folosi și alte sisteme de numerație, în care o unitate de un ordin oarecare să fie formată din două, trei... unități ale ordinului imediat inferior; avem atunci, de exemplu, un sistem cu baza 2 (binar), cu baza 3, baza 8, baza 16,...

Numărul cifrelor necesare într-un sistem este egal cu baza. Astfel în sistemul cu baza trei se vor întrebuiți trei cifre 0, 1 și 2; în sistemul cu baza 7 se vor întrebuiți 7 cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. În sistemul cu baza 2, se folosesc numai cifrele 0 și 1. Acest sistem este folosit la mașinile electronice de calcul.

Trecerea de la o bază de numerație la alta.

1. Să se scrie $N=325_6$ în sistemul zecimal;

$$N=3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 5 = 108 + 12 + 5 = 125_{10}$$

$$N=325_6 = 125_{10} = 125^*$$

2. Să se scrie $N=125$ în sistemul cu baza 6:

$$\begin{array}{r} 125 \overline{)6} \\ \underline{5 \overline{)20}} \end{array}; \quad \begin{array}{r} 20 \overline{)6} \\ \underline{2 \overline{)3}} \end{array} \text{ deci } N=125=325_6.$$

* Când numărul este scris în baza 10, nu vom mai indica baza.

3. Să se scrie $N=4215_6$ în baza 5.

Il trecem pe N în baza 10, apoi în baza 5:

$$4215_6 = 4 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 5 = 864 + 72 + 6 + 5 = 947.$$

$$\frac{947|5}{2|189}; \frac{189|5}{4|37}; \frac{37|5}{2|7}; \frac{7|5}{2|1}. N=4215_6=947=12242_5.$$

4. Să se scrie în sistemul cu baza 6 numărul 358, scris în sistemul zecimal.

$$R. 1354_6.$$

5. Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 99, scris în sistemul zecimal.

$$R. 344_5.$$

6. Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 401, scris în sistemul zecimal.

$$R. 110010001_2.$$

7. Să se scrie în sistemul cu baza 8 numărul 1004, scris în sistemul zecimal.

$$R. 1754_8.$$

8. Să se scrie în sistemul cu baza 10 următoarele numere scrise în diferite baze:

$$N_1=3428_9; N_2=450_8; N_3=1101001_2; N_4=1022_3.$$

$$R. 3428_9=2537; 450_8=296; 1101001_2=105; 1022_3=35.$$

9. Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 458 scris în baza 9.

$$R. 458_9=377=3002_3.$$

10. Să se scrie în sistemul cu baza 3 numărul 505 scris în baza 8.

$$R. 505_8=325=110001_3.$$

11. Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 40 scris în baza 7.

$$R. 40_7=28=11100_2.$$

12. Să se scrie în sistemul cu baza 6 numărul 10010000 scris în baza 2.

$$R. 10010000_2=144=400_6.$$

13. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.

$$\frac{143+220_3+10000_2}{11_7}.$$

$$R. 11.$$

14. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.

$$\frac{236_7+113_4-16}{202_3}.$$

$$R. \frac{33}{5}.$$

15. Să se simplifice fracția, scriind rezultatul în baza 2.

$$\frac{451_6-6_{10}+10002_3}{100_2}.$$

$$R. 111111_2.$$

16. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în baza 8 de numerație.

$$\frac{142_5 + 1111_2 + 5001_6 - 3_{10}}{42_{10} - 53_7}.$$

R. 435₈.

17. Să se verifice dacă egalitatea următoare este adevărată, numerele fiind scrise în baza 6 de numerație:

$$\left(30 \cdot 40 - \frac{1220}{2}\right) \cdot 5 = 10310.$$

18. Idem, numerele fiind scrise în baza 3 de numerație:

$$2 \left[(120 \cdot 100) + \frac{22 \cdot 10}{2} - (101 \cdot 11) \right] = 21221.$$

19. Idem, numerele fiind scrise în baza 9 de numerație:

$$(3^2 + 4^2 + 12^2) \cdot (30 - 16) = 2356.$$

20. Idem, numerele fiind scrise în sistemul binar:

$$(1 + 10 + 11 + 100) \cdot \frac{10000}{10} = 1\ 010\ 000.$$

21. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$22 \cdot 160 = 3740?$$

Indicație. Pentru baza b trebuie să avem $2 < b < 10$.

R. Baza este 8.

22. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$5 \cdot 61 = 425?$$

R. Baza este 7.

23. Să se rezolve ecuația: $x + \frac{3x - 100_3}{101_2} = 11_3 - \frac{5x - 15_7}{3}$, în care numerele fără indici sînt considerate în baza 10 de numerație.

R. $x = 3$.

24. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{12}(3x - 4) + \frac{1}{3}(10x + 3) = 133 - 10x$ toate numerele fiind scrise în baza 5, să se dea răspunsul în baza 5, apoi în sistemul binar.

R. $x = 11_5 = 110_2$.

25. Să se rezolve ecuația: $x^2 - 12x + \sqrt{1100} = 0$, numerele fiind scrise în sistemul trinar, soluțiile se vor da în aceeași bază.

R. $x' = 2$; $x'' = 10$.

26. Să se rezolve ecuația: $\frac{12_5}{x^2 - 1} + \frac{1000_2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1101_3 - 10_9 x}{x^3 - x^2 - x + 1}$. Soluția se va scrie în baza 10.

R. $x = \frac{3}{2}$.

27. Un număr scris în baza 2 este $N=10110001$. În ce bază, același număr, se scrie $N=342$?

Indicație. În sistemul zecimal, să scriem un număr punând în evidență puterile lui 10, adică puterile bazei, de exemplu:

$$7\,542 = 7 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2$$

deci $N=342$ se poate scrie $3x^2+4x+2$ în care s-a notat cu x baza necunoscută a sistemului nou de numerație.

R. Baza este 7.

28. Să se rezolve ecuația următoare, în care necunoscuta este baza unui sistem de numerație: $110110_2 = 312_x$

R. Baza este 4, $x=4$.

29. Să se rezolve ecuația: $91_3 - 1020_x + 88_9 = 100100_2$.

R. $x=2$.

30. Să se aducă expresia următoare la forma cea mai simplă (indicii x și y sînt baze de numerație, iar numerele fără indici se consideră în sistemul zecimal):

$$\frac{11x}{11y} : \left(1 - \frac{1}{12_x}\right) \cdot 7(11_y).$$

R. $7(x+2)$

X.2. GENERALIZAREA ȘI DISCUȚIA PROBLEMELOR

La rezolvarea problemelor de matematici, elevii se mulțumesc –de multe ori– să considere ca juste soluțiile găsite pentru necunoscutele problemei, fără a analiza dacă rezultatele sînt posibile, dacă aceste rezultate pot ocaziona unele interpretări sau generalizări.

Pentru a înlătura această tendință cît și pentru a forma deprinderea de a generaliza și discuta problemele, vom da cîteva exemple de generalizare și discuție a problemelor.

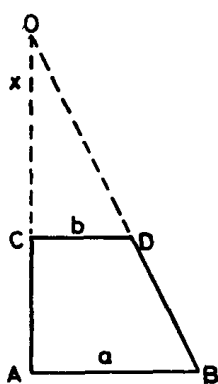


Fig.X.1

1. Se dă un trapez $ABCD$, în care unghiurile A și C sînt drepte (fig.X.1); se prelungesc laturile AC și BD pînă se întîlnesc în O . Se cere distanța $CO=x$ știind că: $AB=a$, $CD=b$, $AC=i$.

Obținem $x = \frac{bi}{a-b}$.

Discuție.

Dacă $a=b$, valoarea lui x devine: $x = \frac{bi}{0}$,

conducînd la o operație fără sens; în acest caz trapezul devine un dreptunghi și laturile AC și BD sînt paralele.

Dacă $b=0$, vom avea $x=0$, atunci trapezul se schimbă într-un triunghi și prin urmare distanța de la C la punctul de întîlnire este 0.

2. Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi de trei ori vîrsta fiului, dacă acum tatăl are 56 de ani și fiul 30 de ani ?

Notăm cu x numărul de ani peste care vîrsta tatălui va fi de trei ori cît a fiului.

Ecuatia problemei este: $56+x=3(30+x)$.

R. $x=-17$.

Răspunsul arată că fenomenul a avut loc în trecut, acum 17 ani. În adevăr, atunci tatăl avea 39 ani, fiul 13 ani și vârsta tatălui era întreitul vârstei fiului.

Cazul general.

Peste câți ani vârsta tatălui va fi de n ori vârsta fiului, dacă acum tatăl are a ani și fiul are b ani în ipoteza $n > 1$?

Ecuatia problemei este: $a+x=n(b+x)$, cu soluția: $x=\frac{a-nb}{n-1}$, și putem avea 3 cazuri.

- 1) dacă $a-nb > 0$, atunci $x > 0$ și fenomenul va avea loc în viitor;
- 2) dacă $a-nb < 0$, atunci $x < 0$; adică fenomenul a avut loc în trecut (ca în exemplul numeric de mai sus);
- 3) dacă $a-nb = 0$, $x = 0$ în prezent, vârsta tatălui este de n ori vârsta fiului.

3. Doi curieri merg pe distanța de la D la E cu mișcare uniformă, unul avînd viteza v și altul v' . Într-un moment oarecare cel dintîi se află în punctul A și cel de-al doilea în punctul B (fig. X. 2). La ce depărtare de punctul B se vor întîlni ?

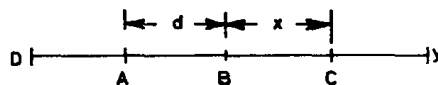


Fig.X.2

Pentru a pune problema în ecuație, să presupunem că ei merg amîndoi în același sens și fie C punctul unde se întîlnesc. Notăm prin x distanța BC și prin d distanța fixă cunoscută AB ; v fiind viteza primului curier și t timpul necesar sosirii în C , avem

$d+x=vt \Rightarrow t=\frac{d+x}{v}$ (1). Cel de-al doilea curier ajunge în C în același timp t . Notînd

viteza lui cu v' obținem: $x=v't$ (2). Eliminînd pe t între relațiile (1) și (2) avem:

$$\frac{x}{v'} = \frac{d+x}{v} \Rightarrow x = \frac{dv'}{v-v'}. \quad (3).$$

Discuție.

b) Presupunem că $v < v'$; din formula (3), obținem în acest caz, pentru x o valoare negativă. Înseamnă că întîlnirea a avut loc înainte de a ajunge curierii în A și B , adică în partea stîngă a punctului B , căci din moment ce ei sînt în A și B , cel de-al doilea mergînd mai repede se va depărta mereu de cel dintîi, așa că ei nu se pot întîlni la dreapta lui B .

c) Dacă $v=v'$, valoarea lui x în acest caz devine $\frac{dv'}{0}$, ceea ce conduce la o imposibilitate; cei doi curieri nu se întîlnesc niciodată. Aceasta este evident, deoarece ambii deplăsuindu-se în aceeași direcție, cu aceeași viteză, distanța dintre ei rămîne mereu d .

d) Dacă $v=v'$ și presupunem $d=0$, în această situație valoarea lui x are forma $\frac{0}{0}$, adică este un caz de nedeterminare, ceea ce se înțelege, căci ei, aflîndu-se în același punct într-un moment dat și avînd aceeași viteză, se găsesc mereu împreună.

e) Dacă $v \neq v'$ și $d=0$, avem $x = \frac{0}{v-v'} = 0$. În acest caz, punctul lor de întâlnire este în B , care devine punct comun de plecare.

f) Dacă ei ar fi mers în sens contrar (unul către altul), atunci întâlnirea s-ar face între A și B , și dacă se notează ca și mai sus cu x distanța de la B la punctul de întâlnire, obținem ecuația:

$$\frac{d-x}{v} = \frac{x}{v'} \text{ deci } x = \frac{dv'}{v+v'}. \quad (4)$$

Considerând viteza v' ca pozitivă, când mișcarea celui de-al doilea se face spre dreapta și ca negativă când mișcarea se face în sens opus și dacă luăm distanța socotită spre dreapta punctului B ca pozitivă și cele socotite spre stînga ca negative, vom recunoaște că formula (4) este conținută în formula (3). Prin urmare, formula $x = \frac{dv'}{v-v'}$ se

aplică în ambele cazuri ale problemei. De aici se poate vedea cum, introducînd cantitățile negative ca date ale unor probleme, putem să generalizăm problemele, adică cu o singură formulă, găsită pentru unul din cazurile problemei, putem să studiem toate celelalte cazuri.

4. Circumferința roții din față a unei trăsură este k metri, circumferința roții din spate este de l metri. Pe ce distanță va face roata din față cu u învîrtituri mai mult decît cea din spate?

Notăm distanța parcursă cu x . Ecuația problemei este: $\frac{x}{k} - u = \frac{x}{l}$, de unde $x = \frac{lku}{l-k}$.

a) Ce fel de mărimi sînt l , k și u ?

Dacă $x < 0$ cînd $l-k < 0$, deci $l < k$, ce putem spune despre raza roții din spate în raport cu cea din față ? Discuția rămîne pe seama cititorului.

5. Un trapez dreptunghic cu bazele a și b ($a > b$) și înălțimea i se rotește în jurul bazei mici, apoi în jurul bazei mari. 1) Să se calculeze raportul dintre volumele acestor corpuri, stabilind dacă acest raport este mai mare sau mai mic decît 1. 2) Ce relație trebuie să existe între a și b ca acest raport să fie $3/2$? 3) În acest caz, acest raport este egal cu 1 ? Interpretați geometric rezultatul. 4) În ce caz, acest raport este egal cu 2 ? Interpretați geometric.

R. 1) Raportul este $\frac{2a+b}{a+2b}$; 2) $a=4b$;

3) $a=b$ atunci trapezul devine dreptunghi și este indiferent în jurul cărei laturi de bază se rotește;

4) $b=0$, trapezul se reduce la un triunghi.

X.3. PROBLEME DE COLINIARITATE

Printre problemele de geometrie plană, interesante sînt problemele de coliniaritate. Metodele de rezolvare folosite la aceste probleme sînt variate. În cele ce urmează prezentăm cîteva probleme de coliniaritate rezolvate.

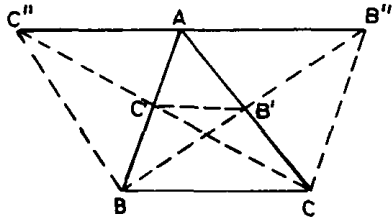


Fig.X.3

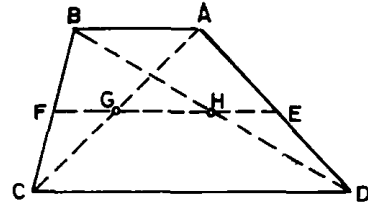


Fig.X.4

1. Să se demonstreze că simetricele vîrfurilor B și C ale unui triunghi ABC față de mijloacele laturilor AC și AB (respectiv) sînt coliniare cu vîrfurile A .

Rezolvare. Fie B'' și C'' simetricele vîrfurilor B și C față de mijloacele B' și C' ale laturilor AC și AB (fig.X.3). Patrulaterul $ABCB''$ este paralelogram, deoarece diagonalele AC și BB'' se taie în părți egale, conform construcției. Rezultă că $AB'' \parallel BC$. În mod analog, se demonstrează că patrulaterul $ACBC''$ este paralelogram și rezultă $AC'' \parallel BC$. Prin urmare, prin vîrfurile A trec două paralele cu BC și anume AB'' și AC'' . Ele nu pot fi diferite, ca direcție, conform *postulatului lui Euclid*; aceasta înseamnă că punctele C'' , A și B'' sînt coliniare.

2. Să se arate că mijloacele laturilor neoparalele ale unui trapez și mijloacele diagonalelor sînt patru puncte coliniare.

Rezolvare. În triunghiul ABC , FG fiind linie mijlocie avem $FG \parallel AB$ (fig.X.4). În triunghiul BCD , FH este linie mijlocie și avem: $FH \parallel CD$. Bazele trapezului fiind paralele rezultă că prin punctul F trec două paralele la aceeași direcție; ele nu pot fi diferite conform *postulatului lui Euclid*, deci punctele F , G , și H sînt coliniare. Cu o demonstrație analogă obținem că și punctul E se găsește pe aceeași dreaptă cu primele trei puncte, adică cele patru puncte considerate sînt coliniare.

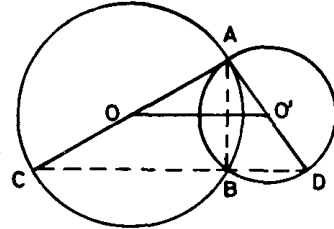


Fig.X.5

3. Două cercuri O și O' sînt secante în A și B . Prin A se duc diametrele AC și AD ale celor două cercuri. Să se demonstreze că punctele C , B și D sînt coliniare.

Rezolvare. Unghiul ABC este drept fiind înscris într-un semicerc; aceeași observație pentru unghiul ABD (fig.X.5). Unghiurile adiacente ABC și ABD fiind suplimentare rezultă că au laturile necomune în prelungire, adică punctele C , B și D sînt coliniare.

4. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$. Să se demonstreze că punctul de intersecție al diagonalelor, centrul cercului circumscris și punctul de intersecție al laturilor neoparalele ale trapezului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Se analizează proprietatea fiecărui punct și se observă o însușire comună. Într-adevăr:

- 1) centrul O al cercului circumscris este echidistant de punctele C și D (situate pe cerc) (fig. X.6);
- 2) punctul F de intersecție al diagonalelor este echidistant de punctele C și D (proprietatea diagonalelor trapezului isoscel);
- 3) punctul E de intersecție al prelungirilor neoparalele este echidistant

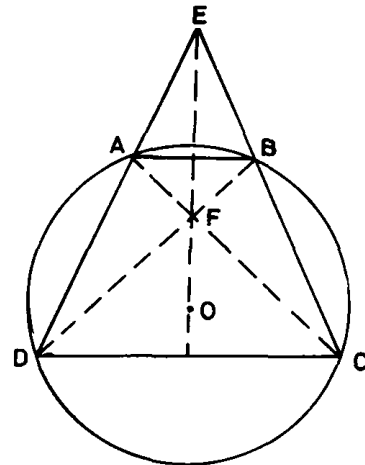


Fig.X.6

de punctele C și D , deoarece triunghiul CDE este isoscel. Prin urmare, punctele O , E și F aparțin medietoarei segmentului CD care este locul geometric al tuturor punctelor cu această proprietate.

S-a recunoscut o dreaptă-loc geometric care conține cele trei puncte considerate, adică punctele sînt coliniare.

5. Să se demonstreze că dacă se proiectează unul dintre vîrfurile unui triunghi pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor corespunzătoare celor două vîrfuri ale triunghiului se obțin, pe aceste bisectoare, patru puncte coliniare.

Rezolvare. Patrulaterul $ADBF$ este dreptunghi, conform enunțului, și centrul său de simetrie (M) este la mijlocul laturii AB (fig.X.7). Se demonstrează că diagonala DF a dreptunghiului este paralelă cu BC și deoarece această diagonală trece prin mijlocul laturii AB rezultă că DF are direcția liniei mijlocii a triunghiului ABC . Analog pentru EG , diagonala dreptunghiului $AECG$. Prin urmare, punctele D , E , F și G sînt situate pe aceeași paralelă cu BC , adică sînt coliniare.

6. Pe două laturi consecutive ale unui pătrat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF (primul interior și celălalt exterior pătratului). Să se demonstreze că punctele D , E , F sînt coliniare.

Rezolvare. În triunghiul isoscel ADE (deoarece $AD=AE$) avem $m(\angle 1)=30^\circ$; rezultă $m(\angle 2)=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$ (fig. X.8). În $\triangle ABE$ (echilateral), $m(\angle 3)=60^\circ$, iar în triunghiul dreptunghic isoscel BEF , $m(\angle 4)=45^\circ$. Unghiurile 2, 3 și 4 adiacente-consecutive însumează 180° , deci ele sînt situate de aceeași parte a unei drepte; urmează că punctele D , E și F sînt coliniare.

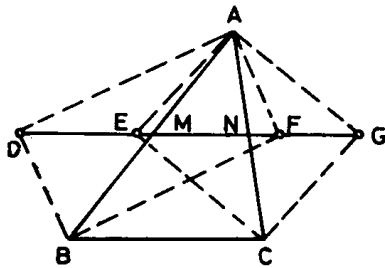


Fig.X.7

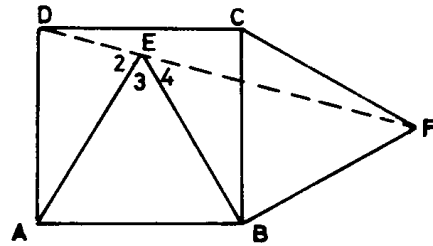


Fig.X.8

7. În patrulaterul $ABCD$ se consideră M și N mijloacele laturilor opuse AB și CD . Prin M ducem MP paralelă cu BC și MQ paralelă cu AD , iar prin vîrfurile C și D cîte o paralelă cu AB . Se formează astfel paralelogramele $BCPM$ și $ADQM$. Să se arate că vîrfurile P și Q ale acestor paralelograme sînt coliniare cu punctul N .

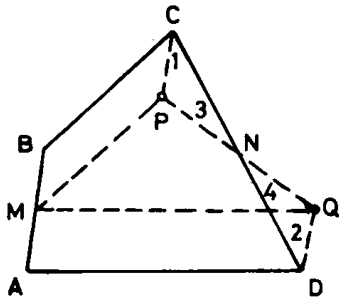


Fig.X.9

Rezolvare. Se compară triunghiurile CNP și DNQ (fig.X.9);

ele au: $[CP]=[DQ]=\frac{[AB]}{2}$, $[CN]=[DN]=\frac{[CD]}{2}$ $m(\angle 1)=m(\angle 2)$ ca alterne interne formate de paralele CP și DQ cu secanta CD . Din congruența acestor triunghiuri rezultă $m(\angle 3)=m(\angle 4)$. Aceste două unghiuri egale sînt situate de o parte și de alta a dreptei CD ; rezultă că ele sînt opuse la vîrf; atunci laturile PN și NQ sînt în prelungire și punctele P , N , Q sînt coliniare.

S-a utilizat teorema: dacă două unghiuri egale au vîrfurile comune, o latură comună și sînt așezate de o parte și de alta a laturii comune, atunci ele sînt opuse la vîrf.

8. Două cercuri O_1 și O_2 sînt tangente exterior în punctul T . O secantă dusă prin T taie cercurile în A și B . Se consideră diametrele AC și BD ale cercurilor O_1 și O_2 , respectiv. Să se demonstreze că punctele C și D sînt coliniare cu punctul T de tangență.

Rezolvare. Unghiurile ATC și BDT sînt drepte ca unghiuri înscrise într-un semicerc (fig.X.10). Aceste unghiuri egale au vîrfurile comune și sînt situate de o parte și de alta a unei laturi comune (AB); ele sînt unghiuri opuse la vîrf, adică laturile CT și DT sînt în prelungire; prin urmare punctele C, T și D sînt coliniare.

9. Se consideră un triunghi oarecare ABC . Să se demonstreze că ortocentrul acestui triunghi (H), centrul de greutate și centrul cercului circumscris triunghiului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Fie AD diametrul cercului circumscris ce trece prin vîrfurile A al triunghiului (fig.X.11). Se demonstrează că patrulaterul $BHCD$ este paralelogram. Diagonalele sale sînt BC și HD , deci A'' este centrul de simetrie al paralelogramului. Rezultă că: AA'' este o mediană a triunghiului ABC ; OA'' este perpendiculară pe BC ; OA'' este paralelă cu înălțimea AA' a triunghiului; OA'' este linie mijlocie în triunghiul $ADH \rightarrow OA'' = AH/2$. Se unește H cu O . Se demonstrează că triunghiurile $A''OG$ și AGH sînt

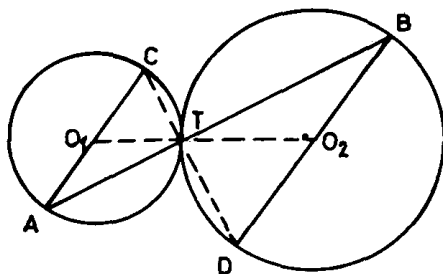


Fig.X.10

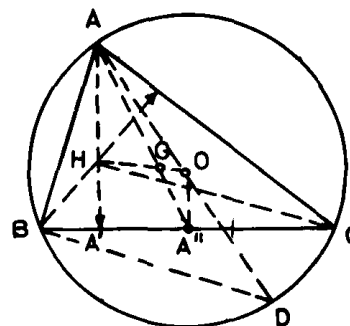


Fig.X.11

asemenea, raportul lor de asemănare fiind $1/2$; adică pe mediana AA'' există un punct care determină raportul $\frac{GA''}{GA} = \frac{1}{2}$. Rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului, adică centrul de greutate se află pe linia care unește ortocentrul cu centrul cercului circumscris. Cele trei puncte H, G și O sînt coliniare. Am utilizat, în ultima parte a demonstrației, *asemănarea a două triunghiuri* cu interpretarea raportului lor de asemănare.

10. Se dă triunghiul ABC . Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare al cercului circumscris triunghiului pe laturile triunghiului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Demonstrația se face pe baza proprietăților patrulaterului inscriptibil. Notăm cu D, E și F picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare M al cercului respectiv pe laturile BC, AB și AC ale triunghiului (fig.X.12). Patrulaterul $BEMD$ este inscriptibil avînd două unghiuri opuse suplementare (unghiurile din D și E) $\rightarrow \angle 1 \equiv \angle 2$. Patrulaterul $DMCF$ este inscriptibil deoarece diagonalele (CD și FM) fac unghiuri egale cu laturile opuse DM și CF ale patrulaterului $\rightarrow \angle 3 \equiv \angle 4$. Pe de altă parte în triunghiurile dreptunghice BEM și CFM avem $\angle EBM \equiv \angle MCF$ pe baza proprietății unghiului exterior al patrulaterului înscris $ABMC \rightarrow \angle 2 \equiv \angle 4$ fiind complemente de unghiuri egale. De aici rezultă congruența unghiurilor 1 și 3 care au vîrfurile comune D , o latură comună (latura BC), fiind așezate de o parte și de alta a acestei laturi. Același raționament ca și în cazul problemelor 7 și 8 conduce la concluzia că punctele D, E, F sînt coliniare și dreapta pe care se află ele situate este numită în geometrie *dreapta lui Simson*.

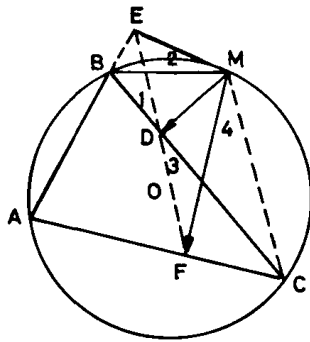


Fig.X.12

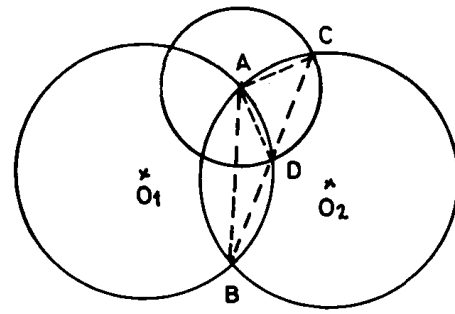


Fig.X.13

11. Două cercuri de raze egale se taie în punctele A și B . Din A drept centru și cu o rază arbitrară se descrie un alt cerc care le taie pe primele două în patru puncte. Să se demonstreze că punctul B și două dintre punctele de intersecție ale cercului al treilea sînt coliniare.

Rezolvare. $[AC] \equiv [AD]$ ca raze în cercul al treilea (fig.X.13). Aceste raze congruente sînt coarde congruente în cercurile egale O_1 și $O_2 \rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD}$ și deci arcele au aceeași măsură. Rezultă că unghiul ABD (înscris în cercul O_1) are aceeași măsură ca și unghiul ABC (înscris în cercul O_2). Aceste unghiuri congruente au vîrfurile comune (B), o latură comună (AB) și sînt așezate de aceeași parte a laturii comune, deci laturile BC și BD se suprapun rezultînd că punctele B , D și C sînt coliniare.

12. Dintr-un punct situat pe un cerc se duc trei coarde și pe aceste coarde ca diametre se descriu trei cercuri. Să se demonstreze că aceste trei cercuri au un punct comun se taie două cîte două în alte trei puncte coliniare.

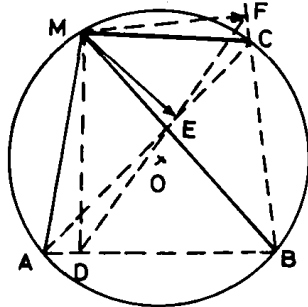


Fig.X.14

Rezolvare. Pe cercul O considerăm punctul M prin care trec cele trei coarde MA , MB , MC și dreapta lui Simson a punctului M față de triunghiul ABC determinat de extremitățile celor trei coarde (fig.X.14). Vom demonstra că această dreaptă conține punctele de intersecție ale cercurilor ce ar fi descrise pe coardele considerate ca diametre. Într-adevăr, perpendiculara MD dusă din M pe latura AB a triunghiului ABC este coarda comună a cercurilor descrise pe MA și MB cu diametre deoarece $m(\angle ADM) = m(\angle BDM) = 90^\circ$ reprezintă unghiuri drepte înscrise în semicercurile corespunzătoare cu diametrele MA și MB . Să recunoaștem că – prin construcție – D este un punct al dreptei lui Simson. Analog se demonstrează pentru punctele E și F , picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile AC și respectiv BC .

Dreapta lui Simson care trece prin D , E , F este dreapta cerută.

X.4. PROBLEME DE CONSTRUCȚII GEOMETRICE

A. Probleme rezolvate

1. Să se construiască un triunghi ABC , cînd se cunoaște: $AB=c=7,8$ cm, înălțimea coborîtă din C pe AB , $h_c=4,3$ cm și $m(\angle ABC)=m(\angle \beta)=50^\circ$.

Rezolvare. Metoda 1. Într-un punct arbitrar E , luat pe $AB=7,8$ cm, ridicăm o perpendiculară, pe care luăm o lungime $EF=h_c=4,3$ cm, și prin F ducem o paralelă la AB . Aceasta taie dreapta BB' care trece prin B și face cu AB unghiul β cu $m(\beta)=50^\circ$, în punctul C , care este al treilea vîrf al triunghiului ABC .

Metoda 2-a. Vom căuta la început să construim triunghiul DCB . Pentru aceasta, luăm un segment de dreaptă $DC=h_c=4,3$ cm (fig.X.15). În punctul C ducem o dreaptă CB astfel ca $m(\angle DCB)=90^\circ-m(\angle B)=40^\circ$, iar în D ducem o perpendiculară DB pe latura DC . Obținem la intersecția acestor două drepte vîrful B al triunghiului. Apoi este suficient să luăm o lungime $BA=c=7,8$ cm și obținem și al treilea vîrf al triunghiului ABC .

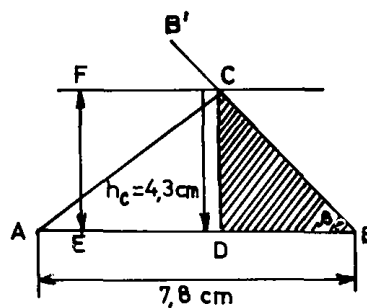


Fig.X.15

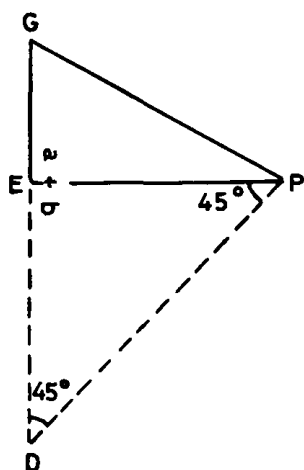


Fig.X.16

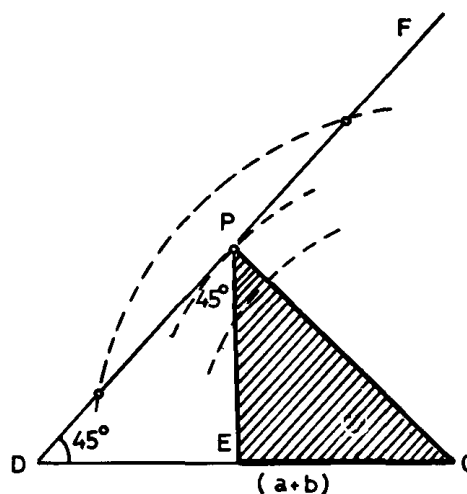


Fig.X.17

2. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd cunoaștem suma catetelor și ipotenuza: $a+b$ (suma catetelor), c (ipotenuza).

Rezolvare. 1) Considerăm problema rezolvată și fie GEP triunghiul căutat (fig.X.16). Construim triunghiul dreptunghic isoscel DEP , în care $[EP]=[ED]$. Analizăm triunghiul PGD și deducem modul de construcție.

2) Construcția figurii. Pe segmentul $DG=a+b$ (suma catetelor), în punctul D , se construiește un unghi de 45° . Din G se duce un arc de cerc cu raza cît ipotenuza dată c . Triunghiul cerut este GEP (fig.X.17).

3) Discuție. Dacă arcul de cerc taie DF într-un punct, avem o soluție; dacă taie pe DF în două puncte, avem două soluții. Dacă arcul de cerc nu taie pe DF , nu avem nici o soluție.

3. Să se construiască un trapez $ABCD$ cunoscîndu-î lungimea bazei mari $AB=a$, a bazei mici $CD=b$ și lungimile $AC=d_1$, $BC=d_2$ ale celor două diagonale.

Rezolvare. Presupunem trapezul construit (fig.X.18, pag. 372). Prelungim AB cu segmentul $BE=CD=b$. Patrulaterul $BEDC$ este un paralelogram, avînd laturile opuse BE și CD congruente și paralele. Rezultă că $[BD]=[CE]$.

După aceste observații putem deduce construcția cerută, și anume:

Vom construi în prealabil triunghiul AEC , căruia îi cunoaștem toate cele trei laturi: $AE=a+b$, $AC=d_1$,

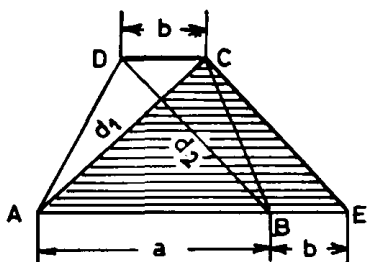


Fig.X.18

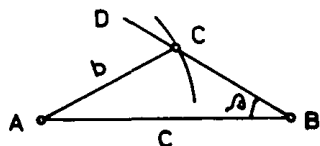


Fig.X.19

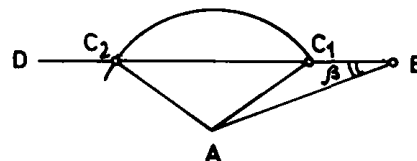


Fig.X.20

4. Să se construiască un triunghi ABC , când cunoaștem lungimile a două laturi $AB=c$, $AC=b$ și $\angle ABC \equiv \angle \beta$, opus uneia dintre ele. Caz particular: $c=5$ cm, $b=3$ cm, $m(\angle \beta)=25^\circ$.

Rezolvare. Să presupunem triunghiul ABC construit. Observăm că punctele A și B sînt capetele unui segment de dreaptă $[AB]$, de lungime cunoscută c (fig.X.19). Toată problema constă în a observa cum se găsește vîrfurile C .

Constatăm că: 1) C se află pe semidreapta BD , care face un unghi β cu AB . 2) C se află pe un arc de cerc cu centrul în A și de rază AC , cunoscută și egală cu b .

În cazul particular al problemei se consideră un segment de dreaptă $AB=c=5$ cm. În B ducem o semidreaptă BD , care face un unghi β cu măsura de 25° cu AB (fig.X.20). Cu centrul în A și cu o rază egală cu $b=3$ cm descriem un arc de cerc care intersectează dreapta BD în două puncte: C_1 și C_2 . Am obținut astfel două triunghiuri ABC_1 și ABC_2 care răspund problemei noastre.

Discuție. Să judecăm dacă problema este totdeauna posibilă, adică dacă putem face construcția triunghiului cu orice date.

- Latura AB , alăturată unghiului cunoscut, o putem construi întotdeauna, oricare ar fi mărimea ei.
- Unghiul ABC poate fi construit cu vîrfurile în B , oricare ar fi măsura lui (în afară de cazul cînd $m(\angle \beta)=0$ sau 180°).
- Cînd luăm în compas mărimea laturii AC , opusă unghiului dat, și descriem cercul cu centrul în vîrfurile A , trebuie ca acest cerc să taie a doua latură a unghiului β , pentru a putea determina vîrfurile al treilea al triunghiului; adică lungimea acestei laturi trebuie să fie mai mare sau cel puțin egală cu distanța vîrfurilor A la latura BD . Deducem de aici că sînt posibile mai multe cazuri: 1) Dacă latura opusă unghiului dat este egală cu această distanță, cercul atinge latura BD într-un singur punct. Avem o singură soluție, și anume un triunghi dreptunghic. 2) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mare decît această distanță, avem două soluții diferite (așa cum s-a întîmplat cu datele de mai sus), dar avem de observat că $[AC_1]=[AC_2]$. 3) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mică decît această distanță, triunghiul nu se încheie și construcția nu se poate face.

5. Să se ducă într-un cerc o coardă paralelă cu o dreaptă dată și care să aibă o lungime dată l .

Rezolvare. Fie Δ dreapta dată (fig.X.21). Dintr-un punct arbitrar M , luat pe cercul O , descriem un arc de cerc cu raza l . Fie N unul din punctele unde acest arc de cerc taie cercul O . Am fixat astfel pe cercul O o coardă MN a cărei lungime este l . Ea nu este însă paralelă cu Δ . Acum trebuie să o așezăm astfel ca ea să fie paralelă cu Δ . Dacă ducem din O o perpendiculară OP pe MN și din O ca centru descriem un cerc cu raza OP observăm că coarda MN este tangentă la acest cerc și că orice coardă a primului cerc tangentă la cel de-al doilea are aceeași lungime l . Atunci nu avem decât să construim o tangentă la cercul interior, paralelă cu dreapta Δ , construcție care se face ușor. Din O ducem o perpendiculară pe Δ . Ea va tăia cercul interior în punctele E și F . Tangentele în E și F la cercul cel mic răspund problemei noastre, adică problema admite două soluții. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să ni se dea lungimea l mai mică decât diametrul cercului mare, fiindcă într-un cerc cea mai mare coardă este diametrul său.

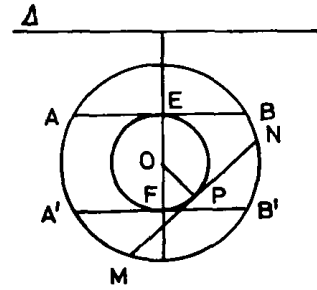


Fig.X.21

6. Fie AD o coardă în cercul de centru O ; o altă coardă, DC taie diametrul ce trece prin A în punctul B . Cum trebuie dusă coarda DC pentru ca $[AB] \equiv [AC]$? Problema este totdeauna posibilă?

Rezolvare. Fie E punctul diametral opus lui A (fig.X.22). Presupunem problema rezolvată, adică am dus coarda DC astfel ca $[AB] \equiv [AC]$. Atunci, triunghiul ABC este isoscel, de unde: $\angle ACB \equiv \angle ABC$. Însă, $\angle ABC \equiv \angle DBE$ ca opuse la vîrf, iar $\angle ACD \equiv \angle BED$ ca unghiuri cu vîrfurile pe cerc și avînd aceeași măsură $\frac{\widehat{AD}}{2}$. Urmează de aici că, dacă

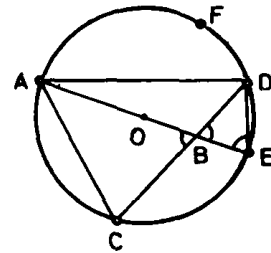


Fig.X.22

triunghiul ABC este isoscel, și triunghiul DBE este isoscel. Fie acum F un punct pe arcul \widehat{AD} , astfel ca

$$\widehat{DE} = \widehat{DF}. \text{ Însă: } m(\angle ABC) = \frac{\widehat{DE}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{DF}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} \text{ și } m(\angle ACD) = \frac{\widehat{DF}}{2} + \frac{\widehat{FA}}{2}, \text{ de unde reiese că } \widehat{AF} = \widehat{AC}.$$

De aici reiese construcția. Se ia $\widehat{DF} = \widehat{DE}$ și apoi $\widehat{AC} = \widehat{AF}$. Unind punctul C astfel aflat cu D , dreapta DC este coarda căutată. Ea va tăia pe AE în B , așa încît $[AB] \equiv [AC]$.

Discuție. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca arcul \widehat{DA} să fie mai mare decât arcul \widehat{DE} , căci numai așa F este cuprins între D și A . Cum însă $\widehat{DE} + \widehat{DA} = 180^\circ$, rezultă că lungimea coardei AD trebuie să fie mai mare decât latura pătratului înscris în cercul O . Nici în cazul cînd coarda AB este egală cu latura pătratului problema nu este posibilă, căci atunci punctul F cade chiar în A .

7. Se dau trei drepte (D_1) , (D_2) , (D_3) . Să se găsească pe dreapta (D_1) un punct astfel ca simetricul său față de dreapta (D_2) să fie așezat pe dreapta (D_3) .

Rezolvare. Ducem simetrica dreptei (D_1) față de dreapta (D_2) , găsim dreapta (D_4) care taie pe (D_3) în punctul M' (fig.X.23, pag. 374). Simetricul punctului M' față de dreapta (D_2) va fi punctul M așezat pe dreapta (D_1) ; acesta este punctul căutat.

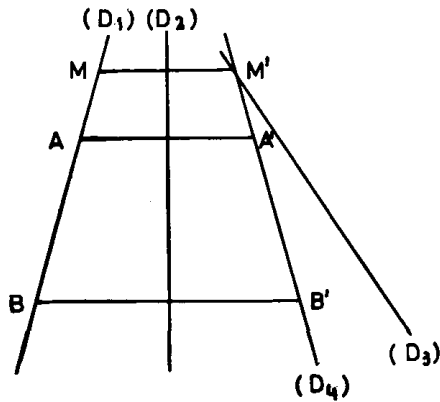


Fig.X.23

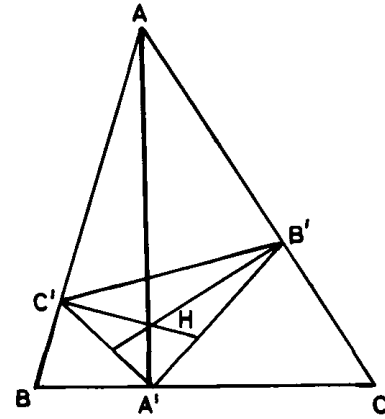


Fig.X.24

8. Să se construiască un triunghi cunoscând picioarele înălțimilor.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată, A' , B' , C' sînt picioarele celor trei înălțimi (fig.X.24). Obținem triunghiul $A'B'C'$ ortic triunghiului cerut. Înălțimile AA' , BB' , CC' sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$. Deducem construcția: 1) se construiește triunghiul $A'B'C'$; 2) bisectoarele celor trei unghiuri A' , B' , C' se întîlnesc în H (ortocentrul); 3) în A' , B' , C' ducem perpendiculare la aceste trei bisectoare și obținem astfel vîrfurile A , B , C .

9. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd se cunosc înălțimile și mediana care pleacă din vîrfurile unghiului drept.

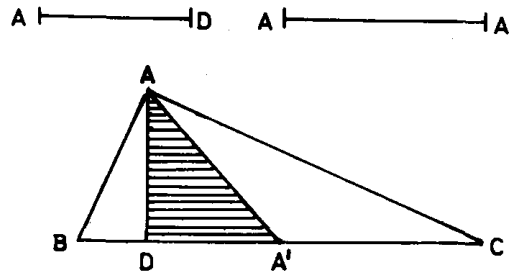


Fig.X.25

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată și analizăm figura X.25. În triunghiul ABC cunoaștem înălțimea AD și mediana AA' . De aici rezultă modul de construcție: 1) putem construi triunghiul dreptunghic ADA' , în care cunoaștem cateta AD și ipotenuza AA' ; 2) știm că în orice triunghi dreptunghic mediana $AA' = \frac{BC}{2}$, deci putem construi $A'B$ și $A'C$, fiecare congruent cu AA' , obținînd astfel vîrfurile triunghiului.

10. Să se construiască triunghiul ABC , cunoscînd mijloacele B' , C' ale laturilor AC și AB , precum și piciorul D al înălțimii care cade pe latura BC .

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată și fie ABC , triunghiul cerut (fig.X.26). În acest triunghi cunoaștem D , piciorul înălțimii AD , B' , mijlocul laturii AC și C' mijlocul laturii AB . Analizînd figura, se vede ușor că A este simetricul lui D față de linia mijlocie $B'C'$. Din cele constatate deducem modul de construcție: 1) unim B' cu C' ; 2) construim punctul A simetric cu D față de $B'C'$; 3) ducem în

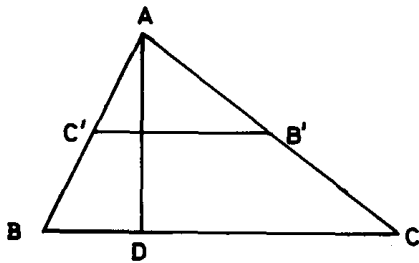


Fig.X.26

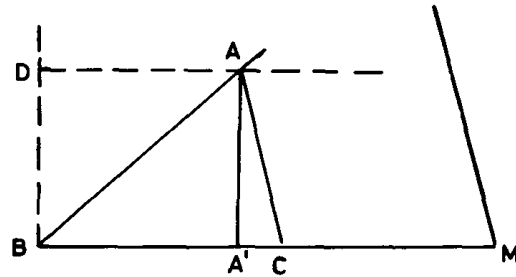


Fig.X.27

D o perpendiculară pe AD ; 4) dreapta AC' taie această perpendiculară în B ; 5) dreapta AB' va tăia această perpendiculară în C . Triunghiul ABC astfel construit corespunde datelor cerute în problemă.

11. Să se construiască un triunghi cunoscând două unghiuri și înălțimea dusă din vârful unghiului al treilea.

Rezolvare. În triunghiul ABC (fig.X.27) cunoaștem unghiul B , unghiul C , și înălțimea AA' . Se vede ușor că, ducând înălțimea AA' , obținem două triunghiuri dreptunghice: triunghiul $AA'B$ și triunghiul $AA'C$, cunoscând în fiecare din ele cateta AA' și unghiul B , respectiv unghiul C . De aici deducem modul de construcție: 1) construim unghiul B ; 2) construim o paralelă la una din laturile unghiului, la o distanță cât înălțimea dată care taie a doua latură a unghiului B în vârful A ; 3) perpendiculara AA' va fi înălțimea triunghiului cerut; 4) în punctul M , luat arbitrar pe prima latură a unghiului, construim un unghi congruent cu unghiul C ; 5) din A ducem prin mișcare de translație o paralelă la a doua latură a acestui unghi și obținem astfel al treilea vârf C al triunghiului. A, B, C sînt vîrfurile triunghiului cerut.

12. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscând ipotenuza și înălțimea, corespunzătoare ei.

Rezolvare. Construcția figurii fiind ușoară, nu mai este nevoie să presupunem problema rezolvată, ci trecem direct la construcție (fig.X.28).

1) Construim ipotenuza BC (dată). 2) Construim un semicerc cu diametrul BC . 3) Ducem în B o perpendiculară pe BC . 4) Luăm $[BD] \equiv [AA']$ (dată).

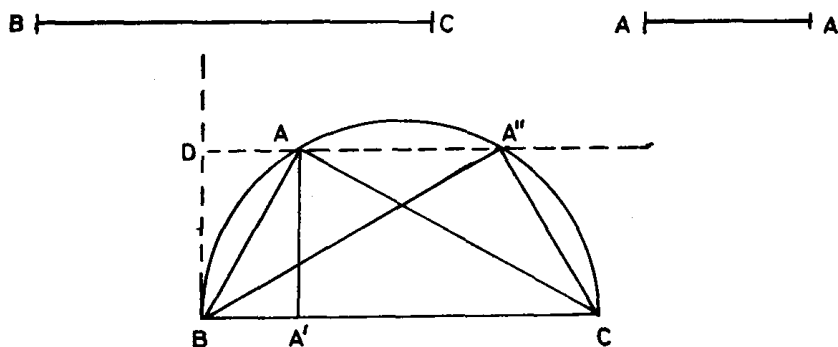


Fig.X.28

5) Din D ducem o paralelă la BC , care taie cercul în punctele A și A'' . Triunghiul $BA''C$ și triunghiul $BA'C$ sînt soluțiile problemei.

Discuție. Notăm $R = \frac{BC}{2}$.

Dacă $AA' < R$, avem două soluții. Dacă $AA' = R$, avem o singură soluție. Dacă $AA' > R$, triunghiul nu se poate construi.

13. Să se construiască un triunghi ABC , cunoscînd mărimile laturilor AB , BC și mediana AA' .

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată. La triunghiul ABC (fig.X.29) cunoaștem AB , BC și mediana AA' . Din analiza figurii putem vedea modul de construcție: 1) construim triunghiul ABA' , în care cunoaștem AB , $BA' = \frac{BC}{2}$ și AA' deci cele trei laturi; 2) $A'C = BA' = \frac{BC}{2}$; 3) unim A cu C . Triunghiul astfel construit corespunde condițiilor date.

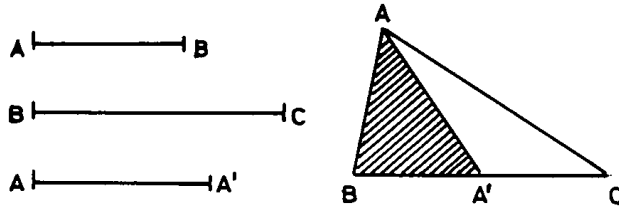


Fig.X.29

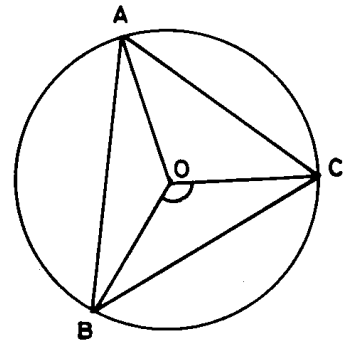


Fig.X.30

14. Să se construiască un triunghi cunoscînd unghiurile și raza cercului circumscris.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată.

Analizînd figura X.30 se vede ușor că unghiul la centru BOC este dublul unghiului A ; analog pentru celelalte unghiuri.

De aici se deduce modul de construcție: 1) construim cercul cu raza dată R ; 2) ducem o rază arbitrară OB ; 3) construim unghiul la centru, de măsură $2m(\angle A)$, și obținem vîrfurile C și A al triunghiului; 4) construim în continuare al doilea unghi la centru, de măsură $2m(\angle B)$, și obținem al treilea vîrf A ; 5) unim A cu B și obținem triunghiul cerut.

B. Probleme propuse

15. Se dau două unghiuri ale unui triunghi. Să se construiască cel de-al treilea unghi.

16. Se dă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic. Să se construiască celălalt unghi ascuțit.

17. Să se ducă o paralelă cu o dreaptă dată, care să fie la o distanță dată de prima dreaptă.

18. Să se împarta în două părți egale un unghi al cărui vîrf nu încapă în cadrul foii de desen.